

Máté Ilona

Szöveges feladatok a matematikai didaktikában

Bevezető

Az Európai Unió más országaihoz hasonlóan Romániában is kompetenciaalapú oktatás folyik. A tanítás során a tanárok arra törekszenek, hogy a tanulók az élet különböző területein alkalmazni tudják tudásukat, tapasztalataikat, személyes adottságaikat.

A kompetenciák meglétét méri fel a Nemzeti Felmérő során, melyen azok a tanulók vesznek részt, akik befejezték a nyolcadik osztályt, 14–15 évesek. A Felmérőn román nyelvből és irodalomból, matematikából, valamint azok, akik nem román nyelven tanulnak, anyanyelvből és irodalomból vizsgáznak.

A matematikafelmérőn 15 kompetencia meglétét ellenőrzik, melyek közül a 12. a következő: „Egy problémahelyzet átültetése a matematika nyelvezetére”.

A 2010–2011-es tanévben egy kísérlet zajlott a romániai, Bihardiószegi I–VIII. osztályos iskola 8. D. osztályában. A kísérlet célja az előbb leírt kompetencia fejlesztése. Kutatások bizonyítják, hogy egy verbális információra jobban emlékezünk, ha egy releváns vizuális információ is kapcsolódik hozzá. Ezt a többszöri kódolást lehet felhasználni a szöveges feladatok megértése és megoldása során. Ebben a cikkben erről a kísérletről, és a hozzá kapcsolódó tapasztalatokról számolok be.

A kísérlet helyszíne, résztvevői és célja

A kísérlet a Romániában lévő nagyközség, Bihardiószeg I–VIII. osztályos iskolájában zajlott, ahol 900 gyermek tanul, a 6–7 éves elsősöktől a 14–15 éves nyolcadikosokig. Az iskolába román, magyar és roma anyanyelvű tanulók járnak. A magyar és roma gyermekek magyar nyelven tanulnak, a román gyermekek anyanyelvükön. A nyolcadik évfolyamban 5 osztály van.

	8. A.	8. B.	8. C.	8. D.	8. E.
Anyanyelvük	román	román	magyar	magyar	roma
Az iskolában használt nyelv	román	román	magyar	magyar	magyar
Az osztály létszáma	21	18	23	23	18

A kísérlet a 8. D. osztályban zajlott, ahol a tanulók jó magaviseletű, jó érzésű, de átlagos képességű, nem kiválóított tanulók voltak.

A kísérlet célja felmérni a tanulók szövegértési készségeit, a szöveges feladat megoldási kompetenciáit, majd felhasználva a modern agykutatás eredményeit, szöveges feladatok megoldási gyakorlataival fejleszteni a szövegértésüket és a feladatmegoldásukat.

A kísérlet fő kérdése: „*Fejleszthető-e a tanulók szövegértési kompetenciája úgy, hogy a megoldandó feladatok szövegét alaposabb elemzésnek vetjük alá azért, hogy ki tudják válogatni a fontos adatokat az elhanyagolhatók és a feladat megoldása szempontjából lényegtelenek közül, illetve a feladat megoldása során a kulcsmomentumok írásbeli, szöveges lejegyzésével fejleszthető-e a szöveges feladat megoldási kompetenciája?*”

A kísérlet menete

A kísérlet 2011 májusában zajlott, amikor a tanulók már elsajátították a teljes tananyagot, és az ismétlő, rendszerező rész volt még hátra. A kísérlet 9 órán át zajlott, amiből az első órán egy előtesztet, az utolsó órán egy utótesztet írtak meg a tanulók.

Előteszt

1) Gondoltam egy számot. A háromszorosához 12-t adva, 2-vel kisebb számot kaptam, mintha a négyszereséből levontam volna 3-at. Melyik számra gondoltam?

2) Egy apa 3 év múlva kétszer olyan idős lesz, mint a fia. 7 évvel ezelőtt az apa éppen háromszor olyan idős volt, mint a fia. Melyikük hány éves most?

A feladatlapokat elemzésének eredményét táblázatba foglaltam

A feladat sorszáma	Helyes megoldást adó tanulók száma	Részleges megoldást adó tanulók száma	Megoldást nem adó tanulók száma
1.	0	8	15
2.	1	7	15

A 23 tanulóból egy olyan volt, aki helyes eredményt adott meg az egyik szöveges feladatnál, viszont nem írt megoldást. Az utólagos rákérdezésnél P. N. azt mondta: „Addig próbálkoztam a számokkal, míg kijött a jó eredmény”.

A részleges megoldást adó tanulók számolási hibát vétettek, vagy nem jutottak el a végső megoldásig. A megoldást nem adó tanulók vagy egyáltalán hozzá sem fogtak a feladathoz, vagy teljesen hibás megoldást írtak le.

Az előtesztből látszik, hogy a szöveges feladatok megoldása komoly nehézséget okoz a tanulóknak.

A következő hét órán szöveges feladatokat oldottak meg a tanulók. Minden órán egy-egy témakör köré csoportosultak a feladatok.

1. óra. Gondolkodj visszafelé!

Az első feladat: A párizsi kiránduláson Réka és Árpí sokat fotózott. Szerdán a képek felét az Eiffel-toronymnál, a maradék kétharmad részét a Notre-Dame-nál, a maradék 8 képet pedig a Diadalív-nél készítették. Összesen hány képet készítettek szerdán? (*Sokszínű matematika*, 6. Mozaik, 72. o. 8. feladat)

A szöveget minden tanuló megkapta. Ezután tíz percük volt, hogy végigolvassák, megértsék és megpróbálják megoldani a feladatot.

Az első ötlet K. J.-től való, aki így oldotta meg a feladatot:

$$\frac{^3)1}{2} + \frac{^2)2}{3} + \frac{^6)8}{1} = x;$$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{6} + \frac{48}{6} = \frac{55}{6}.$$

Szavakban hozzátette: „Tehát az eredmény: $\frac{55}{6}$.” Ekkor T. A. azt mondta: „A fényképek száma nem lehet tört”.

A következő megoldás B. M.-től való volt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{egynegyede } 8 \\ \text{egynegyede } 8 \\ \text{fele} = 2 \cdot 8 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 + 8 + 16 = 32.$$

B. M.: „32 képet készítettek.” A tanár megkérte, hogy ellenőrizze le az eredményt a feladat szövege alapján.

„Az Eiffel-toronymnál a képek felét, azaz 16 képet. A Notre-Dame-nál a maradéknak, vagyis 16-nak a $\frac{2}{3}$ -át...”

De az nem természetes szám! Nem jó a megoldás.”

A tanár javaslata: „feltételezzük, hogy hagyományos fényképezőgépet használtak, ábrázoljuk a filmszalagot, amelyre a negatívokat készítették!”

K. A. ezután így oldotta meg a feladatot:

			8 kép
Eiffel-torony	Notre-Dame	Diadalív	

Ha a Diadalívnél 8 képet készítettek, akkor a Notre-Dame-nál kétszer annyit, vagyis 16-ot. Az Eiffel-toronymnál pedig ugyanannyit, mint a Diadalívnél és a Notre-Dame-nál együtt, vagyis $8 + 16 = 32$ képet.

Összesen: $8 + 16 + 32 = 64$ képet készítettek.

A tanulók a szöveggel is leírták a megoldás menetét, hogy ismétléskor az segítsen nekik a felelevenítésben.

2. és 3. óra. Ki hány éves?

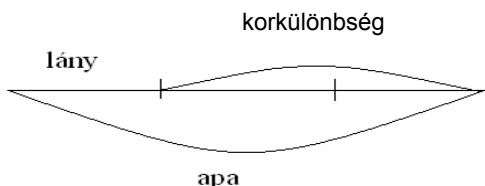
Egy apa 45 éves, a lánya 19. Hány éves volt a lány, amikor az apja éppen háromszor annyi idős volt, mint ő? (*Sokszínű matematika*, 8. Mozaik, 61./1.)

Az első feladatnál – miután önállóan nem boldogultak – arra kérte a tanár a tanulókat, hogy próbálják meghatározni, hány időpontról van szó a szövegben, majd ábrázolással oldják meg a feladatot.

A feladat megoldása:

Jelen: apa 45 éves lány
 lánya 19 éves |-----|

Múlt:



A feladatot P. N. oldotta meg, aki hamar rájött az ábrázolás után, hogy a korkülönbség mindig állandó a két személy között, s innen könnyen kiszámolta:

Korkülönbség: $45 - 19 = 26$ év.

A lány életkora: $26 : 2 = 13$ év.

Az apa életkora: $13 + 26 = 39$ év.

A tanulók a füzetekbe szöveggel is leírták a feladatok megoldását. A tanár felhívta a figyelmet arra, hogy a feladat kérdését mindig meg kell válaszolni.

P. N.: „A lány 13 éves volt, az apa 39 éves volt.”

T. K.: „De nem kérte a feladat az apa életkorát.”

P. N.: „A lány 13 éves volt.”.

4. óra. Kinematikai feladatok

A negyedik órán olyan feladatok következtek, amelyek valamilyen mozgáshoz kapcsolódtak. Az egyik ezek közül a következő feladat volt:

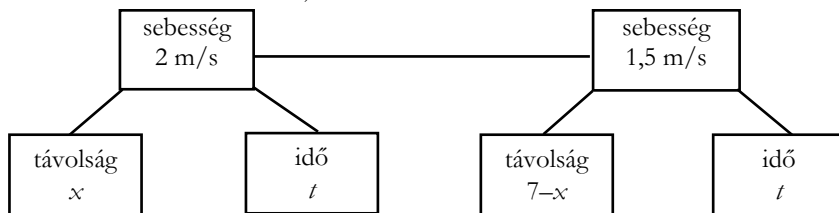
Egy fizikai kísérletben két kiskocsit egyszerre indítanak el egy 7 m hosszú egyenes pálya két végéről. A kocsik sebessége: 7,2 km/h, illetve 5,4 km/h.

Fejezzük ki a kocsik sebességét m/s-ban! Mennyi idő elteltével ütköznek össze? (*Sokszínű matematika*, 8. Mozaik, 69. oldal, 4. feladat)

A feladat első részét nagyon könnyen elvégezték önállóan a tanulók, és kiszámították, hogy $7,2 \text{ km/h} = 2 \text{ m/s}$, illetve $5,4 \text{ km/h} = 1,5 \text{ m/s}$.

A feladat második része már nehezebben ment, útbaigazításra volt szükség. A tanár kérte a diákokat, hogy próbálják reprezentálni a két kocsi mozgását.

A következő ábrát rajzolta a táblára B. M.:



1. kiskocsi

2. kiskocsi

Ezután M. G. felírta és megoldotta a feladathoz kapcsolódó egyenleteket:

„Mivel mindkét kiskocsi ugyanannyi ideig haladt, felírhatjuk:

1. kiskocsi $x = 2 \cdot t$

2. kiskocsi: $7 - x = 1,5 \cdot t$

Vagyis 2. kiskocsi esetén: $x = 7 - 1,5 t$

Ha egyenlővé tesszük a két egyenletet, kiszámíthatjuk a t értékét.

$$2 \cdot t = 7 - 1,5 \cdot t$$

$$3,5 \cdot t = 7$$

$$t = 7 : 3,5, t = 2 \text{ s.}$$

Tehát a kiskocsik 2 másodperc múlva ütköznek össze.”

Ezután még két mozgásos feladatot oldottak meg, az egyikben a sebességet, a másikban a távolságot kellett kiszámolni.

5. óra. Számfeladatok

Ezen az órán olyan feladatokat kellett megoldani, melyekben a feladat valamilyen szám meghatározása volt, de az utasítások szövegben voltak leírva.

(Feladatok a Mozaik Kiadó *Sokszínű matematika* 8. c. tankönyvéből)

65. oldal 1. és 2. feladat

Egy kétjegyű szám egyik számjegye a másik háromszorosa. Soroljuk fel az összes ilyen számot! Ha a számhoz hozzáadjuk a számjegyei felcserélésével kapott számot, 88-at kapunk. Melyik ez a szám?

65. oldal 4. feladat

Egy kétjegyű szám első számjegye 3-mal kisebb a második számjegyénél. A számjegyek felcserélésével az eredeti szám kétszeresénél 2-vel nagyobb számot kapunk. Melyik a felcseréléssel kapott szám?

65. oldal 7. feladat

Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 8. A számot a számjegyei felcserélésével kapott számból kivonva, az eredmény 36. Melyik ez a szám?

Ezek a feladatok a tanulók szerint sokkal könnyebbek voltak, mint az előzőek. Itt lelkesen látott mindenki a munkának, és sok tanulónak sikerült önállóan megoldani a feladatokat.

6. óra. Közös munkavégzés

Ezen az órán több olyan feladatot oldottak meg a tanulók, melyekben két személy, gép egyszerre, egyidejűleg dolgozik, és az elvégzett munka időtartamára, mennyiségére vonatkozó feladatokat kellett megoldani. Az egyik ilyen volt:

Az udvaron egy halom fa van. Ha Tibi egyedül hordja be, 24 perc alatt végez a munkával. Ha bátyja, Zoli hordja be a fát egyedül, 16 perc alatt készül el. Mennyi idő alatt végeznek, ha együtt hordják be a fát? (*Sokszínű matematika*, 8. osztály, Mozaik, 77. oldal, 3. feladat)

A tanulóknak, bár időt kaptak a megértésére és megoldására, nem volt ötletük a megoldásra. A tanár javaslatára T. A. a táblánál táblázatot készített:

	Egyedül ennyi idő alatt végez	1 perc alatt ennyi részét hordja be a fának	x perc alatt ennyi részét hordja be a fának
Tíbi	24 perc	$\frac{1}{24}$	$\frac{x}{24}$
Zoli	16 perc	$\frac{1}{16}$	$\frac{x}{16}$

T. A.: „Jelöljük x -szel az időt, amennyi alatt együtt befejezik a munkát, ekkor:

$$\frac{x}{24} + \frac{x}{16} = 1;$$

$$\frac{2^1)x}{24} + \frac{3^1)x}{16} = 1;$$

$$\frac{5x}{48} = 1;$$

$$x = \frac{48}{5}.$$

Együtt $48/5$ perc alatt, vagyis 9 perc 36 másodperc alatt végeznek.”

A következő ilyen típusú feladatot már önállóan tudták megoldani a tanulók.

7. óra. Ismétlés

Ezen az órán nem volt új témakör, hanem egy-egy, témakörökhöz kapcsolódó feladatot oldottak meg a tanulók, mert ekkor ismételték az utótesztet. Annak felmérésére, hogy mennyire volt hatékony a szóveges feladatok aritmetikai-algebrai megoldása, a tanulók a nyolcadik órán egy utótesztet írtak.

Utóteszt

1. Egy csiga 2 óra 30 perc alatt 3 métert halad. Hány métert halad: a) 1 óra alatt; b) 15 perc alatt; c) 4 óra 45 perc alatt.
2. Egy apa 3 év múlva kétszer olyan idős lesz, mint a fia. 7 évvel ezelőtt az apa éppen háromszor olyan idős volt, mint a fia. Melyikük hány éves most?
3. Gondoltam egy kétjegyű számra, melyben a számjegyek összege 10. Ha felcserélem a számjegyeket, egy olyan számot kapok, mely eggyel kisebb, mint az eredeti szám kétszerese. Melyik számra gondoltam?
4. Egy metroalagút-szakaszt egy fúrópajzs 12 nap alatt, a másik 15 nap alatt fúrná ki. Mennyi idő alatt találkozik a két fúrópajzs, ha egymással szemben indítják el őket a leendő alagút két végéről?

Az utóteszt értékelésekor szembeűnő volt a változás az előteszthez képest: a tanulók mertek próbálkozni, még a gyengébbek is. Nem mindig volt helyes az út, amelyen elindultak a megoldáshoz, de 7 óra alatt nem is várható el ilyen eredmény. Az eredményeket összesítve:

Feladatszám	Helyes megoldást adott	Részleges megoldást adott	Megoldást nem adott
1. a.	6 tanuló	10 tanuló	6 tanuló
1. b.	6 tanuló	10 tanuló	6 tanuló
1. c.	5 tanuló	11 tanuló	6 tanuló
2.	2 tanuló	11 tanuló	9 tanuló
3.	6 tanuló	9 tanuló	7 tanuló
4.	4 tanuló	10 tanuló	8 tanuló

Az utótesztet 22 tanuló írta meg. A tesztek között nem volt olyan, amelyben minden feladat helyesen lett volna megoldva, de nem volt olyan sem, amelyikben egy feladat sem volt megoldva. Az utóteszt eredménye arra utal, hogy nagyobb hangsúlyt kell fektetni a szöveges feladatokra. Ennél az utótesztnél meggyőzőbb a 2011-ben megírt Nemzeti Felmérő eredménye. Az adott iskolából 100 tanuló vett részt a felmérőn.

	8. A	8. B	8. C	8. D	8. E
Tanulók száma	21	17	23	23	16

Ha a 100 megszerezhető pontszámhoz képest vizsgáljuk a 10 legjobb eredményt, akkor azokat a következő táblázat foglalja össze:

Sorszám	Pontszám	8. A	8. B	8. C	8. D	8. E
1.	83 pont	–	–	–	1	–
2.	82,5 pont	–	–	–	1	–
3.	81 pont	–	–	–	1	–
4.	80 pont	–	1	–	–	–
5.	79 pont	–	1	–	–	–
6.	78 pont	1	–	–	1	–
7.	77 pont	–	1	–	–	–
8.	76 pont	–	1	–	1	–
9.	72 pont	–	–	1	1	–
10.	70 pont	3	1	–	–	–
	Összesen	4	5	1	6	0

A kísérletben a 8. D. osztály vett részt, s a legjobb három eredmény az itt volt, illetve a legjobb tíz eredményt elért 16 tanuló közül 6 innen került ki.

Következtetések

A kísérlettel sikerült megvalósítani a kitűzött célt: fejlődött a tanulók szövegértése, valamint olyan szöveges feladatmegoldási módszereket ismerhettek

meg, melyek könnyebbé tették számunkra az egyenletek felírását és az algebrai megoldást.

Lényeges szempont volt a kísérlet során, hogy a feladatok megoldása során párhuzamosan foglalkoztattuk a tanulók vizuális és fonetikus agytárát a sikeresebb és könnyebb feladatmegoldásért.

Tanulság a kísérletből, hogy nem elegendő hét ilyen feladatmegoldó óra, hanem a teljes négy év alatt, amelyek felkészítik a tanulókat a Nemzeti Felmérésre, folyamatosan kell szöveges feladatokat megoldaniuk. Nem szabad kizárólag az algebrai megoldásra összpontosítani, hanem lehetőséget kell adni a tanulóknak az aritmetikai megoldásra is, majd ezt követően ösztönözni őket arra, hogy írják le és oldják meg a feladathoz kapcsolódó egyenletet is. Katz Sándor nagyon ideillően megfogalmazta, hogy miért is kell visszatérni újra és újra a szöveges feladatok megoldására: „Az a tapasztalatom, ahhoz, hogy egy módszert, ötletet alkalmazásképesen elsajátítsanak a tanulók, azzal legalább háromszor kell találkozniuk. (Időben jól elkülönült esetekben. Egyszerre megoldott három feladat nem helyettesíti a többszöri találkozást.) Egyszer, amikor megmutatják nekik, vagy rávezetik őket. Ezt egy ismétléssel fel kell eleveníteni. Az a legjobb, ha harmadszor már valamivel összekapcsolva, összehasonlítva kerül felelevenítésre.” (Katz 2009)

Irodalomjegyzék

Baddeley, A. D., Logie, R. H.: *Working memory: The multiple component model*, 1999.

Davidson, J. E. & Sternberg, R. J.: *The Psychology of Problem Solving*. Cambridge, University, Press Cambridge, 2008.

<http://cegegeszseg.origo.hu/20081028-a-funkcionalis-analfabeta-nem-ertiamit-olvas.html>

http://hu.wikipedia.org/wiki/Szöveges_feladat

<http://www.edu.ro/index.php/articles/c916/>

<http://www.mon.hu/unios-akcioterv-a-funkcionalis-analfabetizmus-ellen>

Katz, S.: *Személyes beszélgetés*. 2009.

Olosz, E.–Olosz, F.: *Matematika és módszertan*, Erdélyi Tankönyvtanács Kolozsvár, 2000, 208–237.

Sokszínű Matematika 6, Mozaik, Szeged, 2010, 62–94.

Sokszínű Matematika 8, Mozaik, Szeged, 2010, 52–83.

Sternberg, R. J., Ben-Zeev, T.: *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, 1998, 262–267.