

MAGYAR GEOFIZIKA

HUNGARIAN GEOPHYSICS

A MAGYAR
GEOFIZIKUSOK
EGYESÜLETÉNEK
FOLYÓIRATA



JOURNAL OF THE
ASSOCIATION
OF HUNGARIAN
GEOPHYSICISTS

Földtani és Geofizikai Vándorgyűlés, 2025
A Magyar Geofizikai Egyesület új honlapja

Pontszerű szedecimupólus (SDP) mágnes spinner
magnetométeres mérésének szimulációja

Magnetotellurika – változók, képletek, összefüggések

Az NRHT kamratárságában üzemelő szeizmoakusztikus mérőrendszer
és az abból származó eredmények bemutatása

Báró Eötvös Loránd szobrának
2024. évi megkoszorúzása

In memoriam
Vida Zsolt



MAGYAR GEOFIZIKA

HUNGARIAN GEOPHYSICS

65. évfolyam (2024) 3. szám



A MAGYAR GEOFIZIKUSOK EGYESÜLETÉNEK FOLYÓIRATA
JOURNAL OF THE ASSOCIATION OF HUNGARIAN GEOPHYSICISTS

TARTALOM • CONTENTS

MGE HÍREK • NEWS OF ASSOCIATION OF HUNGARIAN GEOPHYSICISTS (AHG)

- 93 Földtani és Geofizikai Vándorgyűlés, 2025 (Geological and Geophysical Assembly, 2025) – *MTE és MGE*
93 A Magyar Geofizikai Egyesület új honlapja (New home page of AHG) – *MGE Titkárság*

TANULMÁNY • PAPER

- 94 Pontszerű szedecimupólus (SDP) mágnes spinner magnetométeres mérésének szimulációja (Numerical modelling of the measurement of a small size sedecimupole (SDP) magnet on a spinner magnetometer with Helmholtz coil sensor) – *Márton P.*
107 Magnetotellurika – változók, képletek, összefüggések (Magnetotellurics – variables, formulas and relationships) – *Kiss J., Zilahi-Sebess L.*
113 Az NRHT kamratérségében üzemelő szeizmoakusztikus mérőrendszer és az abból származó eredmények bemutatása (Presentation of the acoustic emission analysis results collected from the NRWR repository chamber's area) – *Deák F., Bakai J., Szűcs I.*

HÍREK • NEWS

- 131 Báró Eötvös Loránd szobrának 2024. évi megkoszorúzása – *Pályi A.*

IN MEMORIAM

- 132 Vida Zsolt – *Szerkesztőség*

MAGYAR GEOFIZIKA

HUNGARIAN GEOPHYSICS

65. évfolyam (2024) 3. szám

A MAGYAR GEOFIZIKUSOK EGYESÜLETÉNEK FOLYÓIRATA
JOURNAL OF THE ASSOCIATION OF HUNGARIAN GEOPHYSICISTS

Főszerkesztő • Editor-in-Chief

DR. BODOKY TAMÁS

E-mail: mageofedit@gmail.com

Szerkesztőbizottság • Editorial Board

DR. GALSA ATTILA, DR. KISS JÁNOS, DR. LÓRINCZ KATALIN,

DR. PETHŐ GÁBOR, DR. SZABÓ NORBERT PÉTER

Technikai szerkesztő • Technical Editor

HOCK GÁBOR

E-mail: mageoftechn@gmail.com



Lapunk e számának megjelenését a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatja

A szerkesztőség a szakcikkeket (tanulmányokat) szaklektorálás után közli. A szaklektorok névsorát az évváró számban tesszük közzé. A lapban megjelenő cikkek adatainak és állításainak helyességért, ill. közölhetőségéért kizárólag a szerzők tartoznak felelősséggel.

Kiadja a Magyar Geofizikusok Egyesülete

A kiadásért felel: Dr. Timár Gábor

Szerkesztőség: 1145 Budapest, Columbus u. 17-23.

Telefon/Fax: (1) 201-9815

Titkársági e-mail: postmaster@mageof.t-online.hu

Honlap: www.mageofegy.hu

Megjelenik évente négyszer

INDEX: 26 507

HU ISSN 2677-1497 (online)

Földtani és Geofizikai Vándorgyűlés, 2025



Tisztelt Tagtársak, Érdeklődők!

Örömmel jelentjük be, hogy a *Földtani és Geofizikai Vándorgyűlést 2025-ben* a hagyományoknak megfelelően ismét megrendezi a Magyarhoni Földtani Társulat és a Magyar Geofizikusok Egyesülete.

A három évente megrendezésre kerülő rendezvény fő témája a *kritikus nyersanyagok*. Ezek kutatásával, potenciáljával, bányászatával, felhasználásával, kapcsolódó környezetföldtani kérdésekkel, nemzetközi és hazai szabályozási folyamatokkal kapcsolatos előadásokat várunk.

M. Tóth Tivadar
Elnök, MFT

Helyszín: Eger, Szent István Hotel

Időpont: 2025. szeptember 18–20.

A Vándorgyűlésen a tudományos eredmények előadása mellett kiállítási és bemutatkozási lehetőséget kínálunk cégek részére.

A további részletekkel a konferencia körlevelében fogunk jelentkezni, valamint a folyamatosan frissülő <https://foldtan.hu/hu/vandorgyules2025> honlapon.

Jó szerencsét!

Budapest, 2024. december. 11.

Tímár Gábor
Elnök, MGE

A Magyar Geofizikai Egyesület új honlapja

Tisztelt Tagtársunk!

Örömmel értesítjük, hogy elkészült Egyesületünk új honlapja.

A honlap már látogatható, egyelőre még teszt üzemmódban működtetjük, mivel jelenleg is folyik az anyagok feltöltése, ezért szíves türelmüket kérjük.

<http://www.mageofegy.hu>

Üdvözlettel,
MGE Titkárság

Pontszerű szedecimupólus (SDP) mágnes spinner magnetométeres mérésének szimulációja

MÁRTON P.

ELTE Geofizikai és Űrtudományi Tanszék, Budapest
E-mail: archeomag@caesar.elte.hu

A szedecimupólus (SDP) mágnes a negyedrendű multipólus mágnes. Mágneses tere (indukció) a mágneses potenciál függvényből számítható ki, amely az m_4 momentum és négy pár szögparaméternek a függvénye. Utóbbiak a mágnes négy tengelyének irányába mutató egységvektor metszéspontjainak pólustávolság és hosszúság koordinátái az egységsugarú gömb felszínén $((\vartheta_i, \lambda_i), i = 1, 2, 3, 4)$. Mintaméretű, azaz közel pontszerű SDP mágnes spinner magnetométeren történő forgatásával folytonos kimenő feszültséget regisztrálhatunk. A jelen munka célja a mért feszültségek és a mágnes paraméterei között fennálló egyenleteknek a levezetése és alkalmazása a mérés szimulációjára.

Márton, P.: Numerical modelling of the measurement of a small size sedecimupole (SDP) magnet on a spinner magnetometer with Helmholtz coil sensor

The sedecimupólus (SDP) magnet is the fourth order multipole magnet. The magnetic field (induction) which is computed from the magnetic potential depends on its strength expressed by the moment m_4 and four pairs of geometrical parameters, the polar distances and longitudes of the points of intersection on the surface of the unit sphere of the four axes of the SDP magnet $((\vartheta_i, \lambda_i), i = 1, 2, 3, 4)$. If such a magnet of sufficiently small size placed on a spinner magnetometer for measurement it will produce a continuous signal of alternating voltage. The aim of this work is to derive the equations between the measured voltages and the parameters of the magnet and apply them to the simulation of the measurement.

Beérkezett: 2024. október 14.; elfogadva: 2024. október 29.

Bevezetés

Kicsiny (pontszerű) szedecimupólus mágneset forgatunk egyenletes ω szögsebességgel vízszintes tengelyű, Helmholtz-konfigurációjú tekercspár belsejében. Az alkalmazott (X, Y, Z) koordináta rendszer kezdőpontja egyben a tekercspár középpontja. Modellünkben a tekercsek átmérője 8 cm, menetszáma 2000. Az 1-jelű tekercs $X = +2$ cm-en, a 2 jelű tekercs $X = -2$ cm-en van. A Z tengely függőlegesen felfelé mutat. A mágnes helye az origó, momentuma m_4 Am⁵. További paraméterei a hozzá rögzített (x', y', z') koordináta-rendszerben négy tengelyirányának \mathbf{u}_i egységvektorai, ill. az ezeknek megfelelő gömbfelszíni ϑ_i pólustávolság és λ_i hosszúság ($i = 1, 2, 3, 4$). A forgatás az első mérési helyzetben ($j = 1$) a minta z' tengelye körül történik, a második helyzetben ($j = 2$) az x' tengely körül, végül a harmadik helyzetben ($j = 3$) az y' tengely körül, azaz mindhárom esetben a forgás-

tengely egybeesik a Z tengellyel. A mérés szimulációjának bemeneti adatai m_4 , valamint a felsorolás sorrendjében:

a $j = 1$ helyzetben a

$$\lambda_i^{(1)} = \lambda_i, \text{ és } \vartheta_i^{(1)} = \vartheta_i, (\sin\vartheta_i^{(1)} \neq 0), \quad (i = 1, \dots, 4), \quad (1.1)$$

a $j = 2$ és $j = 3$ helyzetekre pedig a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\lambda_i^{(2)} &= \cos\vartheta_i / \sin\vartheta_i \sin\lambda_i, \\ \cos\vartheta_i^{(2)} &= \sin\vartheta_i \cos\lambda_i, \quad (i = 1, \dots, 4), \end{aligned} \quad (1.2)$$

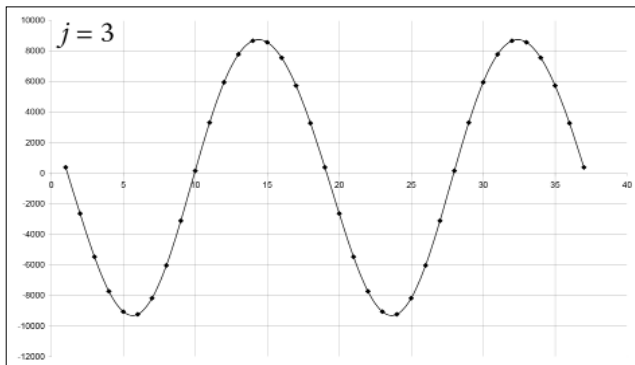
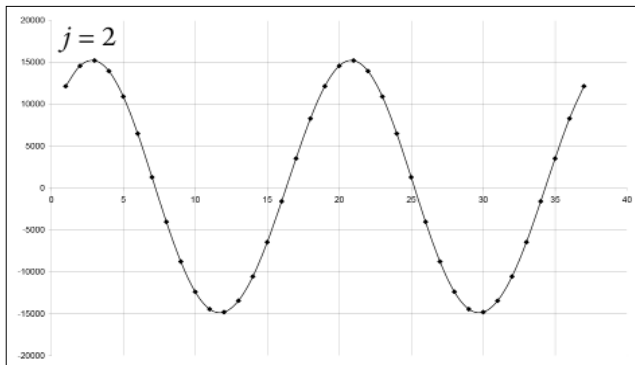
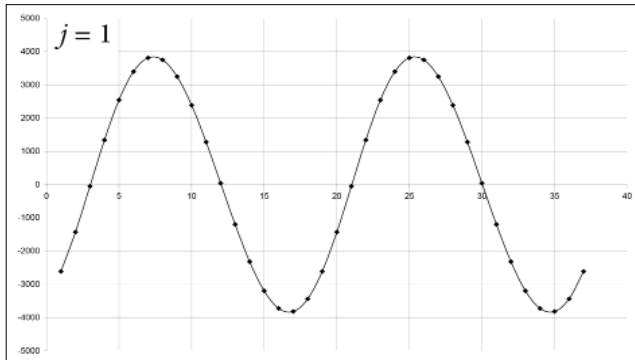
illetve a

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\lambda_i^{(3)} &= \sin\vartheta_i \cos\lambda_i / \cos\vartheta_i, \\ \cos\vartheta_i^{(3)} &= \sin\vartheta_i \sin\lambda_i, \quad (i = 1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (1.3)$$

összefüggések felhasználásával számítandók ki.

1. táblázat Az $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ momentumú SDP mágnes szögparaméterei a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekben
Table 1 Angular parameters of the sample (SDP) magnet of moment $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ in measurement positions $j = 1, 2, 3$

i/j	1		2		3	
	ϑ (°)	λ (°)	ϑ (°)	λ (°)	ϑ (°)	λ (°)
1	37,10	192,85	126,022	99,548	97,710	-36,403
2	50,72	306,36	62,683	134,555	128,562	35,936
3	66,91	32,98	39,497	38,068	59,951	63,059
4	27,62	105,63	97,175	63,257	63,483	-8,024



1. ábra Szimulált feszültségek (µV), amelyeket a fent definiált Helmholtz-tekercs kimenetén mérünk az 1. táblázatban megadott paraméterekkel rendelkező SDP mágnes forgatása nyomán egy teljes körülforgatás alatt a három mérési helyzetben (j). A görbék (közelítő) harmonikus analízise a ponttal megjelölt diszkrét értékek felhasználásával a történt

Figure 1 Output voltages (µV) of the Helmholtz coil sensor produced by induction of the sample magnet during one rotation cycle in all three measurement positions (j). The (approximate) harmonic analysis of the curves (see Table 1) was performed using the values marked by dots

A forgó mágnes a tekercsekben váltakozó elektromos feszültséget indukál.

Példaként tekintsük az $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ momentumú SDP mágnes, amelynek szögparamétereit a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekben az 1. táblázat tartalmazza.

$\omega = 500 \text{ 1/s}$ mellett, egymással elektromosan szembe kapcsolt (anti-Helmholtz kapcsolás) tekercsek esetén a kimeneti feszültségek az 1. ábra szerint alakulnak.

Noha az ábrákon a feszültség görbék monokromatikus 2ω frekvenciájú szinuszhullámoknak látszanak, a harmonikus analízis szerint egy domináns 2ω frekvenciájú (a) és egy sokkal kisebb 4ω frekvenciájú (b) szinuszhullámból állnak, amelyek amplitúdóit (A) és fázisait (La) a 2. táblázat mutatja be a három egymás utáni mérési helyzetre (j felső index).

2. táblázat Az $m_4 = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Am}^5$ momentumú SDP mágnes (1. 1. táblázat) által indukált, váltakozó feszültség 2ω (a) és 4ω (b) frekvenciájú összetevőinek amplitúdói (A) és fázisszögei (La) µV-ban, ill. °-ban

Table 2 According to harmonic analysis the output voltages shown in Fig. 1 are composed by two sinusoidal components of frequency 2ω (a) and 4ω (b), where ω is the angular velocity of rotation of the magnet. The respective amplitudes (A) and phase angles (La) are shown for all three measurement positions

(a)	$A_2^{(j)}$ (µV)	$La_2^{(j)}$ (°)
	3832,78	139,33
(b)	$A_4^{(j)}$ (µV)	$La_4^{(j)}$ (°)
	15055,66	234,52
	9017,61	-0,72
	113,311	-82,18
	258,046	-24,57
	341,52	54,57

Valóban, a 2ω frekvenciájú harmonikus itt egy-két nagyságrenddel erősebb, mint a 4ω frekvenciájú komponens és látható még, hogy a $La_4^{(j)}$ fázisszögek egyenlőek a

megfelelő bemeneti fázisszögek összegével, valamint a $\text{La}_2^{(j)}$ értékek közelítőleg egyenlők a $\lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}$ értékekkel ($j = 1, 2, 3$).

Az SDP mágnes spinner magnetométeres mérése tehát 12 mérési adatot szolgáltat, hatot a 2ω és hatot a 4ω frekvencián. A mért adatok és a mágnes paraméterei között fennálló egyenletek levezetését a következő részben végezzük el.

Alapegyenletek

Az (X, Y, Z) koordináta-rendszer origójában lévő szedecimupólus (SDP) mágnes mágneses potenciálja (W_4) tömör alakban (James, 1968)

$$W_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_4 \prod_{i=1}^4 (\mathbf{u}_{4,i} \cdot \nabla) \frac{1}{R}, \quad (2)$$

ahol $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Vs/Am, m_4 a mágnes momentuma Am^5 egységben, $\mathbf{u}_{4,i}$ az i -edik tengely irányának egységvektora, R pedig a potenciálpont távolsága a kezdőponttól (méterben).

Kifejtve a

$$W_4 = 10^{-7} m_4 P_{4,klmn}, \quad (k, l, m, n = 1, 2, 3) \quad (3)$$

összeget kapjuk, amelynek tagjai egy $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ elemű mátrixba rendezhetők. A P_4 polinomok (X, Y, Z) függvényei, minden egyes $u_4(\vartheta_i, \lambda_i)$ pedig további két tényezőből áll. Az első csak ϑ_i -nek, a második pedig csak λ_i -nek a függvénye ($i = 1, 2, 3, 4$), azaz sematikusán $u_4 = Q(\vartheta_i) \cdot \Lambda(\lambda_i)$.

Mínt hogy a mérőtekercs a térváltozásnak csak az X komponensére érzékeny, a mágnes terének csak ezt a komponensét és ennek időbeli változását kell meghatározni. Így

$$B_x = -M_4 \frac{\partial P_4}{\partial X} Q \Lambda, \quad (4)$$

ahol B_x a mágneses tér X komponense, $M_4 = 10^{-7} m_4$, és

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -M_4 \frac{\partial P_4}{\partial X} Q \frac{d\Lambda}{d\lambda} \omega. \quad (5)$$

$\omega = d\lambda_i/dt$ bármely i indexre, ui. B_x időbeli változása azért következik be, mert mérésakor a mágnes ω szögsebességgel forgatjuk. Az indukált feszültség az egyik tekercs egyetlen menetében egyenlő $-(\partial B_x/\partial t)S$ -sel, ahol S a tekercs egy menetének felülete (számításainkban $S = 0,04^2 \pi \text{ m}^2$). Itt az (5) képletben $\partial P_4/\partial X$ -nek az S felületre vett átlagával számolunk. (Ennek közelítő meghatározásához S -et 221 egyenlő területű négyzetekre osztjuk, és $\partial P_4/\partial X$ értékét minden négyzet középpontjára kiszámítjuk. Ezeket összeadjuk és az összeget elosztjuk 221-gyel.) A kiszámított átlagértékek egy $P(K)$, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ elemű szimmetrikus mátrixba rendeződnek. Két ilyen mátrixunk lesz, az egyik az 1-es, $X = +2$ cm-ben, a másik a 2-es, $X = -2$ cm-ben rögzített tekercsre. Mindkét mátrix elemei azonos értékűek lesznek, de több elem előjele különbözni fog. A további számításokra csak az ellentétes előjelű elemek jöhetnek szóba, hiszen a felvevő tekercs anti-Helmholtz

kapcsolása miatt az azonos előjelűek törlődnek. A polinomokat és értékeiket ($1/\text{m}^6$) egységekből az 1-es tekercsre vonatkozóan (a 221-gyel való osztás előtt) alább soroljuk fel.

Jelölések:

$$R = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}, \quad (6)$$

$$A = -945X/R^{11}, B = 105/R^9, C = 105X/R^9, \quad (7)$$

$$D = -15/R^7, E = -15X/R^7.$$

Ezekkel

$$P(1) = AX^4 + 4BX^3 + 4CX^2 + 8DX + E = -2,023422 \cdot 10^{+13}, \quad (8.1)$$

$$P(5) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(Y^2 - X^2) - 2DX - E = -2,10995 \cdot 10^{+13} \quad (8.2)$$

$$P(9) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(Z^2 - X^2) - 2DX - E = -2,109951 \cdot 10^{+13}, \quad (8.3)$$

$$P(11) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(X^2 + Y^2) + 2DX + E = -2,884277 \cdot 10^{+11}, \quad (8.4)$$

$$P(13) = P(11), \quad (8.6)$$

$$P(21) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(X^2 + Z^2) + 2DX + E = -2,884262 \cdot 10^{+11}, \quad (8.7)$$

$$P(25) = P(21), \quad (8.8)$$

$$P(29) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(X^2 + Y^2) + 2DX + E = -2,884277 \cdot 10^{+11}, \quad (8.9)$$

$$P(31) = P(29), \quad (8.10)$$

$$P(37) = AX^2Y^2 + 2BXY^2 + C(X^2 - Y^2) + 2DX - E = 6,85547 \cdot 10^{+10}, \quad (8.11)$$

$$P(41) = AY^4 + 4CY^2 + E = 5,514606 \cdot 10^{+11}, \quad (8.12)$$

$$P(45) = AY^2Z^2 + C(Z^2 - Y^2) - E = 4,509264 \cdot 10^{+11}, \quad (8.13)$$

$$P(51) = AY^2Z^2 + C(Y^2 + Z^2) + E = 9,394649 \cdot 10^{+10}, \quad (8.14)$$

$$P(53) = P(51), \quad (8.15)$$

$$P(57) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(X^2 + Z^2) + 2DX + E = -2,884262 \cdot 10^{+11}, \quad (8.16)$$

$$P(61) = P(57), \quad (8.17)$$

$$P(69) = AY^2Z^2 + C(Y^2 + Z^2) + E = 9,394649 \cdot 10^{+10}, \quad (8.18)$$

$$P(71) = P(69), \quad (8.19)$$

$$P(73) = AX^2Z^2 + 2BZX^2 + C(X^2 - Z^2) + 2DX - E = 6,855349 \cdot 10^{+10}, \quad (8.20)$$

$$P(77) = AY^2Z^2 + C(Y^2 - Z^2) - E = 4,509268 \cdot 10^{+11}, \quad (8.21)$$

$$P(81) = AZ^4 + 4CZ^2 + E = 5,514609 \cdot 10^{+11}. \quad (8.22)$$

Az azonos sorszámú (K) $klmn$ indexek és függvények felsorolása:

K	$klmn$	$Q(\vartheta_i)$	$\Lambda(\lambda_i)$	(9)
1	1111	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.1)
5	1122	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2 \sin\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.2)
9	1133	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_2$	(9.3)
11	1212	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \sin\lambda_2 \cos\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.4)
13	1221	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.5)
21	1313	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_3$	(9.7)
25	1331	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_1 \cos\lambda_4$	(9.8)
29	2112	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \cos\lambda_2 \cos\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.9)
31	2121	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \cos\lambda_2 \sin\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.10)
37	2211	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \cos\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.11)
41	2222	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \sin\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.12)
45	2233	$\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_2$	(9.13)
51	2323	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_3$	(9.14)
53	2332	$\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_1 \sin\lambda_4$	(9.15)
57	3113	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\cos\lambda_2 \cos\lambda_3$	(9.16)
61	3131	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_2 \cos\lambda_4$	(9.17)
69	3223	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	$\sin\lambda_2 \sin\lambda_3$	(9.18)
71	3232	$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_2 \sin\lambda_4$	(9.16)
73	3311	$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\cos\lambda_3 \cos\lambda_4$	(9.20)
77	3322	$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4$	$\sin\lambda_3 \sin\lambda_4$	(9.21)
81	3333	$\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4$	1	(9.22)

$$\partial\Lambda(\lambda_i)/\partial\lambda_i \quad (10)$$

$$1 \quad -0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.1)$$

$$5 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) - \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.2)$$

$$9 \quad -\sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (10.3)$$

$$11 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.4)$$

$$13 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) - \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.5)$$

$$21 \quad -\sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (10.7)$$

$$25 \quad -\sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (10.8)$$

$$29 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.9)$$

$$31 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos(\lambda_3 + \lambda_4) - \sin(\lambda_4 - \lambda_3)\cos(\lambda_1 + \lambda_2)) \quad (10.10)$$

$$37 \quad 0,5(\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.11)$$

$$41 \quad 0,5(-\sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\sin(\lambda_3 + \lambda_4) + \cos(\lambda_4 - \lambda_3)\sin(\lambda_1 + \lambda_2)), \quad (10.12)$$

$$45 \quad \sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (10.13)$$

$$51 \quad \sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (10.14)$$

$$53 \quad \sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (10.15)$$

$$57 \quad -\sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (10.16)$$

$$61 \quad -\sin(\lambda_2 + \lambda_4), \quad (10.17)$$

$$69 \quad \sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (10.18)$$

$$71 \quad \sin(\lambda_2 + \lambda_4), \quad (10.19)$$

$$73 \quad -\sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (10.20)$$

$$77 \quad \sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (10.21)$$

$$81 \quad 0 \quad (10.22)$$

A (10) felsorolás megmutatja, hogy a tekercsek kimeneti feszültsége 4ω és 2ω frekvenciájú sinusfüggvény szerint változó komponensekből tevődik össze.

A 4ω frekvenciájú összetevő (5) alapján (az állandó szorzó és m_4 nélkül):

$$Z4 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (11)$$

ahol

$$Z4 = -P(1) + P(5) + P(11) + P(13) + P(29) + P(31) + P(37) - P(41) = -2,501887 \cdot 10^{+12} \quad (11.1)$$

A 2ω frekvenciájú összetevőnek tíz tagja van. Ezek (5) alapján (az állandó szorzó és m_4 nélkül)

$$2(-P(1) + P(5) - P(37) + P(41)) = -7,647482 \cdot 10^{+11}, \quad (12.1)$$

$$2(-P(1) - P(5) + P(37) + P(41)) = 8,3907471 \cdot 10^{+13}, \quad (12.2)$$

$$2(P(45) - P(9)) = 4,310087 \cdot 10^{+13}, \quad (12.3)$$

$$\begin{aligned} 2(P(69) - P(57)) &= 2(P(77) - P(73)) = 2(P(51) - P(21)) \\ &= 2(P(53) - P(25)) = 2(P(71) - P(61)) = 7,647454 \cdot 10^{+11} \end{aligned} \quad (12.4)$$

értékek mellett

$$Z21 = -7,647482 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.1)$$

$$Z22 = -7,647482 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.2)$$

$$Z23 = 8,3907471 \cdot 10^{+13} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4), \quad (13.3)$$

$$Z24 = 8,3907471 \cdot 10^{+13} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.4)$$

$$Z25 = 4,310087 \cdot 10^{+13} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (13.5)$$

$$Z26 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4 \sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (13.6)$$

$$Z27 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (13.7)$$

$$Z28 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \cos\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (13.8)$$

$$Z29 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (13.9)$$

$$Z210 = 7,647454 \cdot 10^{+11} \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \sin(\lambda_2 + \lambda_4). \quad (13.10)$$

A közös $K_2 = K_4$ állandó szorzó a $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ (Vs/Am), egy tekercs menetszáma = 2000, egy (kóralakú) menet S területe = $0,04^2 \cdot \pi$ m², a mágnes ω forgási szögsebessége 500 (1/s) értékek szorzata lesz, osztva a fentebb már említett 221 számmal, azaz

$$K_2 = K_4 = 2,274456 \cdot 10^{-6} \text{ (Vm/A)}. \quad (14)$$

Mint hogy mindkét komponens esetében szinuszmennyiségek összegzését kell elvégezni, az amplitúdókra és fázisszögek vonatkozó egyenletek így alakulnak:

$$A_4^{(1)} = K_4 m_4 |Z4| \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4, \quad (15)$$

$$\text{tg}(\text{La}_4^{(1)}) = \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) / \cos(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \quad (16)$$

a 4ω frekvenciájú, és

$$A_2^{(1)} = K_2 m_4 \left[\left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} S_k^{(1)} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} C_k^{(1)} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_2^{(1)}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} S_k^{(1)}}{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(1)} C_k^{(1)}} \quad (18)$$

a 2ω frekvenciájú komponens esetében. A (17) és (18) képletekben $K_{2,k}$ a (13.1)–(13.10) alatt felsorolt egyenletek jobb oldali állandói, $Q_k^{(1)}$ a ϑ_1 -ktől függő tényező. A λ_i kombinációk szinusza $S_k^{(1)}$ mint ott, illetve koszinusza $C_k^{(1)}$. A 2. táblázatban közölt szimulált mérési eredmények az (5) egyenlet alapján, a (11)–(14) képletek felhasználásával készültek az (1.1)–(1.3) képletekkel előállított bemeneti adatokkal (1. 1. táblázat).

A további egyenletek

A 4ω komponensre vonatkozó (15) és (16) formulák a j -edik ($j = 1, 2, 3$) mérési helyzetre így írhatók fel.

$$A_4^{(j)} = K_4 m_4 |Z_4| \sin \vartheta_1^{(j)} \sin \vartheta_2^{(j)} \sin \vartheta_3^{(j)} \sin \vartheta_4^{(j)}, \quad (19)$$

$$\operatorname{La}_4^{(j)} = \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)} + \lambda_3^{(j)} + \lambda_4^{(j)}. \quad (20)$$

Az (1.1)–(1.3) képletek felhasználásával

$j = 2$ -re

$$A_4^{(2)} = K_4 m_4 |Z_4| \prod_{i=1}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (21)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_4^{(2)}\right) = \frac{\operatorname{SZI}^{(2)} \operatorname{N2}^{(2)} + \operatorname{SZ2}^{(2)} \operatorname{N1}^{(2)}}{\operatorname{N1}^{(2)} \operatorname{N2}^{(2)} - \operatorname{SZ1}^{(2)} \operatorname{SZ2}^{(2)}}, \quad (22)$$

ahol

$$\operatorname{SZI}^{(2)} = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1, \quad (23.1)$$

$$\operatorname{SZ2}^{(2)} = \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3, \quad (23.2)$$

$$\operatorname{N1}^{(2)} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \quad (23.3)$$

$$\operatorname{N2}^{(2)} = \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4. \quad (23.4)$$

$j = 3$ -ra

$$A_4^{(3)} = K_4 m_4 |Z_4| \prod_{i=1}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (24)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_4^{(3)}\right) = \frac{\operatorname{SZI}^{(3)} \operatorname{N2}^{(3)} + \operatorname{SZ2}^{(3)} \operatorname{N1}^{(3)}}{\operatorname{N1}^{(3)} \operatorname{N2}^{(3)} - \operatorname{SZ1}^{(3)} \operatorname{SZ2}^{(3)}}, \quad (25)$$

ahol

$$\operatorname{SZI}^{(3)} = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2, \quad (26.1)$$

$$\operatorname{SZ2}^{(3)} = \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4, \quad (26.2)$$

$$\operatorname{N1}^{(3)} = -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \quad (26.3)$$

$$\operatorname{N2}^{(3)} = -\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4. \quad (26.4)$$

A 2ω komponensre vonatkozó (17) és (18) egyenletek általánosan, azaz ($j = 1, 2, 3$)-ra

$$A_2^{(j)} = K_2 m_4 \left[\left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

és

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{La}_2^{(j)}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)}}{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)}} \quad (28)$$

lesznek, ahol $K_{2,k}$ a (13.1)–(13.10) alatt felsorolt egyenletek jobb oldali állandói, $Q_k^{(j)}$ a $\vartheta_1^{(j)}$ -k-től függő tényező, $S_k^{(j)}$ és $C_k^{(j)}$ pedig az ott álló $\lambda_i^{(j)}$ kombinációk szinusza, illetve koszinusza.

A (27) és (28) formulák Q tényezői a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekre vonatkozóan a következők.

$j = 1$ (vö. (13.1)–(13.10))

$$Q_{1-4}^{(1)} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4, \quad (29.1)$$

$$Q_5^{(1)} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4, \quad (29.2)$$

$$Q_6^{(1)} = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4, \quad (29.3)$$

$$Q_7^{(1)} = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4, \quad (29.4)$$

$$Q_8^{(1)} = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4, \quad (29.5)$$

$$Q_9^{(1)} = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4, \quad (29.6)$$

$$Q_{10}^{(1)} = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4. \quad (29.7)$$

$j = 2$

$$Q_{1-4}^{(2)} = \prod_{i=1}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (30.1)$$

$$Q_5^{(2)} = \prod_{i=1}^2 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2} \prod_{i=3}^4 \sin \vartheta_i \cos \lambda_i, \quad (30.2)$$

$$Q_6^{(2)} = \sin \vartheta_1 \cos \lambda_1 \prod_{i=2}^3 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2} \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4, \quad (30.3)$$

$$Q_7^{(2)} = \prod_{i=1}^2 \sin \vartheta_i \cos \lambda_i \prod_{i=3}^4 [1 - \sin^2 \vartheta_i \cos^2 \lambda_i]^{1/2}, \quad (30.4)$$

$$Q_8^{(2)} = [1 - \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \lambda_1]^{1/2} \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2 \times [1 - \sin^2 \vartheta_3 \cos^2 \lambda_3]^{1/2} \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4, \quad (30.5)$$

$$Q_9^{(3)} = \left[1 - \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \lambda_1\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^3 \sin \vartheta_i \cos \lambda_i \quad (30.6)$$

$$\times \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \cos^2 \lambda_4\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$Q_{10}^{(2)} = \sin \vartheta_1 \cos \lambda_1 \left[1 - \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \lambda_2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (30.7)$$

$$\times \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3 \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \cos^2 \lambda_4\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$j = 3$

$$Q_{1-4}^{(3)} = \prod_{i=1}^4 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i\right]^{1/2}, \quad (31.1)$$

$$Q_5^{(3)} = \prod_{i=1}^2 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i\right]^{1/2} \prod_{i=3}^4 \sin \vartheta_i \sin \lambda_i, \quad (31.2)$$

$$Q_6^{(3)} = \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1 \prod_{i=2}^3 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i\right]^{1/2} \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4, \quad (31.3)$$

$$Q_7^{(3)} = \prod_{i=1}^2 \sin \vartheta_i \sin \lambda_i \prod_{i=3}^4 \left[1 - \sin^2 \vartheta_i \sin^2 \lambda_i\right]^{1/2}, \quad (31.4)$$

$$Q_8^{(3)} = \left[1 - \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \lambda_1\right]^{1/2} \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 \quad (31.5)$$

$$\times \left[1 - \sin^2 \vartheta_3 \sin^2 \lambda_3\right]^{1/2} \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4,$$

$$Q_9^{(3)} = \left[1 - \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \lambda_1\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^3 \sin \vartheta_i \sin \lambda_i \quad (31.6)$$

$$\times \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \sin^2 \lambda_4\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$Q_{10}^{(3)} = \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1 \left[1 - \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \lambda_2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (31.7)$$

$$\times \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3 \left[1 - \sin^2 \vartheta_4 \sin^2 \lambda_4\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A (27) és (28) formulák λ_i -től függő tényezői a $j = 1, 2, 3$ mérési helyzetekre vonatkozóan a következők.

$j = 1$

$$S_1^{(1)} = \sin(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.1)$$

$$C_1^{(1)} = \cos(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4),$$

$$S_2^{(1)} = \sin(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.2)$$

$$C_2^{(1)} = \cos(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4),$$

$$S_3^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4), \quad (32.3)$$

$$C_3^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4),$$

$$S_4^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.4)$$

$$C_4^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4),$$

$$S_5^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_2), \quad C_5^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (32.5)$$

$$S_6^{(1)} = \sin(\lambda_2 + \lambda_3), \quad C_6^{(1)} = \cos(\lambda_2 + \lambda_3), \quad (32.6)$$

$$S_7^{(1)} = \sin(\lambda_3 + \lambda_4), \quad C_7^{(1)} = \cos(\lambda_3 + \lambda_4), \quad (32.7)$$

$$S_8^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_3), \quad C_8^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_3), \quad (32.8)$$

$$S_9^{(1)} = \sin(\lambda_1 + \lambda_4), \quad C_9^{(1)} = \cos(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (32.9)$$

$$S_{10}^{(1)} = \sin(\lambda_2 + \lambda_4), \quad C_{10}^{(1)} = \cos(\lambda_2 + \lambda_4). \quad (32.10)$$

A következő két mérési helyzetre a fenti sin és cos függvények kifejezéséhez először az argumentumaikat kell meghatározni, amely az (1.1)–(1.3) formulák felhasználásával.

$j = 2$ -re

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) \quad (34.1)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)})\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})},$$

$$\operatorname{tg}(-\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) \quad (34.2)$$

$$= \frac{-\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)})\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)})},$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) \quad (34.3)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)})\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})},$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} - \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) \quad (34.4)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) - \operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)})\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)})},$$

ahol

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}, \quad (35.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}, \quad (35.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3}{\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4}, \quad (35.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3}{\sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4}, \quad (35.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2}{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 - \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3}, \quad (35.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \sin \lambda_1 \sin \lambda_3 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3}, \quad (35.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_1 \sin \lambda_1}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_1 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_4}, \quad (35.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_4 + \cos \vartheta_4 \sin \vartheta_2 \sin \lambda_2}{\sin \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \sin \lambda_2 \sin \lambda_4 - \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_4}, \quad (35.8)$$

$j = 3$ -ra

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.1)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(-\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{-\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.2)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) + \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}{1 - \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.3)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} - \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) - \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}{1 + \operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) \operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)})}, \end{aligned} \quad (36.4)$$

ahol

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2}, \quad (37.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) = \frac{\cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \cos \lambda_1 - \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_2}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}, \quad (37.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_3 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_3 + \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4 - \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (37.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) = \frac{\cos \vartheta_4 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3 - \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_3 \cos \vartheta_4 + \sin \vartheta_3 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (37.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3}{\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_2 \cos \lambda_3}, \quad (37.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_3}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 \cos \lambda_1 \cos \lambda_3}, \quad (37.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_1 + \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_4 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_1 \cos \lambda_4}, \quad (37.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{\sin \vartheta_2 \cos \vartheta_4 \cos \lambda_2 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_4}{\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_4 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_4 \cos \lambda_2 \cos \lambda_4}, \quad (37.8)$$

Új változók

Umow (1904) nyomán legyenek

$$x = \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_1}, \quad y = \frac{\cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_2}, \quad z = \frac{\cos \vartheta_3}{\sin \vartheta_3}, \quad \xi = \frac{\cos \vartheta_4}{\sin \vartheta_4}. \quad (38)$$

Tekintsük először a 4ω komponensre vonatkozó egyenleteket!

Emeljük négyzetre a (19), (21), (24) egyenleteket, és képezzük a

$$\left[\frac{A_4^{(2)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 \quad \text{és} \quad \left[\frac{A_4^{(3)}}{A_4^{(1)}} \right]^2$$

hányadosokat! Az új változókkal a következő két egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \left[\frac{A_4^{(2)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 &= (x^2 + \sin^2 \lambda_1)(y^2 + \sin^2 \lambda_2) \\ &\times (z^2 + \sin^2 \lambda_3)(\xi^2 + \sin^2 \lambda_4), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{A_4^{(3)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 &= (x^2 + \cos^2 \lambda_1)(y^2 + \cos^2 \lambda_2) \\ &\times (z^2 + \cos^2 \lambda_3)(\xi^2 + \cos^2 \lambda_4). \end{aligned} \quad (40)$$

A (39) és (40) egyenletekben az m_4 változó már nem szerepel.

A (22) egyenlet (azaz a $\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(2)})$ kifejezés) számlálójának első tagja az új változókkal

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= x \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - x z \xi \sin \lambda_2 \\ &+ y \sin \lambda_1 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - y z \xi \sin \lambda_1, \end{aligned} \quad (41.1)$$

második tagja

$$\begin{aligned} a_2^{(2)} &= z \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_4 - x y z \sin \lambda_4 \\ &+ \xi \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 - x y \xi \sin \lambda_3, \end{aligned} \quad (41.2)$$

míg nevezőjének első tagja

$$\begin{aligned} b_1^{(2)} &= \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z \xi \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \\ &- x y \sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + x y z \xi, \end{aligned} \quad (41.3)$$

második tagja pedig

$$\begin{aligned} b_2^{(2)} &= x z \sin \lambda_2 \sin \lambda_4 + x \xi \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \\ &+ y z \sin \lambda_1 \sin \lambda_4 + y \xi \sin \lambda_1 \sin \lambda_3, \end{aligned} \quad (41.4)$$

lesz. Így az új változókkal,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(2)}) = \frac{a_1^{(2)} + a_2^{(2)}}{b_1^{(2)} - b_2^{(2)}}. \quad (42)$$

A (25) egyenlet (azaz a $\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(3)})$ kifejezés) számlálójának első tagja az új változókkal

$$\begin{aligned} a_1^{(3)} &= y z \xi \cos \lambda_1 - y \cos \lambda_1 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4 \\ &+ x z \xi \cos \lambda_2 - x \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4, \end{aligned} \quad (43.1)$$

második tagja

$$\begin{aligned} a_2^{(3)} &= x y \xi \cos \lambda_3 - \xi \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \\ &+ x y z \cos \lambda_4 - z \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \lambda_4, \end{aligned} \quad (43.2)$$

míg nevezőjének első tagja

$$\begin{aligned} b_1^{(3)} &= x y z \xi - x y \cos \lambda_2 \cos \lambda_4 - z \xi \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \\ &+ \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \cos \lambda_4, \end{aligned} \quad (43.3)$$

második tagja pedig

$$\begin{aligned} b_2^{(3)} &= y \xi \cos \lambda_1 \cos \lambda_3 + y z \cos \lambda_1 \cos \lambda_4 \\ &+ x \xi \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 + x z \cos \lambda_2 \cos \lambda_4 \end{aligned} \quad (43.4)$$

lesz. Így, az új változókkal

$$\operatorname{tg}(\operatorname{La}_4^{(3)}) = \frac{a_1^{(3)} + a_2^{(3)}}{b_1^{(3)} - b_2^{(3)}}. \quad (44)$$

A 2ω komponensre vonatkozó egyenletek a következőképpen alakulnak. A (38) képletekkel definiált változók bevezetését a (29)–(31) alatt felsorolt Q tényezők átírásával folytatjuk.

$$\prod_{i=1}^4 \sin \vartheta_i \text{-vel való osztás után}$$

$j = 1$ -re

$$Q_1^{(1)} = Q_2^{(1)} = Q_3^{(1)} = Q_4^{(1)} = 1, \quad (45.1-4)$$

$$Q_5^{(1)} = z\zeta, \quad (45.5)$$

$$Q_6^{(1)} = x\zeta, \quad (45.6)$$

$$Q_7^{(1)} = xy, \quad (45.7)$$

$$Q_8^{(1)} = y\zeta, \quad (45.8)$$

$$Q_9^{(1)} = yz, \quad (45.9)$$

$$Q_{10}^{(1)} = xz. \quad (45.10)$$

$j = 2$ -re

$$Q_1^{(2)} = \dots = Q_4^{(2)} = \left[(x^2 + \sin^2 \lambda_1)(y^2 + \sin^2 \lambda_2) \times (z^2 + \sin^2 \lambda_3)(\xi^2 + \sin^2 \lambda_4) \right]^{1/2} \quad (46.1-4)$$

$$Q_5^{(2)} = \left[(x^2 + \sin^2 \lambda_1)(y^2 + \sin^2 \lambda_2) \right]^{1/2} \cos \lambda_3 \cos \lambda_4, \quad (46.5)$$

$$Q_6^{(2)} = \cos \lambda_1 \left[(y^2 + \sin^2 \lambda_2)(z^2 + \sin^2 \lambda_3) \right]^{1/2} \cos \lambda_4, \quad (46.6)$$

$$Q_7^{(2)} = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \left[(z^2 + \sin^2 \lambda_3)(\xi^2 + \sin^2 \lambda_4) \right]^{1/2}, \quad (46.7)$$

$$Q_8^{(2)} = \left[x^2 + \sin^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \cos \lambda_2 \left[z^2 + \sin^2 \lambda_3 \right]^{1/2} \cos \lambda_4, \quad (46.8)$$

$$Q_9^{(2)} = \left[x^2 + \sin^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \cos \lambda_2 \cos \lambda_3 \left[\xi^2 + \sin^2 \lambda_4 \right]^{1/2}, \quad (46.9)$$

$$Q_{10}^{(2)} = \cos \lambda_1 \left[y^2 + \sin^2 \lambda_2 \right]^{1/2} \cos \lambda_3 \left[\xi^2 + \sin^2 \lambda_4 \right]^{1/2}, \quad (46.10)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{(x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z \xi) + (\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)(z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z \xi) - (x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)}, \quad (49.1)$$

$$\operatorname{tg}(-\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{(y \sin \lambda_1 - x \sin \lambda_2)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z \xi) + (z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z \xi) + (x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3)}, \quad (49.2)$$

$j = 3$ -ra

$$Q_1^{(3)} = \dots = Q_4^{(3)} = \left[(x^2 + \cos^2 \lambda_1)(y^2 + \cos^2 \lambda_2) \times (z^2 + \cos^2 \lambda_3)(\xi^2 + \cos^2 \lambda_4) \right]^{1/2}, \quad (47.1-4)$$

$$Q_5^{(3)} = \left[(x^2 + \cos^2 \lambda_1)(y^2 + \cos^2 \lambda_2) \right]^{1/2} \sin \lambda_3 \sin \lambda_4, \quad (47.5)$$

$$Q_6^{(3)} = \sin \lambda_1 \left[(y^2 + \cos^2 \lambda_2)(z^2 + \cos^2 \lambda_3) \right]^{1/2} \sin \lambda_4, \quad (47.6)$$

$$Q_7^{(3)} = \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \left[(z^2 + \cos^2 \lambda_3)(\xi^2 + \cos^2 \lambda_4) \right]^{1/2}, \quad (47.7)$$

$$Q_8^{(3)} = \left[x^2 + \cos^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \sin \lambda_2 \left[z^2 + \cos^2 \lambda_3 \right]^{1/2} \sin \lambda_4, \quad (47.8)$$

$$Q_9^{(3)} = \left[x^2 + \cos^2 \lambda_1 \right]^{1/2} \sin \lambda_2 \sin \lambda_3 \left[\xi^2 + \cos^2 \lambda_4 \right]^{1/2}, \quad (47.9)$$

$$Q_{10}^{(3)} = \sin \lambda_1 \left[y^2 + \cos^2 \lambda_2 \right]^{1/2} \sin \lambda_3 \left[\xi^2 + \cos^2 \lambda_4 \right]^{1/2}. \quad (47.10)$$

A (35) egyenletekben szereplő függvények ($j = 2$) az új változókkal,

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy}, \quad (48.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} - \lambda_2^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_2 - y \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + xy}, \quad (48.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{z \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_3}{\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 - z \xi}, \quad (48.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) = \frac{z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3}{\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi}, \quad (48.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{y \sin \lambda_3 + z \sin \lambda_2}{\sin \lambda_2 \sin \lambda_3 - yz}, \quad (48.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_3^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_3 + z \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_3 - xz}, \quad (48.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{x \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \sin \lambda_4 - x \xi}, \quad (48.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{y \sin \lambda_4 + \xi \sin \lambda_2}{\sin \lambda_2 \sin \lambda_4 - y \xi}. \quad (48.8)$$

Így, a (34) alatti függvények az új változókkal a következők lesznek:

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_3^{(2)} - \lambda_4^{(2)}) = \frac{(x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) + (z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) - (x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)}, \quad (49.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} - \lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)}) = \frac{(x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) - (z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)}{(\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 - xy)(\sin \lambda_3 \sin \lambda_4 + z \xi) + (x \sin \lambda_2 + y \sin \lambda_1)(z \sin \lambda_4 - \xi \sin \lambda_3)}. \quad (49.4)$$

A (37) egyenletekben szereplő függvények ($j = 3$) az új változókkal,

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)}) = \frac{x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1}{xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2}, \quad (50.1)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)}) = \frac{-x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1}{xy + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2}, \quad (50.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3}{z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (50.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) = \frac{-z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3}{z \xi + \cos \lambda_3 \cos \lambda_4}, \quad (50.4)$$

továbbá

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{y \cos \lambda_3 + z \cos \lambda_2}{yz - \cos \lambda_2 \cos \lambda_3}, \quad (50.5)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_3^{(3)}) = \frac{x \cos \lambda_3 + z \cos \lambda_1}{xz - \cos \lambda_1 \cos \lambda_3}, \quad (50.6)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{x \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_1}{x \xi - \cos \lambda_1 \cos \lambda_4}, \quad (50.7)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_2^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{y \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_2}{y \xi - \cos \lambda_2 \cos \lambda_4}. \quad (50.8)$$

Így, a (36) alatti függvények új alakban a következők lesznek:

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} - \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{(y \cos \lambda_1 - x \cos \lambda_2)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) + (\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)(z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)}{(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) - (y \cos \lambda_1 - x \cos \lambda_2)(z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)}, \quad (51.1)$$

$$\operatorname{tg}(-\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{(x \cos \lambda_2 - y \cos \lambda_1)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) + (z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)}{(\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + xy)(z \xi - \cos \lambda_3 \cos \lambda_4) + (y \cos \lambda_1 - x \cos \lambda_2)(z \cos \lambda_4 + \xi \cos \lambda_3)}, \quad (51.2)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_3^{(3)} - \lambda_4^{(3)}) = \frac{(x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) + (\xi \cos \lambda_3 - z \cos \lambda_4)(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)}{(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) - (x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\xi \cos \lambda_3 - z \cos \lambda_4)}, \quad (51.3)$$

$$\operatorname{tg}(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} - \lambda_3^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{(x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) + (z \cos \lambda_4 - \xi \cos \lambda_3)(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)}{(xy - \cos \lambda_1 \cos \lambda_2)(\cos \lambda_3 \cos \lambda_4 + z \xi) + (x \cos \lambda_2 + y \cos \lambda_1)(\xi \cos \lambda_3 - z \cos \lambda_4)}. \quad (51.4)$$

Tekintsük ezután az új változók bevezetésének hatását a 2ω komponens amplitúdó (27) és fázis (28)függvényeire!

A j -edik amplitúdó négyzete ($j = 1, 2, 3$)

$$\left[A_2^{(j)} \right]^2 = K_2^2 m_4^2 \left\{ \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)} \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)} \right]^2 \right\}. \quad (27')$$

Ezt osztva $[A_4^{(1)}]^2$ -tel, azaz (15) négyzetével, láthatóan szintén kiküszöbölbi m_4 -et és az új változók bevezetésével alakilag a

$$\left[\frac{A_2^{(j)}}{A_4^{(1)}} \right]^2 = \frac{1}{(Z4)^2} \left\{ \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)} \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)} \right]^2 \right\} \quad (52)$$

képletre egyszerűsödik, amelyben most már a Q függvények nem a (29)–(31) hanem a (45)–(47) formulák szerint

veendők, továbbá az S és C függvények $j = 1$ esetén a (32) képletek szerinti, $j = 2$ és $j = 3$ esetben viszont a (33) azonosságok felhasználásával állítandók elő a (48)–(49), illetve az (50)–(51) formulákban foglaltak figyelembevételével. A 2ω komponens j -edik komponensének ($j = 1, 2, 3$) fázisszögére levezetett (28) egyenlet alakja:

$$\operatorname{tg}(L a_2^{(j)}) = \frac{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} S_k^{(j)}}{\sum_{k=1}^{10} K_{2,k} Q_k^{(j)} C_k^{(j)}} \quad (28), (53)$$

az új változók bevezetésével nem változik meg, azonban a Q , S és C függvények a fentiek szerint értendők.

Mérési eredmények

A fent levezetett egyenletek felhasználásával kiszámoltuk a minta mágnes (1. táblázat) spinner magnetométeres mérésének lehetséges eredményeit a bemeneti adatok sorrend-

3. táblázat Mérési eredmények a minta mágnes 4ω frekvenciájú komponensére a bemeneti (ϑ_i, λ_i) szögparaméterek tetszőleges sorrendje mellett. A zárójelbe tett $\text{La}_4^{(j)}$ értékek $(j = 1, 2, 3)$ a $\lambda_i^{(j)}$ -k pontos összegével egyenlők $(i = 1, 2, 3, 4)$. Jelölések mint a 2. táblázatban

Table 3 Measurement results for the 4ω frequency component of the sample magnet irrespective of order of the (ϑ_i, λ_i) input parameters. The values of $\text{La}_4^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ in brackets are equal to the sum of the $\lambda_i^{(j)}$ s $(i = 1, 2, 3, 4)$. Symbols are as in Table 2

$j = 1$		$j = 2$		$j = 3$	
$A_4^{(1)}$ (μV)	$\text{La}_4^{(1)}$ ($^\circ$)	$A_4^{(2)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_4^{(2)}$ ($^\circ$)	$A_4^{(3)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_4^{(3)}$ ($^\circ$)
113,311	-82,18 (-82,18)	2,277322	-24,57 (335,43)	3,014013	54,568 (54,568)

4. táblázat Mérési eredmények a minta mágnes 2ω frekvenciájú komponensére a bemeneti (ϑ_i, λ_i) szögparaméterek lehetséges sorrendjei (1.– 6. sor) mellett. Soronként a zárójelbe tett $\text{La}_2^{(j)}$ értékek $(j = 1, 2, 3)$ az első és a második helyen álló $\lambda_i^{(j)}$ -k pontos összegével egyenlők. Jelölések mint a 2. táblázatban

Table 4 Measurement results for the 2ω frequency component of the sample magnet with all possible orders of the (ϑ_i, λ_i) input parameters (rows 1– 6). In each row the values of $\text{La}_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ in brackets are equal to the sum of the $\lambda_i^{(j)}$ s being input at the first and the second place. Symbols are as in Table 2

$i = 1, 2, 3, 4$		$j = 1$		$j = 2$		$j = 3$	
		$A_2^{(1)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_2^{(1)}$ ($^\circ$)	$A_2^{(2)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_2^{(2)}$ ($^\circ$)	$A_2^{(3)}/A_4^{(1)}$	$\text{La}_2^{(3)}$ ($^\circ$)
1	1, 2, ..	33,825	139,33 (-40,79)	132,870	234,521 (234,103)	79,583	-0,717 (-0,467)
2	1, 3, ..	36,791	45,595 (45,83)	46,048	136,572 (137,616)	125,268	26,781 (26,656)
3	1, 4, ..	10,054	-61,600 (-61,52)	5,593	158,863 (162,805)	157,379	-44,841 (-44,427)
4	2, 3, ..	46,160	-20,805 (-20,66)	126,571	172,541 (172,623)	175,929	99,424 (98,995)
5	2, 4, ..	54,091	232,142 (231,99)	38,440	198,324 (197,812)	38,823	207,466 (27,912)
6	3, 4, ..	8,849	-41,838 (-41,39)	111,577	100,711 (101,325)	66,392	55,774 (55,035)

jének függvényében. A számítások a 4ω frekvenciájú komponensre a (39)–(44) egyenletek alapján, a 2ω frekvenciájú komponensre a (45)–(53) egyenletek alapján történtek (3. és 4. táblázat).

A 4. táblázatban minden soron belül még további három bemeneti sorrend lehetséges (pl. az 1. sorban 1, 2, 3, 4 mellett 1, 2, 4, 3 és 2, 1, 3, 4, illetve 2, 1, 4, 3), amelyek viszont mind az adott sorban feltüntetett eredményeket szolgáltatják. A legtöbb esetben itt is $\text{La}_2^{(j)} \approx \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}$, de a

$$\text{tg}(\text{La}_2^{(j)}) \approx \text{tg}(\lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}), \quad (j = 1, 2, 3) \quad (54)$$

mindig fennáll az elsőnek és a másodikkal bevitt λ -k összegének tangensére.

Miután az $A_4^{(1)}$ -gyel való osztással m_4 -t az egyenletekből kiküszöböltük, egy ismeretlen paraméterekkel rendelkező (SDP) mágnes spinner magnetométeres mérésével öt db mérési eredményt kaphatunk a mágnes 4ω frekvenciájú komponensére (III. Táblázat) és hatot a 2ω frekvenciájú komponensre (4. táblázat valamelyik sora). Ezek az eredmények már csak a mágnes tengelyeinek (x, λ_1) , (y, λ_2) , (z, λ_3) , (ζ, λ_4) szögparamétereitől függenek és eredményeink szerint alkalmasak lehetnek azok meghatározására.

Kiértékelés

Tizenegy mérési eredményünk van nyolc ismeretlen kiszámítására. A (39) és (40), valamint a (42), (44) és (16) egyenletek a 4ω frekvenciájú komponensre, míg az (52) és (53) alatti három-három egyenlet a 2ω frekvenciájú komponensre képviseli. Vegyük mind a tizenegy egyenlet jobb és bal oldala különbségének négyzetét, majd ezek összegét, és keressük meg a kapott kifejezést minimalizáló paramétereket! A minimum feladat megoldásához szükség van a tengelyek bemeneti sorrendjének ismeretére (vö. 4. táblázat) és egy kezdeti (nulladik) megoldásra, ami külön számítás igényel. Feltéve, hogy a minimum feladat megoldható, akkor a (x', λ_1') , (y', λ_2') , (z', λ_3') , (ζ', λ_4') minimalizáló paraméterek azonosnak vehetők a mért mágnes keresett paramétereivel. Az itt felvázolt eljárás alkalmazása a fenti egyenletek továbbszámolásával megvalósítható, de hosszadalmas, terjedelmes kifejezések kezelését igényli, ami meghaladja ennek a dolgozatnak a kereteit.

Ehelyett tekintsük a következő, egyszerűsített és kevesebb megkötést előíró feladatot!

A nyolc ismeretlen meghatározásához minimálisan nyolc független mérési eredmény (3. és 4. táblázat) és ezek

5. táblázat A közelítő számítás eredményei a minta mágnes tengelyirányainak (λ, ϑ) szögparamétereire (négy adatpár) és m_4 momentumára a harmincadik iterációs lépés után, valamint előbbieik átlaga a táblázat végén, összehasonlítva a zárójelbe tett közelítő megoldással (λ_0, ϑ_0).
Jelmagyarázat: Sorszám: utalás a 4. táblázat soraira. n az 1.–4. sorokhoz: a tabulált megoldás n -szer állt elő, vagyis minden sikeres esetben. n az 5. sorhoz: a közölt megoldás 3 kissé különböző adatok átlaga. n a 6. sorhoz: egy plusz két kissé különböző megoldás átlaga. A táblázat végén n : a sorátlagok száma, zárójelben a konvergáló megoldások száma. A továbbiak a (λ, ϑ) átlagok fokokban, k a pontossági paraméter, α_{95} (°) a konfidencia kör sugara (Fisher, 1953)

Table 5 Results of computation of the angular parameters (λ, ϑ) and moment (m_4) of the sample magnet (see text) for all possible orders of input parameters after the thirties step of iteration as well as the average of the computed angular parameters compared with the approximate solution (λ_0, ϑ_0) in brackets at the end of the Table.
Further symbols: Sorszám: row number. n for rows 1–4: number of equal solutions. n for row 5: the tabulated value is the average of three like solutions. n for row 6: the tabulated value is the average of one plus two like solutions. n at the end of the Table: number of the averages over the rows of the angular parameters and of the convergent iterations in brackets. (λ, ϑ) are the averages of each of the four pairs of angular parameters. k and α_{95} (°): Fisher (1953) statistical parameters

Sorszám	N	λ (°)	ϑ (°)	$m_4 \cdot 10^{10} \text{Am}^5$	
1	3	193,85	36,51	1,0021 (3×)	
		305,48	50,33		
		32,25	67,37		
		106,24	28,05		
2	4	192,37	37,37	1,0039 (4×)	
		305,94	51,02		
		33,22	67,36		
		106,29	27,10		
3	3	189,60	35,04	0,9463 (3×)	
		307,40	52,08		
		32,02	65,25		
		108,80	29,12		
4	3	192,25	37,23	1,0032 (3×)	
		306,04	51,06		
		33,15	67,22		
		106,38	27,22		
5	3	193,25	36,74	1,0021 (2×)	
		305,91	50,56	0,9981 (1×)	
		32,57	67,10		
		106,09	27,87		
6	3	194,35	36,79	1,0023 (2×)	
		305,29	49,92	1,0007 (1×)	
		32,51	67,52		
		105,65	27,77		
		$\lambda/(\lambda_0)$	$\vartheta/(\vartheta_0)$	k	α_{95} (°)
1 – 6	6 (19)	192,60	36,62	2573	1,30
		(192,85)	(37,10)		
		305,99	50,83		
		(306,36)	(50,72)		
		32,61	66,97	8567	0,72
		(32,98)	(66,91)		
		106,57	27,86		
		(105,63)	(27,62)		
				4389	1,01

kapcsolatát az ismeretlenekkel leíró nyolc egyenlet szükséges. Az első és második a (39) és (40), valamint a (42), (44) és (16) egyenletek a 4ω frekvenciájú komponensre, míg az (52) vagy az (53) alatti három egyenlet a 2ω frekvenciájú komponensre képviseli. Utóbbi, két tíztagú összeg hányadosának tangense, amelynek értéke viszont kevéssel tér el az elsőnek és másodiknak bevitt λ -k összegének tangensétől. Ezért – első közelítés képpen – az (53) egyenlet helyett az (egyenlőségként felírt) (54) egyenleteket sorolhatjuk a nyolc megoldandó egyenlet közé és közelítő megoldásként a bemeneti szögparamétereket tekinthetjük. A kapott nyolcismeretlenes egyenletrendszer linearizáljuk és a szukcesszív approximáció módszerével megoldjuk.

A minta mágnes összes lehetséges mérési eredményére elvégezve a számításokat (3. és 4. táblázat), helyesnek tűnő (mindig az aktuális bemeneti szögparaméterekhez közeli konvergencia) megoldásokat kaptunk 19 esetben (5. táblázat), 5 esetben viszont nem. A 4. táblázat soraira utalva sikertelenek voltak (nem konvergáltak, vagy „elúsztak”) az $1/2$, 1 , 3 , 4 , a $3/1$, 4 , 3 , 2 , a $4/3$, 2 , 1 , 4 , az $5/2$, 4 , 3 , 1 és a $6/3$, 4 , 1 , 2 bemeneti sorrenddel végzett számítások.

A fenti közelítés kétféleképpen is finomítható, ha a megoldandó nyolc egyenletben a 4ω komponensre vonatkozó egyenletek mellett, a 2ω komponens *mért* fázisait (53), illetve amplitúdóit (52) szerepeltetjük az *egyenlősített* (54) helyett.

Általában azonban nem várható, hogy azok a megszorítások, amelyeket csupán nyolc egyenlet ír elő, helyes vagy azt közelítő megoldásra vezetnek.

A tanulmány szerzője

Márton Péter

Hivatkozások

- Fisher R. A. (1953): Dispersion on a sphere. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 217. 295–305.
- James R. W. (1968): Multipole analysis: I. Theory, and geomagnetic multipoles 1965.0. Aust. J. Phys., 21, 455–464.
- Umow N. (1904): Die Construction des geomagnetischen Bildes des Gauss'schen Potentials, als Methode zur Erforschung der Gesetze des Erdmagnetismus. Terr. Magn. Atmos. Elect., 9, 105–1012.

Magnetotellurika – változók, képletek, összefüggések

KISS J.[@], ZILAHÍ-SEBESS L.

Szabályzott Tevékenységek Felügyeleti Hatósága (SZTFH), Földtani Igazgatóság,
H-1051 Budapest, Sas utca 20–22.
[@]E-mail: janos.kiss@sztfh.hu

Korábban vizsgáltuk a kőzetek mágneses tulajdonságainak hatását a magnetotellurikus mérések esetében. E vizsgálódások következményeként sokkal jobban el kellett mélyednünk az alapparaméterek és alapképletek világában, és mindezt elsősorban a gyakorlati alkalmazás miatt tettük.

A magnetotellurikus mérések során tulajdonképpen elektromos és mágneses frekvenciaszondázást végzünk, így mindazokat a paramétereket vizsgálunk, amelyek hatással lehetnek az elektromos és mágneses mérésekre. Ezek a hatások ráadásul az E/H viszony miatt eltérő módon jelennek meg a mérési eredményekben. Ebben a cikkben megpróbáljuk az alapösszefüggéseken keresztül vizsgálni a különböző fizikai paraméterek szerepét a magnetotellurika esetében, esetleg azok földtani jelentését. A vizsgálódáshoz viszont vissza kell nyúlnunk az alapirodalomhoz, amelyet olyan nevek (könyvek) fémjeleznek, mint:

- Budó Á. (Kísérleti Fizika),
- Simonyi K. (Elméleti Villamosságtan),
- Szalay B. (Fizika Kézikönyv)

vagy orosz szerzők közül:

- Javorszkij B. M., Detlaf A. A. szerzőpáros (Fizikai Zsebkönyv)
- Janovszkij B. M. (Geomágnesség)
- Moszkowitz B. (Fizikai Állandók Kézikönyve),

továbbá speciális geofizikai szakirodalmak, mint:

- Takács E. (Geofizika)
- Berdicsevszkij M. N. (Goelektromos kutatások magnetotellurikus szelvényezéssel)
- Zsdanov M. Sz. (Goelektromos Kutatás),

és a lista természetesen még tovább folytatható...

Kiss, J., Zilahi-Sebess, L.: Magnetotellurics – variables, formulas and relationships

We have previously investigated the effect of the magnetic properties of rocks on magnetotelluric measurements. As a consequence of these investigations, we had to delve much deeper into the world of basic parameters and formulas, mainly for practical applications.

In magnetotelluric measurements, we are actually doing electrical and magnetic frequency sounding, so we need to look at all the parameters that can affect the electrical and magnetic measurements. Moreover, these effects are reflected differently in the measurement results due to the E/H ratio. In this paper, we will try to investigate the role of different physical parameters in magnetotellurics, possibly their geological significance, through the basic context. In order to investigate this, however, we have to go back to the basic literature, which is marked by names (books) such as:

- Á. Budó (Experimental Physics),
- K. Simonyi (Theoretical Electricity),
- B. Szalay (Physics Handbook),

or from Russian authors:

- B. M. Javorsky, A. A. Detlaf (Physics Pocketbook)
- B. M. Janovsky (Geomagnetism)
- B. Moskowit (Handbook of Physical Constants),

and specialised geophysical literature, such as:

- E. Takács (Geophysics)
- M. N. Berdichevsky (Goelectrical research with magnetotelluric profiling)
- M. S. Zhdanov (Goelectric Research).

Beérkezett: 2024. augusztus 20.; *elfogadva:* 2024. november 2.

1. Bevezetés

A földtudományi, s azon belül a geofizika szakterületén dolgozó szakértők száma évről évre csökken. Egy-egy kolléga kiesése esetenként egy adott geofizikai módszer megszűnését is előidézhetheti, mert nincs olyan ifjú kutató, aki átvegye az adott szakterületet, vagy hiányzik a szakértelem, ami szükséges lenne a zökkenőmentes folytatáshoz.

Az elmúlt években az utánpótlás kinevelésére nem nagyon volt lehetőség (idő, pénz, kapacitás). A szakma iránti felelősség miatt azonban minden nehézség ellenére folytatni kell a munkát, akár a módszertani alapoktól.

2. Alapképletek

A magnetotellurikus klasszikus szakirodalomban gyakran találkozhatunk az elektromágneses impedancia (Z) képletének meghatározásakor a következő két képlettel, (1) és (2):

$$Z_B = \frac{E}{B}, \quad (1)$$

$$Z_H = \frac{E}{H}, \quad (2)$$

ahol

E – az elektromos térerő,

B – a mágneses indukció,

H – a mágneses térerő.

Az, hogy mindkettőt használják, arra utalhat, hogy bizonyos körülmények között mindkettő igaz. De vajon melyik az alapképlet, és melyik az egyszerűsített képlet és miért? Mire vezethető vissza, hogy kétféle képlet van?

2.1. A mértékegység

A képleteket látva, értelmező geofizikusként, először zavarba jön az ember (mert ugye nem mindegy, hogy melyiket használjuk), majd kénytelen elmélyedni a dologban.

Ehhez elő kell venni a fizikai mennyiségek mértékegységeit (1. táblázat, pl. a függvénytáblából), hátha azok segítenek.

1. táblázat Table 1	Elektromágneses mennyiségek és mértékegységeik Electromagnetic variables and their units		
	Mértékegység-rendszer		
Fizikai mennyiség	CGS	SI	Műszaki
Z (impedancia)	s/cm	$\frac{\Omega}{(\text{m}^3\text{kg})/(\text{As}^2)}$	V/A
E (elektromos térerősség)	$\text{g}^{1/2}/(\text{cm}^{1/2}\text{s})$	$(\text{mkg})/(\text{As}^3)$	V/m
B (mágneses indukció)	$\text{g}^{1/2}/(\text{cm}^{1/2}\text{s})$	$(\text{Wb})/\text{m}^2$ kg/As^2	$(\text{Vs})/\text{m}^2$
H (mágneses térerősség)	$\text{g}^{1/2}/(\text{cm}^{1/2}\text{s})$	A/m	A/m

nek. Ismert, hogy a CGS–SI váltáskor sok CGS alapképlet újabb paraméterrel egészült ki SI mértékegységben. Az egységesített SI rendszert használjuk világszerte mindenhol a modern szakirodalomban.

A táblázatból látszik, hogy a B és a H mennyiségeknek CGS rendszerben ugyanaz a mértékegysége, ezért tehát CGS rendszerben egyenrangúan használható mindkét mennyiség. Ha most megvizsgáljuk a kiindulási (1) és (2) képleteket, kiírva azokat SI rendszerben, akkor a következőket kapjuk:

$$Z_B = \frac{E}{B} = \frac{\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]}{\left[\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}\right]} = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right], \quad (3)$$

$$Z_H = \frac{E}{H} = \frac{\left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]}{\left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right]} = \left[\frac{\text{V}}{\text{A}}\right]. \quad (4)$$

A mértékegységek alapján látszik, hogy a Z_B (3) szerint egy sebesség mennyiségre vezethető vissza (hullámterjedési sebesség?), ezzel szemben a Z_H egy ellenállás (váltóáramú impedancia) mennyiség mértékegységeként jelenik meg¹⁾. Ezek alapján egyértelmű, hogy az SI rendszerben alkalmazott képlet az Z_H impedancia alapképlete (4).

A magnetotellurikában azonban használják a magnetotellurikus tenzort is. A magnetotellurikus tenzor (\mathcal{M}) az impedancia tenzor (\mathcal{Z}) és a $\mu = \mu_0$ feltételezéssel a vákuumbeli mágneses permeabilitás ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am) szorzataként áll elő, azaz

$$\mathcal{M}(\omega) = \mu_0 \mathcal{Z}(\omega). \quad (5)$$

A klasszikus fizikában ismert a kapcsolat a két mennyiség között:

$$B = \mu H. \quad (6)$$

Korábbi egydimenziós vizsgálataink alapján (Kiss et al. 2010) megmutattuk, hogyha nem vesszük figyelembe a mágneses permeabilitást, akkor nagyobb impedanciát észlelünk és ennek következtében a közeg elektromágneses hullámsebessége is megváltozik és nagyobb látszólagos rétegvastagságot fogunk kapni a kiértékelések során.

A (3) és (6) képletek alapján azonban egyértelműnek látszik, hogy a mágneses permeabilitás jelenléte a hullámterjedésre nyilvánvalóan hatással lesz.

További vizsgálataink (Kiss et al. 2020) azt mutatták, hogy az elektromos vezetőképesség és a mágneses permeabilitás eltérő módon hat a látszólagos fajlagos ellenállásra és a hullámterjedési sebességre. A Z_B és a Z_H különbsége talán éppen erre mutat rá:

$$Z_H = \mu Z_B. \quad (7)$$

Ha CGS rendszerben vagyunk, és a közeg nem mágneses, azaz $\mu_r = 1$, akkor a mágneses indukció és a mágneses térerő egyenlő.

$$B = \mu_r H = H \quad (\text{ha } \mu_r = 1, \text{ CGS rendszerben}). \quad (8)$$

Ha viszont SI rendszerben vagyunk, akkor a képlet helyesen a következő lesz, s ekkor a $B \neq H$, nem mágneses közegben az egyenlet:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 H \quad (\text{ha } \mu_r = 1, \text{ SI rendszerben}) \quad (9)$$

Ha viszont a közeg mágneses, és $\mu_r > 1$, akkor

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad (\mu_r > 1, \text{ SI rendszerben}), \quad (10)$$

$$\mu_r = 1 + \kappa \quad \text{és} \quad \mu = \mu_0 \mu_r,$$

ahol

μ_r – a relatív mágneses permeabilitás,

κ – a mágneses szuszceptibilitás.

2.2. A mérőrendszer

A magnetotellurikus mérések esetében egy másik megközelítést is alkalmazhatunk, ami a mágneses tér mérésére alkalmazott mérőrendszerből indul ki:

„A mágneses térerősség (H) mérését az áramerősség és a távolság mérésére vezethetjük vissza. Olyan szolenoidot alkalmazunk, amelynek a hosszúsága jóval nagyobb, mint az átmérője. Ezt mágneses térben elhelyezve, s változtatva a tekercsben folyó áramerősséget kikompenzálhatjuk a mágneses teret (értéke nulla lesz a tekercsben). Az áramerősség és a tekercs hossza megadja a mágneses tér erősségét” (Simonyi 1967).

A magnetotellurikus méréseknél olyan mágneses érzékelőt (szolenoidot) alkalmazunk, amelynek a hosszúsága jóval nagyobb, mint az átmérője. Ezzel az induktív mérőrendszerrel tehát a H mágneses térerőt mérjük, az elektródákkal, a konduktív mérőrendszerrel pedig, az elektromos E térerőt, és a kettő hányadosából származtatott mennyiség (4) ennek megfelelően az elektromágneses impedancia lesz.

3. Elektromágneses és geomágneses tér

Magnetotellurikában a mért elektromágneses teret (H és E) több tényező is befolyásolja. Az első és talán legfontosabb a közeg elektromos tulajdonsága (vezetőképessége, dielektromos állandója és polarizálhatósága) amely közvetlenül az E komponensre van hatással, de közvetve a H komponensre is befolyásolja. A másik tényező a közeg mágneses tulajdonsága (indukált és remanens mágnesezettség), amely az esetek többségében (üledékes környezetben) elhanyagolható mértékű, ha viszont érzékelhető mértékben van jelen, akkor módosíthatja a mérési eredményeket. Ez azért jelent kihívást, mert a mágneses hatást több tényező határozza meg (az adott mérési pont normál mágneses tere, a közeg mágneses szuszceptibilitása, a közeg remanens mágnesezettségének nagysága és a remanens és indukáló tér által meghatározott eredő mágneses tér iránya és amplitúdója).

Meg kell említeni még egy dolgot, a magnetotellurikus módszer „adó oldala” a Nap, illetve a naptevékenység, míg a mágneses tér kialakulásáért a földi mágneses tér és a közetek mágneses szuszceptibilitása (indukált mágnesezettség esetén) a felelős. Természetesen a földtani folyamatok (összetétel, nyomás, hőmérséklet, kristálytani fázisátalakítások) hatására kialakult archív geomágneses (többek közt paleomágneses) térrel kapcsolatos remanens mágnesezettség is jelen van, ami egyes esetekben nagyságrendekkel erősebb, mint az indukált mágnesezettség. Mindegyik forrástér kölcsönhatásban van a másikkal, mindegyik tér irányított vektortér (vektorral jellemezhető) és többnyire számunkra ismeretlen paraméterekkel rendelkezik.

Továbbiakban megpróbáljuk kibontani az elektromágneses tér alapképleteit, és megvizsgáljuk, hogy hogyan jelentkeznek ezek a fizikai paraméterek a magnetotellurikus mérésekben.

3.1. Az alapképlet

Érdeemes tehát az alapképleteket tovább boncolgatni. A B , H , M és J kapcsolatáról Simonyi (1967), Budó (1979), Moskowitz (1995) vagy Takács (1968) alapján a következő állapítható meg:

$$B = \mu H + J_E, \quad (11)$$

$$M = J_E V, \quad (12)$$

ahol

B – a mágneses indukció,

H – a mágneses térerősség,

μ – a közeg mágneses permeabilitása

J_E – az eredő mágnesezettség²⁾,

M – a mágneses momentum³⁾,

V – a térfogat.

2. táblázat | Mágneses mennyiségek és mértékegységeik

Table 2 | Magnetic variables and their units

Fizikai mennyiség	Mértékegység-rendszer	
	CGS	SI
Mágneses momentum (M)		Am ²
Mágnesezettség (J)		A/m
Mágneses térerősség (H)	g ^{1/2} /(cm ^{1/2} s)	A/m

3.2. A kibővített képletek

A (11) képlet, noha általános törvényszerűségként szerepel, a valóság leegyszerűsítése. Kibontva a fenti egyenlet-hez és a következő összefüggésekhez jutunk:

$$B_E = \mu_0 \mu_r H + J_E, \quad (13)$$

$$J_E = (J_I + J_R), \quad (14)$$

$$J_I = \kappa H_{GI}, \quad (15)$$

$$J_R = \kappa H_{GR} = \kappa_R H_{GI}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} B_E &= \mu_0 \mu_r H_{EM} + \kappa H_{GI} + \kappa H_{GR} \\ &= \mu_0 \mu_r H_{EM} + (\kappa + \kappa_R) H_{GI} \\ &= \mu_0 \mu_r H_{EM} + \kappa_L H_{GI}, \end{aligned} \quad (17)$$

ahol

B_E – az eredő mágneses indukció (EM tér),
 H_{EM} – a külső mágneses tér (EM tér),
 J_E – az eredő mágnesezettség (GM tér),
 J_I – az indukált mágnesezettség (GM tér),
 J_R – a remanens mágnesezettség (GM tér),
 κ – a mágneses szuszceptibilitás,
 κ_R – a remanens mágneses szuszceptibilitás,
 κ_L – a látszólagos mágneses szuszceptibilitás,
 H_{GI} – a Föld indukáló mágneses tere (GM tér) a mérés idején,
 H_{GR} – a Föld archív (ismeretlen) mágneses tere (GM tér) a kőzet képződése idején,
 μ_0 – a vákuum mágneses permeabilitása,
 μ_r – a relatív mágneses permeabilitás.

A fenti felsorolásban a remanens mágnesezettséget csak a J_r formában érzékeljük, nem tudjuk külön-külön a κ_R és a H_{GR} értékét, miközben az indukált mágnesezettség (J_I) is csak az indukáló mágneses térerő, azaz H_{GI} paraméterével ismert, de az esetek többségében, a κ értéke számunkra ismeretlen. Az eredő mágnesezettség képletéből (14) levezethető egy látszólagos szuszceptibilitás érték (Takács 1977):

$$\kappa_L = \kappa + \frac{J_R}{H_{GI}} = \kappa + \kappa_R. \quad (18)$$

Nagy Königsberger-arány esetén a látszólagos mágneses szuszceptibilitás akár nagyságrendekkel megnövelheti a relatív mágneses permeabilitás értékét. Ez viszont jelentősen megbonyolítja a magnetotellurikus összefüggéseket.

Az is kérdés persze, hogy a H_{EM} és a H_{GI} milyen viszonyban vannak egymással, van-e kapcsolat, kölcsönhatás közöttük?

4. A mágneses paraméter a magnetotellurikában

A mágneses indukció tehát valós körülmények között 4 mágneses ismeretlen paramétert fog tartalmazni (κ , H_{EM} , J_I , J_R), s amit mérünk, a három térerőösszetevőnek (H_{EM} , J_I , J_R) az eredője lesz, amit egy eredő mágneses permeabilitáson (μ_E) keresztül érzékelünk.

Mivel a magnetotellurikában a mágneses és elektromágneses tereket nem tudjuk szétválasztani a források ismeretének hiánya miatt, így a méréseink során az alapdefiníció szerint következő képlet fog érvényesülni (mágneses oldal):

$$B_E = \mu_E H_E, \quad (19)$$

ahol

B_E – az eredő mágneses indukció (EM),
 H_E – az eredő mágneses tér,
 μ_E – az eredő mágneses permeabilitás,
 κ_L – a látszólagos mágneses szuszceptibilitás,

$$\mu_E = 1 + \kappa_L. \quad (20)$$

5. Az elektromos paraméter a magnetotellurikában

Vizsgáljuk meg az elektromos oldalt is (Javorszkij és Detlaf 1974)!

$$D = \varepsilon E_E + P, \quad (21)$$

ahol

D – az elektromos indukció (EM),
 ε – a dielektromos állandó (elektromos permittivitás),
 E_E – az eredő elektromos térerősség (EM),
 P – az elektromos polarizálhatóság (EM),

$$P = \varepsilon \kappa_p E_E, \quad (22)$$

ahol

κ_p – a dielektromos szuszceptibilitás, vagy polarizálhatóság

$$D = \varepsilon (1 + \kappa_p) E_E, \quad (23)$$

$$E_E = \frac{D}{\varepsilon (1 + \kappa_p)}. \quad (24)$$

Az impedancia helyes képlete (Z_H), ha figyelembe vesszük az eredő mágneses teret és mágneses permeabilitást a következő lesz:

$$Z_H = \frac{E_E}{H_E}. \quad (25)$$

A (25) képlethez a következő megjegyzések tartoznak:

1. Az impedancia (Z_H) általános képletében az eredő elektromos térerő (E_E) és eredő mágneses térerő (H_E) értékét mérjük, amiben a földtani képződményektől függően mágnesezettség (J_E), polarizálhatóság (P) és a dielektromos állandó (ε) hatása is benne van.
2. Ismeretlen mágneses paraméterek miatt az eredő mágneses térerőt a $H_E = f(H_{EM}, J_I, J_R)$ alapján kell számolni, amiben az indukált és a remanens mágnesezettségek hatása is benne van.
3. Mivel az elektromos vezetőképesség mellett a mágneses paramétereket sem ismerjük, így a remanens mágnesezettség hatása a megnövekedett mágneses permeabilitáson (μ_E) keresztül fog megjelenni (ez azért fontos, mert a Königsberger-arányból adódó szorzó a relatív mágneses permeabilitást fogja megnövelni, mivel csak az indukáló mágneses normál térrel tudunk számolni). Ez a hatás legerősebben a mágneses és nem mágneses közegek közötti határfelületeken fog jelent-

kezni (Kiss et al. 2020, Kiss, Prácsr 2021, Kiss et al. 2023B)

4. A magnetotellurikus mérésre a közeg dielektromos állandója és polarizálhatósága is hatással van (24) alapján, ez elsősorban a határfelületeken fog megjelenni (Kiss et al. 2020).

Mindezek alapján felvetődik a kérdés, hogy szabad-e az önálló magnetotellurikus méréseket mennyiségi kiértékelésre használni olyan területeken, ahol a mágneses, a dielektromos vagy a polarizálhatóság paraméterben drasztikus változások feltételezhetők (lásd Kiss et al. 2011)?

Ilyenkor – a fentiek alapján – csak a mágneses, gravitációs és szeizmikus mérési adatok együttes, komplex feldolgozásától és értelmezésétől várható valós eredmény.

6. A mért közeg eredő fajlagos ellenállása, fázisa

Kiss et al. (2020) már felvetette – a nyugati erőter-geofizikai szakirodalomból kiindulva – az analitikus jelnek definiált mennyiséget (más néven forbeniusi vagy euklideszi norma) a közeg eredő fajlagos ellenállásának mérőszáma-ként használni, amelyet a különböző polarizációk alapján meghatározott ellenállásértékekből számíthatunk ki. Korábban a közeg általános jellemzésére a mértani (effektív), vagy a számtani közepet (elvi) használták. Abban az esetben, ha az egyik polarizációban mért fajlagos ellenállás nullához közelített, az a mértani közép esetén lenullázta, a számtani közép esetén megfelezte a közeg ellenállását. De hogyan lehet egy közegnek az eredő fajlagos ellenállása kisebb, mint a bármelyik polarizációban kapott fajlagos ellenállás értéke?

A magnetotellurikus mérések során megkapjuk a látszólagos fajlagos ellenállásnak az amplitúdóját két egymásra merőleges irányban. Az ilyen mennyiségeket, amelyeknek iránya és nagysága van, vektornak nevezzük. Az ortogonális vektorok összeadása pedig nem más, mint a korábban említett analitikus jel képzése. Az E - és H -polarizációban kapott látszólagos fajlagosellenállás-értékekből tehát a vektorösszeadás szabályai szerint kell képezni a közegnek az eredő ellenállását!

Ebben az esetben a mágneses testek hatása is látszólagos fajlagosellenállás-növekedésként meg fog jelenni a klasszikus számítási eljárások szerint, ahogy ezt korábban (Kiss et al, 2020) már leírtuk.

A fázis már nem a közeg jellemzője, hanem a valós és képzetes EM paraméter iránybeli eltérése, azaz a fázis esetén mindig érdemes külön vizsgálni az E - és H -polarizációs esetet, és egészében a fázis számtani középértékével jellemezni a közeget.

A fő égtájak irányában mért látszólagos fajlagos ellenállás és az impedanciafázis paraméter a magnetotellurikus mérések fő paraméterei, amelyek minden hatást tartalmaznak. Ha inverzióval a közeg fajlagos ellenállását határozzuk meg, akkor fennáll a veszély, hogy egy több változós tér-

paramétert egyetlen változóval (a közeg vezetőképességével) akarunk kifejezni, miközben a többi változóval (mágneses permeabilitás, polarizálhatóság, dielektromos állandó) nincsenek pontos információink. Ebből adódóan a látszólagos fajlagosellenállás- és fázisparaméterek objektív mérési paramétereknek tekinthetők, míg az inverzió emiatt már lehet, hogy szubjektív. Ez pedig azt jelenti, hogy a gyakorlatban kialakult szokás helyett (mármint hogy csak a kétdimenziós inverzióból kapott fajlagosellenállás-szelvényt jelenítjük meg), mindkét irányban mért látszólagos fajlagosellenállás- és fázisparamétereket elsődlegesen dokumentálni kell! Ez rögtön jelzi a közeg jellegét (egydimenziós vagy kétdimenziós) és az irány-anizotrópia mértékét is. Erre korábbi cikkünkben (Kiss, Szebenyi 2023) mutattunk is példákat.

7. Földtani szempontok

Az üledékes kőzetek esetében az elektromos tér anizotrópiája a rétegzettség miatt adott a leülepedéstől fogva, és a remanens mágnesezettség iránya is a leülepedéssel egyidejűleg, ugyanabban a folyamatban jön létre. Az üledékes kőzetek remanens mágnesezettségének iránya az ülepedéskori archív földmágneses tér irányához igazodik. De az üledékes kőzetek remanens mágnesezettsége jelentéktelen, ezért nem követünk el nagy hibát, ha az impedanciát E/H -nak vesszük.

Ettől eltérő az alaphegységi kőzetek elektromos és mágneses anizotrópiájának egymáshoz való viszonya. Az alaphegységi kőzeteknél csak a remanens mágnesség létrejöttének iránya köthető az elsődleges kőzetek keletkezéséhez, az indukált mágnesezettség már a kőzet mágneses szuszceptibilitásának függvénye. Mivel a kristályos aljzat kőzetei alapvetően szigetelők, az elektromos vezetőképességüket és azok anizotrópiáját utólagos mechanikai és kémiai elváltozások (metamorfózis), illetve utólagos betelepülések alakítják ki, miközben az üde, bontatlan kőzet remanens mágnesezettségi iránya őrzi a keletkezés kori földmágneses tér irányát.

Az elektromos vezetőképességet másodlagos bontottsági zónák alakítják ki. Ezek általában kétdimenziós szerkezetek, többnyire tektonikai zónák. Megjelenhetnek mágneses testek is, amennyiben ezek bázikus vulkáni kőzetekből álló dajkok vagy a tektonikai hatásra átalakult, például kloritosodott kőzetek. Ha ezek dajkok, a mágneses polarizációjuk nagy valószínűséggel a dajk keletkezés kori mágneses tér irányát őrzi, amelytől biztosan különbözik a befogadó kőzet remanens mágnesezettségi iránya (mert az idősebb, mint az őt áttörő dajk) és az elektromos vezetőképesség-anizotrópiája. A mágnesezhető anyagú dajk azonban hidrotermális hatásra elveszítheti a mágnesezettségét (Kiss et al. 2011), miközben éppen a mállás hatására az elektromos vezetőképessége megnő (például a Pázmánd–2 fúrás dioritja esetében a hidrotermálisan elváltozott szakasz mágnesezhetősége két nagyságrendet csökkent).

8. Konklúzió

A magnetotellurikus mérési eredményekben különböző fizikai paraméterek, erőterek hatása szuperponálódik, amit a terepi mérések során természetes forrású frekvenciaszondázással vizsgálunk. Az elsődleges mérési paraméterek a különböző frekvenciákon előálló látszólagos fajlagos ellenállás-érték, az impedanciatenzor fázisparamétere és az elektromágneses hullám sebessége (amellyel keveset foglalkozunk, pedig hasznos paraméter lenne, mert a mért paraméterek változása nem egyformán jelentkezik e paraméterek esetében). Ezek a mért vagy az ezekből számított mennyiségek az összes hatást tartalmazzák, amelyet a kiértékelő geofizikusnak kellene szétválasztania, ami nem egy egyszerű feladat!

Az inverzió során a kiértékelést egyetlen paraméter – a közeg vezetőképessége vagy fajlagos ellenállása – vezetjük vissza, amivel kiejtjük a többi paraméter okozta változások lehetséges hatását. A többparaméteres inverzióhoz apriori háttérinformációkra lenne szükségünk, de a földtani közeg ismeretlensége, paramétereinek változékonysága miatt ezt közvetlenül nem tudjuk megtenni. Van azonban egy közvetett út is, ahol a magnetotellurikus mérési adatokat és a többi geofizikai mérési adatot egyszerre vizsgáljuk, azaz komplex szelvény menti geofizikai adatfeldolgozást végzünk a gravitációs, mágneses és szeizmikus mérési adatok segítségével (Kiss et al. 2023A, Kiss, Szabenyi 2023). Ez lehetőséget ad a szerkezeti mozgások, a másodlagos hatások, elváltozások és a magmás tevékenységek figyelembevételére.

A tanulmány szerzői

Kiss János, Zilahi-Sebess László

Jegyzetek

¹⁾ Az impedancia (Z) értéke:

$$Z_{xy} = \frac{E_x(\omega)}{H_y(\omega)} = \frac{\omega\mu}{|\gamma|} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}},$$

A fázissebesség (v) értéke:

$$v = \frac{\omega}{\text{Re}\gamma} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma}}.$$

A mágneses permeabilitás hatása eltérően fog jelentkezni az impedancia és a hullámsebesség esetében (Kiss et al. 2010)!

- ²⁾ *Mágnesezettség*: térfogategységre eső elemi mágneses momentum (Janovszkij, 1978)
- ³⁾ *Mágneses momentum*: adott testben az elemi mágneses momentumok vektorösszege (Janovszkij, 1978)

Hivatkozások

- Berdicsevszkij M. N. (1968): Geoelektromos kutatások magnetotellurikus szelvényezéssel. Nyedra Kiadó, Moszkva, p. 255.
- Budó Á. (1979): Kisérleti fizika II. kötet, Tankönyvkiadó, Budapest, p. 395.
- Janovszkij B. M. (1978): Geomágnesség. Leningrádi Tudomány Egyetemi Kiadója, Leningrád, p. 592.
- Javorszkij B. M., Detlaf A. A. (1974): Fizikai zsebkönyv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, p. 1085.
- Kiss J., Prácser E. (2021): Kétdimenziós magnetotellurikus modellezés – irányanizotrópiából származó hatások vizsgálata. Magyar Geofizika, 62/1, 43–60.
- Kiss J., Cserkész-Nagy Á., Lőrincz K., Rádi K. (2023A): A Nyír-ség mélyföldtani értelmezése lokális vulkán morfológia a geofizikai mérések alapján. Magyar Geofizika, 64/3, 131–155.
- Kiss J., Prácser E., Szarka L. (2023B): Mágneses torzulások a magnetotellurikában – A klasszikus MT feldolgozási eljárások várható torzulásai mágneses közeg megjelenése esetén, 2D direkt modellezés eredményei extrém nagy mágneses permeabilitás esetén. Magyar Geofizika, 64/1, 43–57.
- Kiss J., Prácser E., Szarka L., Ádám A. (2010): Mágneses fázisátalakulás és a magnetotellurika. Magyar Geofizika, 51/2, 73–87.
- Kiss J., Szabenyi R. M. (2023): Dunántúli MTOA-01 alapszelvény (CEL07 litoszférakutató szeizmikus tomográfia szelvény mentén). Magyar Geofizika
- Kiss J., Zilahi-Sebess L., Szarka L. (2011): A mágnesség jelensége és a Hopkinson-effektus. Magyar Geofizika, 52/3, 151–169.
- Kiss J., Zilahi-Sebess L., Rádi K. (2020): MT mérési adatok nem hagyományos feldolgozása („AniMax” – anizotrópia maximumok és analitikus fajlagos ellenállás). Magyar Geofizika, 61/3, 101–122.
- Moskowitz B. (1995): Fundamental Physical Constants and Conversion Factors, Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants, AGU Reference Shelf 1, 346–355.
- Simonyi K. (1967): Elméleti Villamosság. Tankönyvkiadó, Budapest, p. 729.
- Dr. Szalay Béla (1960): Fizika (kézikönyv), Budapest, p. 830.
- Takács E. (1968): Geofizika. a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Jegyzete, Tankönyvkiadó, Budapest
- Zsdanov M. Sz. (1986): Geoelektromos kutatások. Nyedra Kiadó, Moszkva. p. 316.

Az NRHT kamratárságában üzemelő szeizmoakusztikus mérőrendszer és az abból származó eredmények bemutatása

DEÁK F.^{1,*}, BAKAI J.², SZÜCS I.³

¹Óbudai Egyetem, Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Építőmérnöki Intézet – Geotechnikai és Tartószerkezeti Tanszék, Budapest 1146, Thököly út 74.

²Geopolita Kft., 2030 Érd, Platánfa utca 59.

³Pécsi Tudományegyetem, Műszaki és Informatikai Kar, Mérnöki és Smart Technológiák Intézet, 7624 Pécs, Boszorkány u 2.

*E-mail: deak.ferenc@ybl.uni-obuda.hu

Az akusztikus emisszió (AE) vagy szeizmoakusztikus megfigyelések előnye, hogy a kőzettestben a tönkremeneteli csúcserték előtti, csúcserték és a tönkremenetel utáni (post failure) feszültségváltozások észlelésére is használható. Hasznos információkat szolgáltat a kőzettest viselkedésének jellemzésére a rideg vagy töréses tönkremenetel minden szakaszában, jóval a mérhető deformációk előtt.

Abból indulunk ki, hogy az AE-aktivitás szorosan összefügg a kőzettestben bekövetkező feszültségváltozásokkal, és az AE-események induláshoz szükséges feszültség szint a kőzettest egytengelyű nyomószilárdságához kapcsolódik (UCS). A rideg tönkremenetel ezen ismeretét felhasználhatjuk a kőzettestben lévő relatív feszültségállapot meghatározására. A kőzettestben lévő feszültségállapot és a kőzettest szilárdságának figyelembevételével egy objektív függvényt származtatunk az általánosított akusztikus emissziók kezdeti küszöbértékének segítségével.

A Bataapáti Nemzeti Radioaktív hulladék-tárolóban (NRHT) alkalmazott szeizmoakusztikus szenzorok tartalmaznak egy PI-A-3-1 típusú gyorsulásérzékelőt, amely magyar szakemberek (Geopolita Kft.) saját fejlesztésű eszköze. A széles sávú, nagy érzékenységu piezoelektromos gyorsulásérzékelő jeleit kis zajú előerősítők fogadják. Az X, Y, Z irányú gyorsulásjeleket erősítés és szűrés után egy háromcsatornás analóg összegző-átalakító fogadja.

Ez a tanulmány a Bataapáti NRHT-ban alkalmazott AE-mérések elméleti hátterét és a mért adatbázis részletes és visszamenőleges elemzését mutatja be, amely a kőzettest feszültség-alakváltozás viselkedésének leírását és a kőzettest rövid és hosszú távú szilárdságának előrejelzését teszi lehetővé.

A geotechnikai és kőzetmechanikai mérnöki tevékenységben a legtöbb háttérelmzés vizsgálat (background analysis) olyan módszereken alapul, amelyek a terepi elmozdulási adatokat használják fel. Ebben a tanulmányban a kőzettest szilárdságának vizsgálatát egy új módszer használatával mutatjuk be, amelyet a kőzettest szilárdsági paramétereinek visszaszámítására fejlesztettünk ki akusztikus emissziós (AE) megfigyelési adatokat felhasználva, véges-elemes módszerrel (FEM) és peremelemes módszerrel (BEM) végzett feszültségelemzéssel kombinálva.

A kőzettest e módszerrel meghatározott szilárdsági paraméterei jól korrelálnak a geotechnikai terepi térképezésből kapott és a terepi vizsgálati adatok alapján előre jelzett szilárdsági adatokkal. Ez arra utal, hogy az eljárás hatékonyan alkalmazható a kőzettest szilárdsági paramétereinek AE-monitoring adatokból történő visszaszámítására.

Az elmozdulásmérések, mint például az extenzométerek és a konvergenciamérők rutinszerűen használt *in situ* mérések a legtöbb alagutazás és bányászati projektben. Az elmozdulás az egyik legmegbízhatóbban mérhető mennyiség a terepen. Mivel az alakváltozások is eseménysorozat- és/vagy időfüggőek, és ezek a legkönnyebben elérhető helyszíni mérések, ennek megfelelően a legtöbb kalibrációhoz felhasználhatók konkrét vagy rendellenes alakváltozási események visszamenőleges elemzésére.

A szokatlanul nagy deformációk azonban általában a kőzettest tönkremeneteléhez kapcsolódnak a csúcserték utáni régióban. Gyakran a reziduális szilárdsági szint környékén a deformációs szabályozási intézkedések nem feltétlenül hatékonyak a nagy, rendellenes deformációk megelőzésére, ezért kulcsfontosságú az AE-monitorozás alkalmazása.

Deák, F., Bakai, J., Szűcs, I.: Presentation of the acoustic emission analysis results collected from the NRWR repository chamber's area

An advantage of acoustic emission (AE) monitoring is that it can be used to capture pre-peak, peak, and post-peak stress changes in the rock mass. It provides useful information for characterizing rock mass behaviour at all stages of fracturing, even prior to measurable deformation.

Based on the fact that AE activity is closely related to stress change in the rock mass and the stress level for AE initiation is associated with the uniaxial compressive strength of the rock mass, one can utilize this understanding of brittle failure

to determine the relative stress state in the rock mass. An objective function is derived from the consideration of stress in the rock mass and rock mass strength using the generalized AE initiation threshold.

The seismo-acoustic sensors used in the Bataapáti National Radioactive Waste Repository (NRWR) contains an acceleration sensor of type PI-A-3-1, which is a self-developed system by Hungarian specialists (Geopolita Ltd.), enabling acceleration measurement. High-bandwidth, high-sensitivity piezoelectric acceleration sensor signals are received by low-noise preamplifiers. After amplification and filtering, the X, Y, Z direction acceleration signals are received by a three-channel analog summing-converter. The summed signals are sent to the central unit via a shielded cable after the undercut filter.

This paper is presenting the theoretical background of AE measurements used in Bataapáti NRWR and a detailed back-analysis study on the measured database which provides the description of the stress-strain behaviour of rock mass and the prediction of the short- and long-term rock mass strength.

Most back-analysis in geotechnical engineering is based on methods that utilize field displacement monitoring data. In this paper, the investigation of the rock mass strength is examined using a novel method which was developed to back-calculate rock mass strength parameters from acoustic emission (AE) monitoring data in combination with finite element method (FEM) and boundary element method (BEM) stress analysis.

The rock mass strength parameters identified from this approach compare well with the strength data predicted from the geotechnical field mapping and field test data, suggesting that the procedure can be used effectively to back-calculate rock mass strength parameters from AE monitoring data.

Displacement measurements like extensometers and convergence meters are routinely conducted *in situ* measured movements. Displacement is one of the reliably measurable quantities in the field. Since deformations are also event-sequence and/or time-dependent and they are the most readily available field measurement for any kind of calibration, they can be used to back-analyze specific or abnormal deformation events. However, large abnormal deformations are usually associated with the failure of the rock mass in the post-peak region. Often, deformation control measures around the residual strength level are not necessarily effective in preventing large, abnormal deformations, so the use of AE monitoring is crucial.

Beérkezett: 2024. szeptember 22.; *elfogadva:* 2024. december 13.

1. Bevezetés

A Nemzeti Radioaktív hulladék-tároló (NRHT) akusztikus emissziós monitoring rendszerének feladata a tárolókamrákat magába foglaló kőzetkörnyezet megfigyelése. A rendszerek segítségével térben és időben követhetők a feszültségátrendeződési folyamatok, amelyek lehetővé teszik a biztonságot érintő, a kamrák állapotát veszélyeztető események megfigyelését is (Bakai, Káldi 2023, Szűcs 2016).

Az akusztikus emissziós megfigyelőrendszer 24 db állandóan telepített gyorsulásérzékelő jeleit észleli és rögzíti, amelyet 4 db 6-6 csatornás önálló egység lát el. Az egyes rendszerekhez tartozó érzékelők jeleit egy-egy 200 000 minta/sec gyorsaságú, 16 bites felbontású A/D konverter végzi el. A csatornánkénti 33 333 minta/s adatot 2 TByte-os HDD tárolják.

A szeizmoakusztikus monitoring rendszerek telepítési helyszínrajzát az 1. ábra mutatja be.

2. Az akusztikus emissziós rendszerek elméleti alapjai

A kőzettérfogat által magába foglalt inhomogén kőzetösszetétel különböző rugalmasságú és törésszilárdságú anyagokból áll. A vágatokat körülvevő kőzeteket a tektonikai folyamatok és az újabb vágatok, kamrák létrehozása követ-

kezében létrejövő, a törési szilárdságot meghaladó feszültségek összetörnek, a kialakuló litoklázis és repedésrendszer a kőzetösszetétel elemi térfogatokra bontja. A további kőzettönkremenési folyamatok során felszabaduló, egy ilyen elemi térfogatban tárolt rugalmas energia detektálása jelent egy szeizmoakusztikus impulzust. Amplitúdója arányos a kőzettönkremenés helyén vizsgálva az elemi kőzettérfogatban tárolt rugalmas energiával. A rezgés frekvenciaspektrumát a kőzet anyagi minősége és az elemi kőzetdarab geometriai mérete határozza meg (Bakai 1978).

Az észlelt impulzus amplitúdóját és frekvenciaspektrumát a hipocentrum és az észlelési hely között lévő kőzet abszorpció tulajdonságai mint arányossági tényezők szabják meg.

A 2. ábrán akusztikus emissziós impulzusok láthatók.

Mivel az inhomogén kőzetösszetételben különböző törési szilárdságú anyagok találhatók, a feszültségnövekedés hatására ezek tönkremenése különböző időpontban megy végbe. Ezért a feszültségváltozás ütemét, energiataralmát (teljesítményét), az impulzusok időegységre eső számával, a szeizmoaktivitással fejezhetjük ki. Az akusztikus emissziós aktivitás nagysága az alábbi egyszerűsített összefüggés alapján közelíthető meg:

$$S_a = \sum_0^T A^2. \quad (1)$$

A csillapítási együttható:



1. ábra | A szeizmoakusztikus monitoring rendszerek telepítési helyszínrajza
Figure 1 | Installation site map of the seismoacoustic monitoring systems

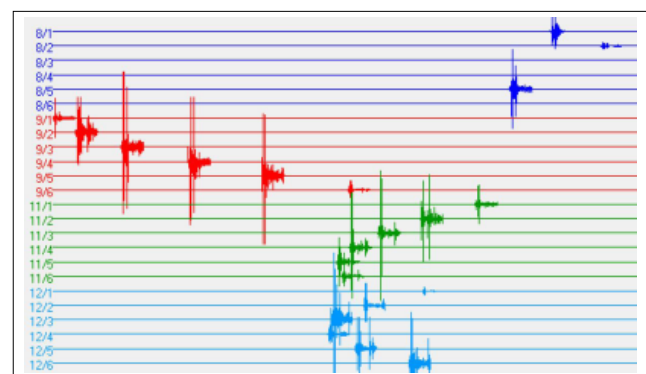
$$A = A_0 e^{-\alpha x}, \quad (2)$$

ahol

- S_a – a mikroszeizmikus aktivitás,
- A – az elemi hullámcsomag intenzitása a mérés helyén,
- A_0 – az elemi hullámcsomag intenzitása a kőzettönkremenés helyén,
- α – az elnyelési állandó,
- x – az epicentrum és a mérési hely közötti távolság.

A szeizmoakusztikai vizsgálatoknál szükség van a mikro-szeizmikus impulzus gócpontjának pontos meghatározására, amit a P hullámok első beérkezésének módszerére támaszkodva végezhetünk el. Ennek érdekében az impulzusokat több, célszerűen elhelyezett érzékelővel egyidejűleg szükséges regisztrálni. A szeizmoakusztikus impulzusokkal egy időben számunkra zavaró jelek, zajok is jelentkeznek. Ezeket a zajokat főleg a munkagépek okozzák. Célszerűen tehát úgy kell regisztrálnunk, hogy a zajokat a lehetőséghez képest a legjobban kiszűrjük. A szeizmoakusztikus impulzusok frekvenciatartománya 0-tól több száz kHz-ig terjed. Az NRHT akusztikus-emissziós rendszere csak az 500 Hz feletti tartományt vizsgálja, így csak az AE jelekből származó jeleket rögzíti.

A kőzettönkremeneteli folyamatok megfigyelésére olyan módszereket kell alkalmazni, amely egyaránt alkalmas a kőzettörések helyének és energiájának meghatározására. Az energia meghatározásának folyamatát a fentiekben ismertettük. Az AE impulzusok keletkezési helyének, azaz hipocentrumának helymeghatározásához a P hullámok első beérkezésének módszerét alkalmazzuk. Ennek érdekében az impulzusokat több, célszerűen elhelyezett érzékelővel egyidejűleg regisztráljuk.



2. ábra | Jellegzetes AE jelalakok
Figure 2 | Characteristic AE signals

Alkalmasan elhelyezett érzékelőkkel az emissziókat dektálva és azok tér- és időbeli paramétereit meghatározva lehetőség nyílik egyes feszültségátrendeződési folyamatok monitoring célú leképezésére.

Az érzékelőket a megfigyelésre kijelölt térségben az észlelési pontok számától függően úgy helyezzük el, hogy a kérdéses térfogatot magukban foglalják. Egy adott P pontban, melynek koordinátái ismeretlenek, szeizmoakusztikus impulzus pattan ki. A szeizmikus hullám homogén izotróp közegről lévén szó, gömbfelület mentén terjed. T_0 idő múlva eléri az E_1 érzékelőt. Mivel az impulzus kipattanási ideje is ismeretlen, T_0 -t sem ismerjük. Az E_2 , E_3 és E_4 észlelési pontban az E_1 -be való első beérkezés után t_2 , t_3 , t_4 idővel jut el a hullám. A további számításoknál ezekre az időkülönbségekre kell hagyatkoznunk. Az E_1 , E_2 , E_3 , E_4 érzékelők koordinátái ismertek. Az i -edik érzékelőhöz a P pontból kiinduló hullámút egyenlete így írható fel:

$$v^2(T_0 + t_i)^2 = (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2, \quad (3)$$

a csillapítási együttható, ahol

v – a longitudinális hullám sebessége,

T_0 – a jel keletkezésétől az első észlelésig eltelt idő,

x_i , y_i , z_i az i -edik érzékelő koordinátái,

t_i – az első beérkezéstől eltelt idő.

A térben táguló gömb alakú hullámút egyenlete:

$$2v^2T_0(t_i - t_j) = 2(x_i - x_j)x_0 - (y_i - y_j)y_0 - (z_i - z_j)z_0 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2 - v^2(t_i^2 - t_j^2). \quad (4)$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket!

$$t_{ij} = t_i - t_j,$$

$$x_{ij} = \frac{x_i - x_j}{v^2},$$

$$y_{ij} = \frac{y_i - y_j}{v^2},$$

$$z_{ij} = \frac{z_i - z_j}{v^2},$$

$$c_{ij} = \frac{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2}{2v^2} - \frac{t_i^2 - t_j^2}{2}.$$

Ezeket felhasználva az (1) és (2), a (2) és (3), valamint a (3) és (4) egyenleteket kivonva egymásból kapjuk:

$$\begin{bmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{23} & y_{23} & z_{23} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 t_{12} - c_{12} \\ T_0 t_{23} - c_{23} \\ T_0 t_{34} - c_{34} \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer megoldása adja a hipocentrum térbeli koordinátáit, valamint a kipattanás és az első beérkezés között eltelt időt. A hipocentrum koordinátáinak meghatározásához szükséges mátrix:

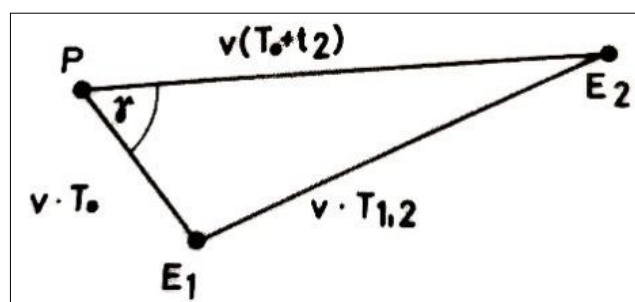
$$\begin{bmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{23} & y_{23} & z_{23} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \\ x_{45} & y_{45} & z_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{12} \\ -c_{23} \\ -c_{34} \\ -c_{45} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Tételezzük fel, hogy a beérkezések időkülönbségei közül az egyik adat valamilyen oknál fogva hamis, illetve egy vagy több csatornán egynél több impulzus jelentkezik.

Ha hat indikátornál többet használunk, kimutatható, hogy hibás adatunk van. A hat beérkezés közül ötöt hatféleképpen tudunk kiválasztani. Ha bármely beérkezés hibás, mind a hat eredményünk különböző lesz. Ezek alapján megállapítható, hogy legalább egy adatunk hibás. Ennek kiszűrésére ad lehetőséget hét érzékelő. Ebben az esetben 21-féleképpen választhatunk ki öt adatot. Így 21 eredményt kapunk, amelyekből egy hibás adat esetén hat eredményünk lesz helyes, 15 pedig téves. Természetesen nem kell minden esetben kiszámítani az összes lehetséges kombinációt. Elegendő az adatok kétféle kombinációjával számolni. Amennyiben a két eredmény egyezik – illetve az általunk megállapított hibahatáron belül van, mivel a teljes egyezés csak ideális körülmények között lehetséges –, nem szükséges tovább számolni, az eredmény helyes. Természetesen lehetséges ebben az esetben is, hogy valamelyik adatunk hibás, és csak a véletlen folytán választottunk olyan kombinációt, amelyik csak helyes adatokat tartalmaz. Ennek ellenőrzése azonban felesleges, mivel feladatunk a hipocentrum meghatározása, és ezt megoldottuk.

Amennyiben a két először számított eredmény nem egyezik meg, addig számolunk az adatok más kombinációival, amíg két egyező eredményt nem kapunk, melyeket az előzőek alapján a hipocentrum koordinátáiként fogadjunk el. Az előző gondolatmenet szerint legalább hat helyes adat birtokában, N számú érzékelőt használva $N - 6$ hibás adat szűrhető ki.

Mind ez ideig, olyan esetet tárgyaltunk, amelynél a beérkező jelek egyazon hipocentrumban és azonos időpontban keletkeztek. Vegyünk egy olyan esetet, amikor két közel azonos időben keletkezett mikroszeizmikus impulzusokat regisztrálunk! Ebben az esetben a csatornákon egymásután jelenik meg két-két jel. Amennyiben keletkezési helyük különböző volt, nem valószínű, hogy az előbb keletkezett impulzus jelenik meg minden csatornán elsőnek.



3. ábra | Szeizmikus hullámok elsőbeérkezésének számítása
Figure 3 | Calculation of the first arrival of seismic waves

A beérkezési sorrend szerint tehát a jelek nem választhatók szét. A feladat megoldásának első lépéseként az alábbi megfontolás alapján meghatározhatunk egy, az első beérkezéshez tartozó időkaput, amely megszabja azt a maximális időkülönbséget, amelyen belül az egyes csatornákon megjelenő impulzusok még összetartozhatnak.

A 3. ábra az E_1 és E_2 érzékelő helyzetét mutatja. A P pontból kiinduló szeizmikus hullám először E_1 -ben észlelhető T_0 , E_2 -nél pedig $T_0 + T_2$ idő múlva. Azt az időt, amely alatt a szeizmikus hullám az E_1 - E_2 utat megteszi, jelöljük T_{12} -vel. A PE_1E_2 háromszögre a koszinusztétel értelmében felírható:

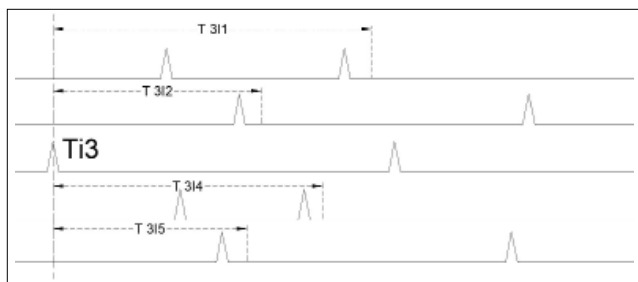
$$v^2 T_0^2 + v^2 (T_0 + t_2)^2 - 2 \cos \alpha v^2 T_0 (T_0 + t_2) = v^2 T_{12}^2,$$

ezt v -vel egyszerűsítve határozzuk meg az időkaput:

$$2T_0^2 + 2T_0 t_2 + t_2^2 - 2 \cos \alpha (T_0^2 + T_0 t_2) = T_{12}^2. \quad (6)$$

Az egyenletből kitűnik, hogy t_2 maximális értéke T_{12} lesz, amelyet $\alpha = 0$ -nál vesz fel. Tehát a maximális időkülönbség, amely egyazon szeizmoakusztikus impulzus két érzékelőn való megjelenése között eltelhet, éppen az az idő, amely alatt a szeizmikus hullám a két indikátor közötti utat megteszi. Ez az idő bármely két érzékelőre megállapítható.

A 4. ábrán öt csatornán két-két beérkezés látható. $Ti3$ a harmadik érzékelőhöz tartozó időkapukat jelenti ($i = 1-5$).



4. ábra | A szeizmikus hullámok első beérkezése számításának schematikus ábrázolása

Figure 4 | Schematic representation of the seismic waves first arrival calculation

A feldolgozás menete a következő. Az összes csatornát figyelembe véve mindig az időben legelőször megjelenő jelhez kell megkeresnünk a hozzá tartozó beérzéseket. Ezzel T_0 -ra a negatív megoldások eleve kizárhatók, valamint az időkapukat is csak pozitív irányba kell felvennünk, amivel a szóba jöhető impulzusok számát jelentősen csökkentjük. Az összetartozó beérzések kiválogatása csak ötnél több érzékelő esetén lehetséges.

3. Szeizmoakusztikus (AE) mérések értelmezésének kőzetmechanikai vonatkozásai

A feszültség alatt álló kőzetek hallható tartományba eső kisugárzásainak érzékszervi megfigyelése egyidős a bá-

nyászattal, a felszín alatti épített objektumok kialakításához szükséges térképépzéssel. A kőzetmozgást megelőző rezgésjelenségek figyelmeztethetnek – bár gyakran későn – a veszélyhelyzetre. Bizonyára nem véletlen, hogy éppen azon a területen indult leginkább fejlődésnek a jelenség kutatása, ahol a szem mint a megfigyelés legközvetlenebb eszköze nem szolgáltat elegendő információt, és előtérbe kerül – az érzékszervi rangsorban egyébként második helyre szorult – hallás. Az emberi fül felbontóképessége azonban véges, a 20 Hz – 20 kHz tartományon kívüli, illetve a hallásküszöb alatti mechanikai rezgésekre érzéketlen. Az akusztikus emisszió jelensége ennél sokkal szélesebb frekvencia- és dinamikatartományt tölt ki folyamatosan, a néhány század Hz frekvenciájú földregésektől kiindulva a MHz feletti, laboratóriumi törésvizsgálatoknál észlelhető frekvenciáig.

Mivel az észlelt frekvencia- és dinamikusávok különbözősége elsősorban a tönkremeneteli jelenség méretével, a megfigyelés távolságával, illetve az alkalmazott műszerrel van összefüggésben, az akusztikus emisszióval foglalkozó kutatások elkülönültek egymástól (szeizmológia, szeizmoakusztika, nagyfrekvenciás anyagvizsgálatok).

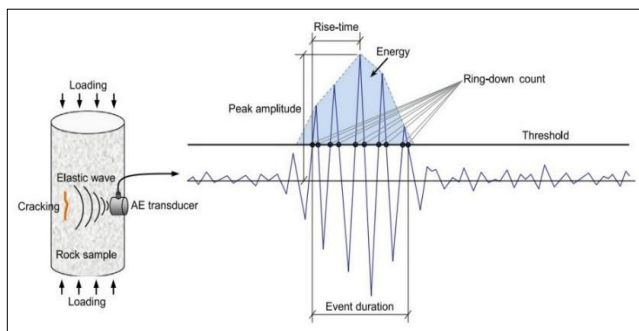
A szeizmoakusztikus (AE) emissziók kutatása több mint fél évszázados múltra tekint vissza, bebizonyítva, hogy vizsgálatuk egyedülálló lehetősége kínál a kőzetek mechanikai tulajdonságainak, deformációinak, törésének tanulmányozására.

3.1. A módszer elvi alapjai

A földalatti üregkiképzés következtében a bányatérsegek, vágatok környezetében levő kőzetekben a rétegterhelés hatására a kőzetminőségtől és a földtani szerkezettől függő, differenciált eloszlású feszültségtartományok alakulnak ki. A nyitott térségeket különböző mértékben lazult zónák, ezeket pedig nagyobb feszültségű zónák veszik körül. A megnőtt feszültség hatására az adott minőségű kőzet rugalmas tartományát meghaladó deformációk jönnek létre, így mikro- és makroméretű kőzettönkremeneteli jelenségek játszódnak le. A differenciált eloszlású feszültségek az inhomogén kőzetkörnyezetben, a különböző szilárdságú kőzetelemekben különböző időpillanatokban töréseket és elmozdulásokat okoznak, ezáltal az üreget körülvevő kőzetek kúszni kezdenek a nyomásárnyékok, általában a nyitott felszín alatti térségek irányába.

A kőzettönkremeneteli folyamatban a rugalmasság határáig igénybe vett kőzet a tárolt rugalmas energia egy részét akusztikus energia formájában a környezetének adja át, amelynek a tovaterjedő hullámjai rezgésérzékelőkkel észlelhetők és tanulmányozhatók. A rugalmassági határon túllépő kőzettönkremeneteli események hatásai is akusztikus impulzus formájában detektálhatók, így a kőzetkörnyezet szeizmoakusztikus megfigyelésével a föld alatti térség állékonyságát befolyásoló kőzettörések előtti és alatti folyamatok egyaránt leképezhetők.

A kőzettönkremeneteli folyamathoz akusztikus emissziós (AE-) impulzus tartozik. Ennek jellemzőit (frekven-



5. ábra Egy ép kőzetmintán mért AE hullámforma jellemzői (Zhao et al. 2013)

Figure 5 Characteristics of an AE waveform measured on a intact rock sample

cia és energia) a tönkremenő kőzetben előzőleg tárolt rugalmas energia, illetve a közvetítő közettartomány anyagi és szerkezeti jellemzői határozzák meg. A tovaterjedő rugalmas hullám a különböző fizikai jellemzővel rendelkező (terjedési sebességű és szerkezetű) közegben megtörik, visszaverődik, diszperziót szenved és abszorbeálódik.

Mind laboratóriumi, mind nagyobb anyagtartományok törési kísérleteinek akusztikus emissziós megfigyelésénél általános tapasztalat, hogy a vizsgálati tárgy tönkremenésig menő terhelésekor már csekély terhelés esetén megjelennek az AE-impulzusok. A feszültség növekedésével az időegységre eső impulzusok száma exponenciálisan nő, majd a törés bekövetkeztével megszűnik. Szakaszos terhelés esetén az AE-aktivitás csak onnantól jelentkezik ismét, amikor a terhelés eléri az előbbi szintet.

A felszín alatti fizikai környezetben lejátszódó minden egyes törés során nagyszámú fizikai kötés szakad fel, a teljes tönkremeneteli folyamat pedig ezen törések nagyszámú sorozata alkotja, amelyben az AE-impulzusok a rugalmas hullámok törvényszerűségein megfelelően összeadódnak. Az eredő AE-impulzusokat is az észlelési távolságtól, az összegjel energiájától és a közvetítő közeg (frekvenciaszelektív) abszorpciós tulajdonságaitól függően nagy frekvenciák (1–100 kHz) jellemzik.

Az 5. ábrán látható jellegzetesen exponenciálisan lecsengő jelalak jellemzi az AE-méréseket.

3.2. A módszer gyakorlati alapjai

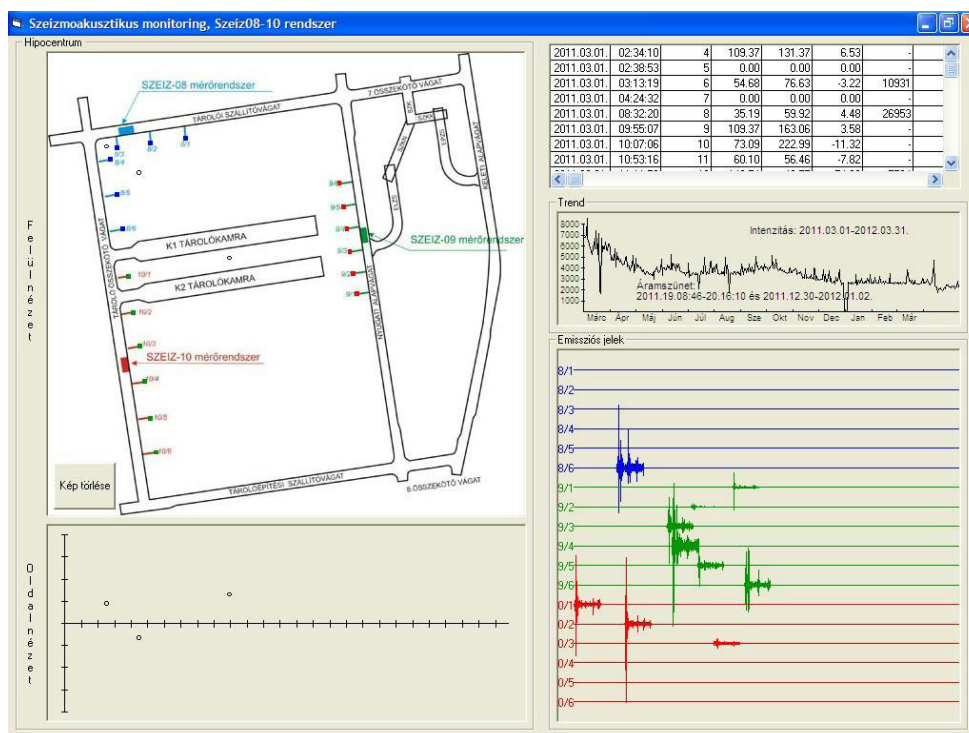
Alkalmasan elhelyezett érzékelőkkel az emissziókat detektálva és azok tér- és időbeli paramétereit meghatározva lehetőség nyílik egyes feszültségátrendező folyamatok monitoring célú leképezésére.

4. A térbeli paraméterek meghatározása

Az előző fejezetben bővebben kifejtettük ezt a témakört, ezért a jelen fejezetben eltekintünk ettől.

A régi rendszernél a következő mintavételezés volt jellemző (2011–2014-ből van nagyszámú felvételünk): A 6 csatornás adatgyűjtők összesen 100 000 Hz, azaz csatornánként 16 666 Hz mintavételi frekvenciával dolgoztunk.

A 3 mérőrendszer alkalmazásánál 1/16666 sec a két szomszédos minta közötti időkülönbség, azaz 0,06 ms.

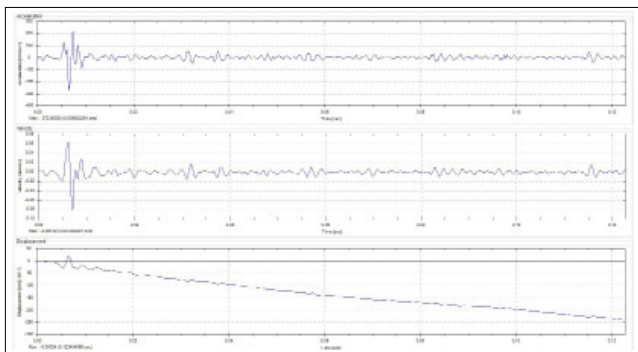


6. ábra A saját fejlesztésű szoftverben látható akusztikus emissziók megjelenítései a különböző csatornákon

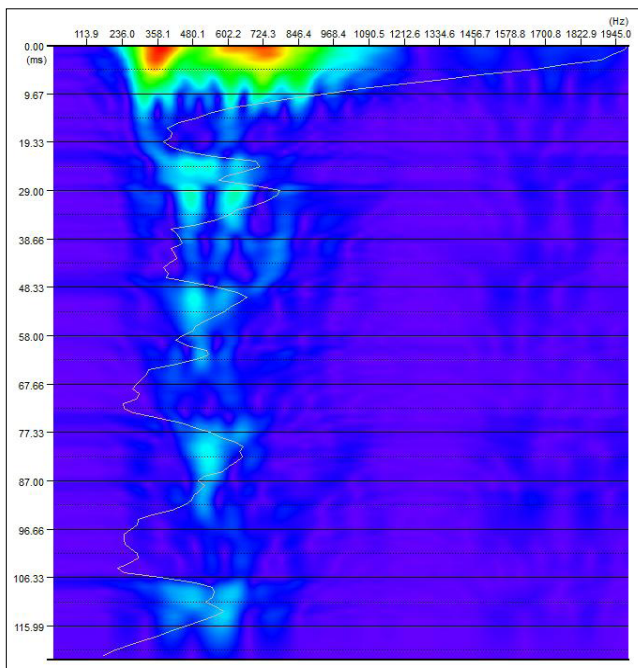
Figure 6 Displays of acoustic emissions in different channels in the self-developed software

(Ez a mintavételi frekvencia megduplázódott a jelenleg is üzemelő 4x6 csatornás új monitoring rendszerénél).

A 7. ábrán a 9/4-es csatorna felvétele látható, feldolgozva és megvizsgálva (az idősorok különböző megjelenítése által, valamint a spektrogram, melyen a fehér vonal mutatja az amplitúdó maximumának lefutását. Ezen látható, hogy a legnagyobb energiafelszabadulás 360 Hz és 730 Hz környékén történt).



7. ábra | A 9/4 csatorna egyik felvételének idősorai
Figure 7 | Time series of the channel 9/4 registration



8. ábra | A 7. ábrán bemutatott 9/4 csatorna felvételének spektrogramja
Figure 8 | Spectrogram of the channel 9/4 registration presented in Fig 7.

5. Kőzetmechanikai szempontú feldolgozások

A feldolgozás során az AE hipocentrumok lokális megjelenítését, valamint intenzitásvizsgálatát végeztük el. Ezt követően egy modern, a nemzetközi gyakorlatban is gyakran használt megjelenítési platformmal dolgoztunk (InSite Lite). Sajnos ez az ingyenesen felhasználható szoftver nem teszi lehetővé a bonyolultabb eloszlás-, illetve klaszteranalízis-vizsgálatokat.

Ezt követően megvizsgáltuk a kamratérség kőzetmechanikai viselkedését a szeizmoakusztikus tapasztalatokra hagyatkozva. Majd az ebből kapott következtetéseket összevetettük az eddig meglévő szakirodalmi, illetve helyszínspecifikus tapasztalatokkal.

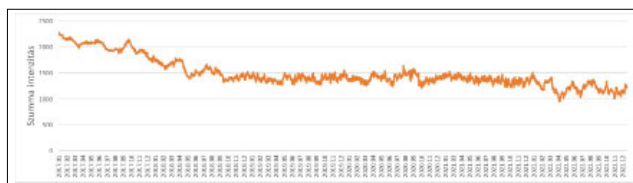
A munka során 3D-s numerikus modellezéseket végeztünk el (kapcsolt modellekkel, amelyek során a statikus viselkedés mellett vizsgáltuk a kőzettest dinamikusan terhelésekre adott válaszait is), majd saját kidolgozású eljárással kiemelten a vizsgált időszakot – de összesítve a teljes adatbázis alapján a teljes monitoring időszakot is – figyeltük és következtetéseket vontunk le a kőzettest mechanikai viselkedésével kapcsolatban a teljes tönkremeneteli határgörbét alapul véve.

5.1. Régebbi vizsgálataink eredményei

Egy régebbi elemzés során már az előző időszakok feldolgozását elvégeztük, melyek a kamratérség vizsgálatára irányultak. E munka során a következő időszakot vizsgáltuk: 2011. 3. 1. 0:06 – 2015. 12. 31. 21:54; ez összesen 19 141 AE megjelenés, mely mért magnitúdóval rendelkezett, ám a hipocentrumok térbeli meghatározása ezek közül 8 329 esetben történt meg (ennek feltétele a megfelelő számú beérkezés volt). Tehát a teljes körű vizsgálat során 8 329 AE hipocentrummal dolgoztunk az intenzitásbeli és időbeli eloszlásvizsgálatok során.

Később a numerikus peremelemes vizsgálatoknál már csak 7 402 hipocentrummal dolgoztunk. Ennek oka, hogy a teljességében kihajtott kamratérség geometriáját egyben vizsgáltuk időfüggvény nélkül, illetve a hipocentrumok térbeli meghatározásának pontatlanságából is származtatható esetleges hiba miatt, ha valamely hipocentrum a felszín alatti üregrendszer kibányászott térségébe esett, az a szűrés során törlésre került.

Először a hipocentrumvizsgálat során több variációt végeztünk időbeli és intenzitásbeli szűrésekkel. Az újabb vizsgált időszak intenzitásbeli változásokat mutatja be a 9. ábra.



9. ábra | Szumma intenzitás a vizsgált időszak során
Figure 9 | Sum intensity over the period under review

5.2. Jelenlegi vizsgálatok

A jelenlegi vizsgálat során elsősorban a kijelölt időszakot vettük figyelembe. A munkát rögtön azzal kezdtük, hogy csak azokat az adatsorokat hagytuk meg az adatbázisunkban, melyek rendelkeznek XYZ koordinátával. Ennek megfelelően a 2016. 01. 01. 2:48 – 2022. 12. 31. 20:03 időszakban 3 966 hipocentrummal dolgoztunk. Ezek közül ki-

szűrtük azokat a hipocentrumokat, melyek a kibányászott üregeken belülré estek. Ennek megfelelően az adott időszakban 1 111 hipocentrum maradt, melyeket később felhasználtunk a peremelemes numerikus vizsgálatokhoz.

Végül vizsgáltuk az összerakott teljes adatbázisunkat, melyben 12 296 olyan hipocentrum szerepel, és amelyeknek megvan az XYZ koordinátájuk. Ebből a numerikus modellezésekhez a kiszűrés után 8 510 hipocentrum maradt.

5.3. 3D-s kitörési geometria elkészítése

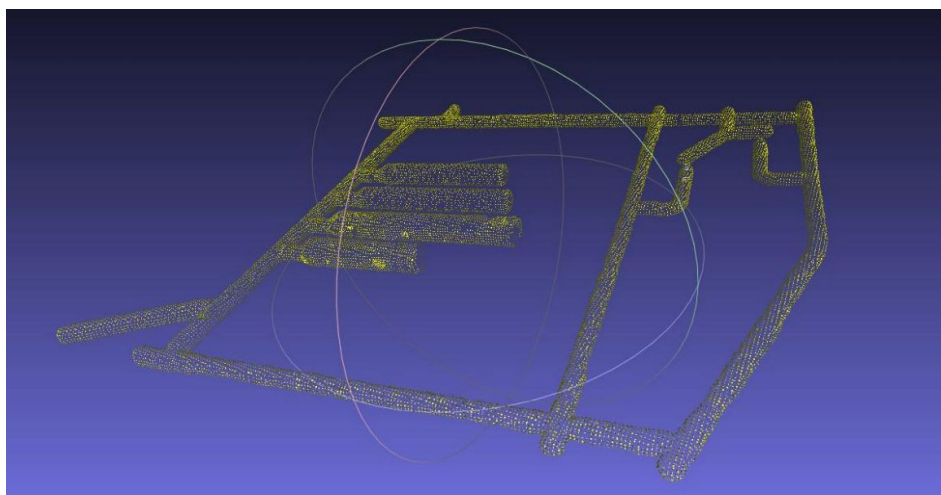
Kezdetben a Mecsekérc Zrt. Geodéziai osztályának a munkatársaival átnéztük és összeraktuk az összes bemért kitörési szelvényt. Ezt a munkát folytatva a megkapott és ellenőrzött kitörési szelvényeket zártuk (zárt vonalláncként), majd pontfelhőt és ebből geometriai zárt testet készítettünk. Ehhez a következő szoftvereket használtuk fel: AutoCad, Rhinoceros és MeshLab. Több geometria is kialakításra került, de végül több simítást alkalmazva létre-

hoztunk egy aktuálisan véglegesnek tekintett geometriát, melyet a jelenlegi munkához is felhasználtunk. Az NRHT projekt esetében is használt JMX és SMX geometriákkal szemben ennél a megoldásnál annyi előny mutatkozik, hogy a kitakarított végleges kitörési talp is a valósághoz jobban közelítve jelenik meg. A 10. és 11. ábra két munkafázist mutat be a sok közül a geometria felépítésében.

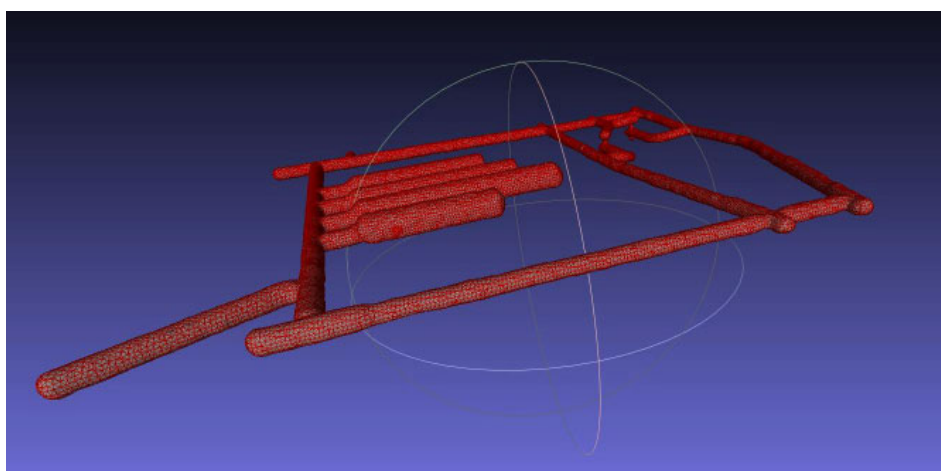
5.4. Időbeli szűrések

Az időbeli szűrésekhez, időbeli intenzitásvizsgálathoz, az emissziók intenzitásbeli megjelenítéséhez és az AE hipocentrumok 3D-s megjelenítéséhez első körben az InSite Lite megoldásait használtuk fel.

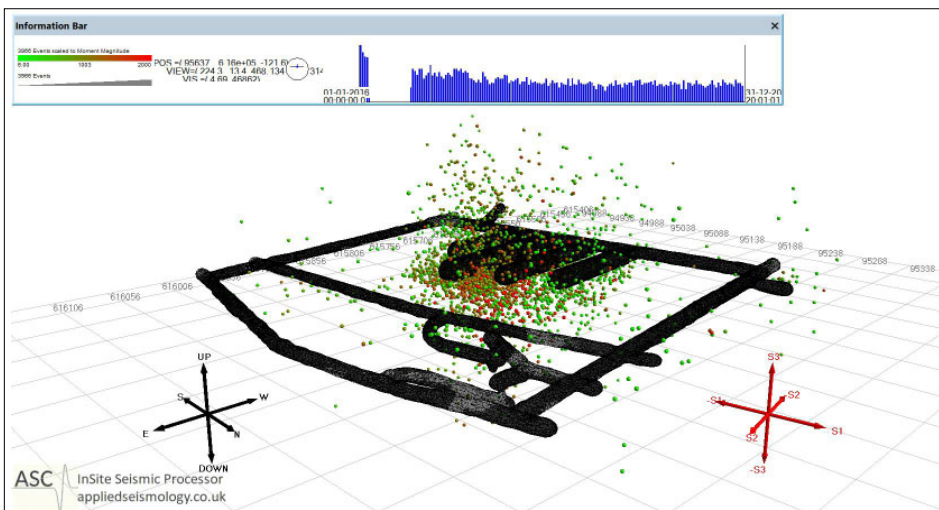
Először a kijelölt 2016–2022-es időszakot összefoglaló 12–17. ábráit mutatjuk (Moment Magnitude-ként az adatbázis azon oszlopa jelenik meg, amely az összegzett átlag amplitúdó értéket tartalmazza mm/s^2 mértékegységgel). Végül a teljes vizsgált 2011–2022-es időszak összefoglaló ábrái láthatóak alább.



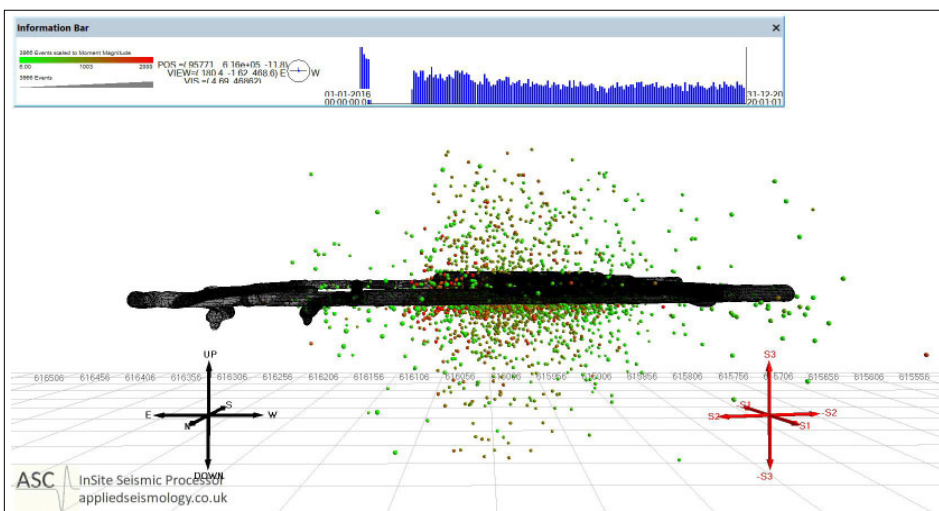
10. ábra | MeshLab pontfelhőszerkesztése
Figure 10 | Processing of the point cloud in MeshLab



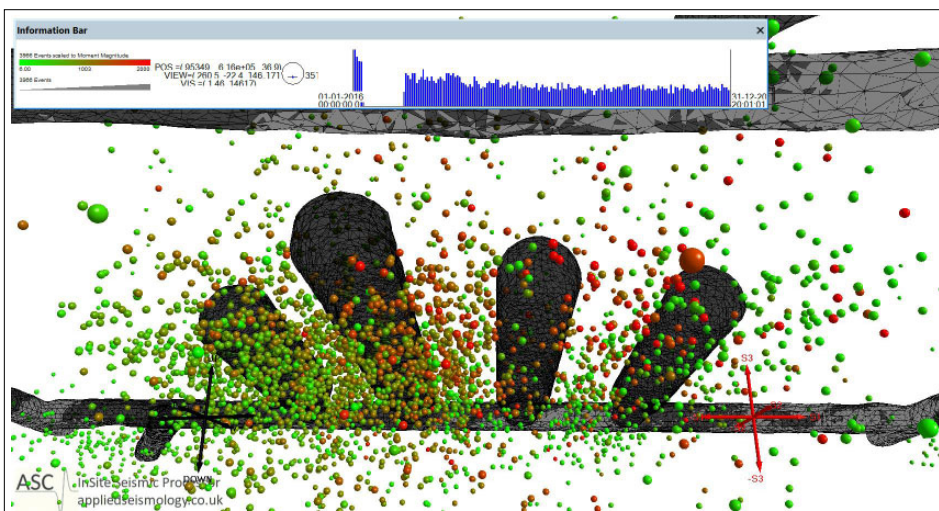
11. ábra | MeshLab véglegesített háló- és testmodell
Figure 11 | The finalized mesh and solid body model in MeshLab



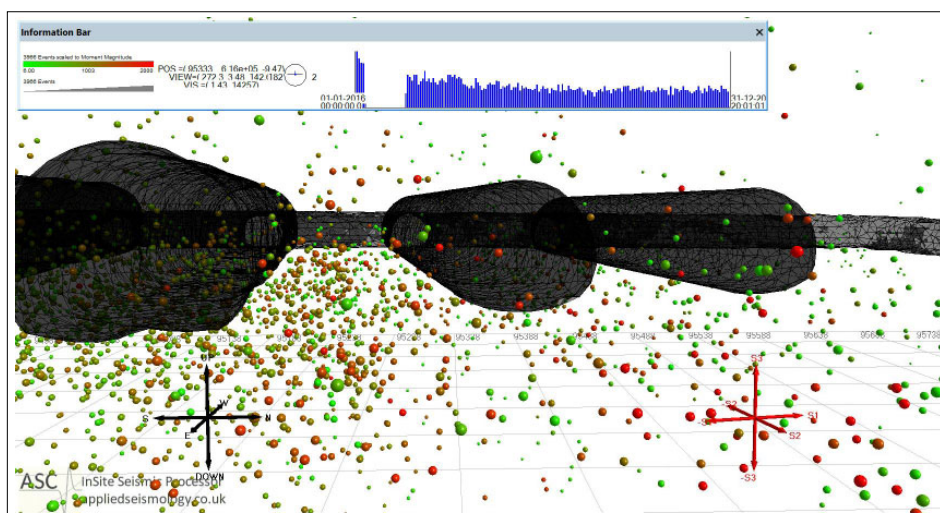
12. ábra | AE hipocentrumok megjelenítése ÉK-i irányból, fentről nézve – 2016–2022 időszak
 Figure 12 | Appearance of AE hypocentres from the NE, seen from above – period 2016–2022



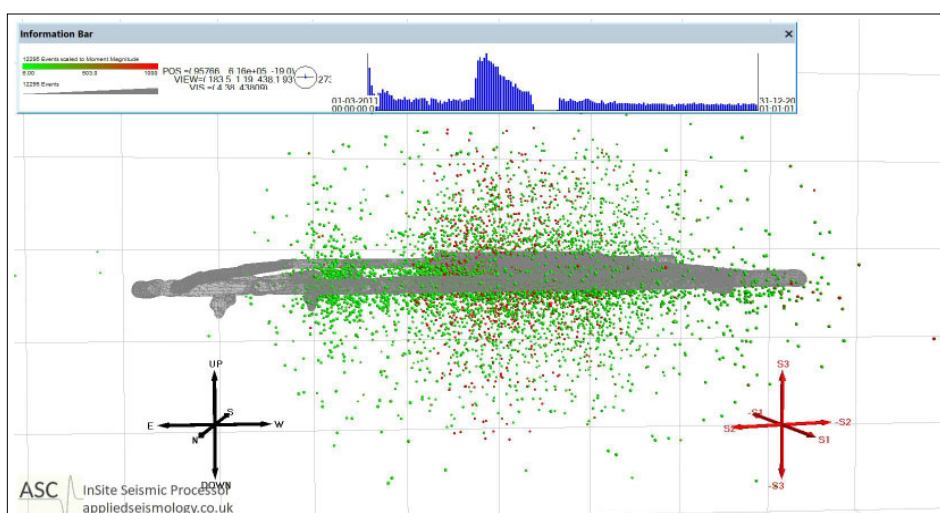
13. ábra | AE hipocentrumok megjelenítése É-i irányból nézve – 2016–2022 időszak
 Figure 13 | Appearance of AE hypocentres, viewpoint from N – period 2016–2022



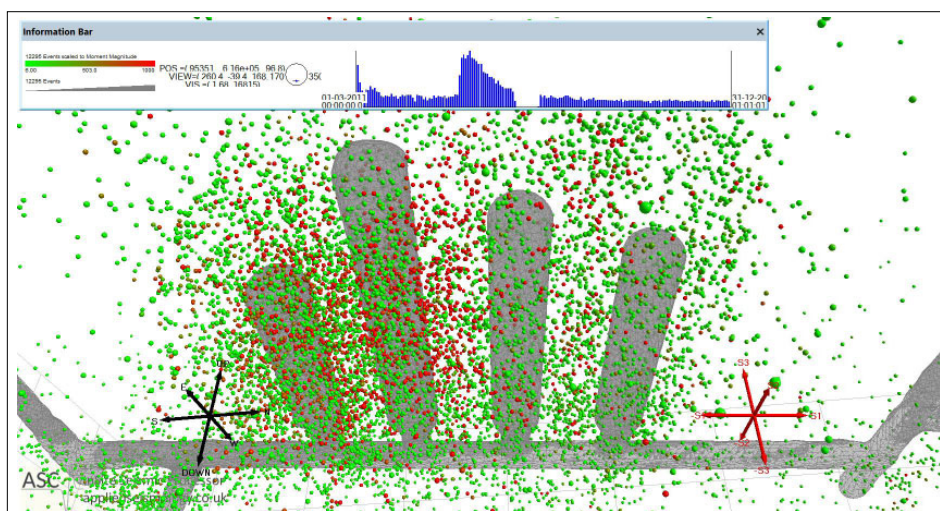
14. ábra | AE hipocentrumok megjelenítése K-i irányból, letről nézve – 2016–2022 időszak
 Figure 14 | Appearance of AE hypocentres, viewpoint from the E-direction, from below – 2016–2022 period



15. ábra | AE hipocentrumok megjelenítése K-i irányból nézve – 2016–2022 időszak
 Figure 15 | Appearance of AE hypocentres, viewpoint from E – period 2016–2022



16. ábra | AE hipocentrumok megjelenítése É-i irányból nézve – 2011–2022 időszak
 Figure 16 | Appearance of AE hypocentres, viewpoint from the N-direction – 2011–2022 period



17. ábra | AE hipocentrumok megjelenítése K-i irányból, lentről nézve – 2011–2022 időszak
 Figure 17 | Appearance of AE hypocentres, viewpoint from the E-direction, from below – 2011–2022 period

5.5. Numerikus modellezés eredményei

A numerikus modellezés során EX3 peremelemes (BEM) kód került felhasználásra. Több feszültségi és alakváltozási variációt is lefuttattunk, de a kőzettest szilárdsági viszonyaira utaló többletinformációt a differenciális feszültségek alakulása nyújt, éppen ezért a következőben ezek kerülnek bemutatásra.

A 18., 19., 20. ábrán látható a hipocentrumok az intenziásnak megfelelően vannak színezve, ennek skálája a kivágatok alján található (Gyorsulás – mm/s²). A numerikus modellezéshez dátumok nincsenek feltüntetve, éppen ezért a szoftver egy az adatbázis betöltésének napját jelöli ki abban az esetben, ha nem történik a dátumokra vonatkozó vizsgálat. Először a kijelölt 2016–2022-es időszak összefoglaló 18., 19., 20. ábráit mutatjuk.

A hipocentrumok feszültségállapota szerinti megjelenítését mutatjuk be a következő ábrákon. Ezeket a fe-

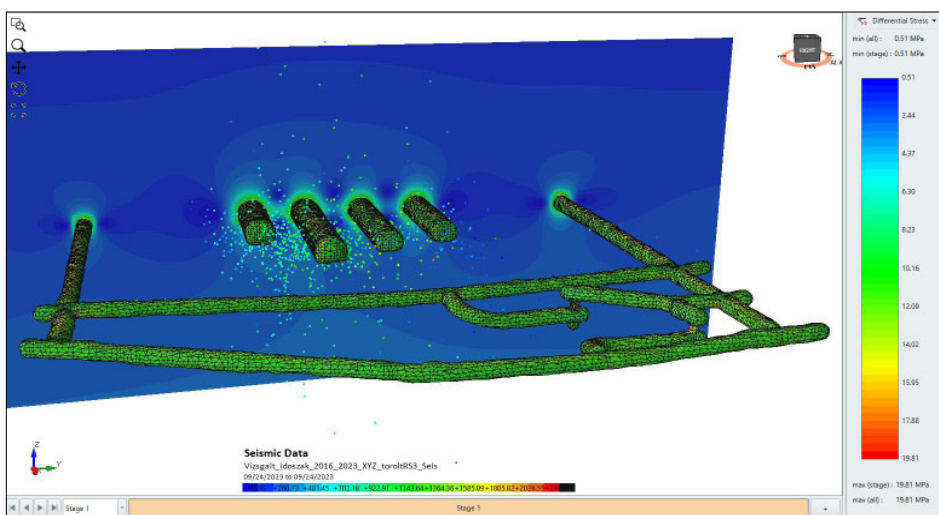
szültségállapot pontokat, melyek a hipocentrumok pozíciójának megfelelő XYZ koordinátával rendelkeznek, a későbbiekben exportáltuk, és ezeket a feszültségállapotokat tovább vizsgáltuk statisztikai módszerekkel.

A teljes időszak eredményei – a 2011–2022-es időszak – összefoglalva a 21–22. ábrán láthatóak.

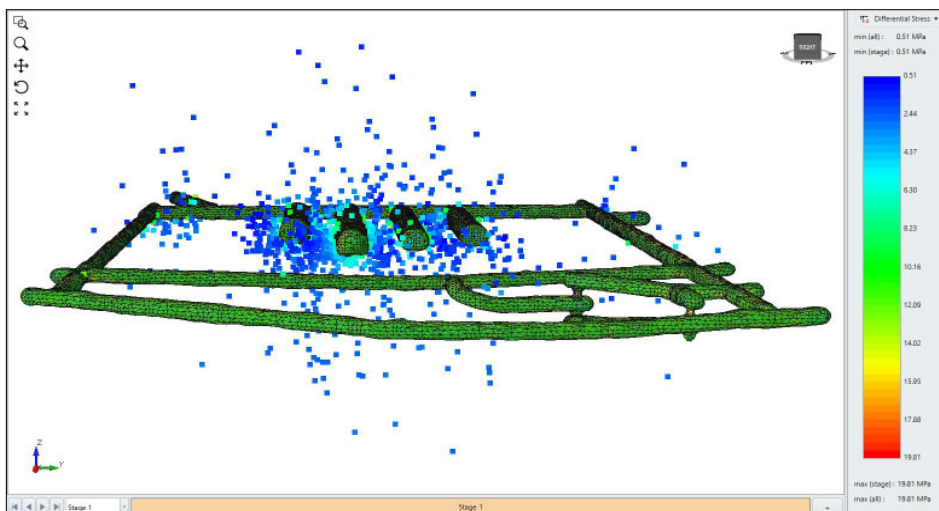
5.5.1. Klaszteranalízis a 2016–2022 vizsgált időszak adatain

Az amplitúdó vizsgálatok alapján az látszik, hogy a nagyobb magnitúdóval rendelkező hipocentrumok az I-K3 kamra középső részénél és az I-K4 kamra eleje és végének környezetében jelentek meg (23. ábra).

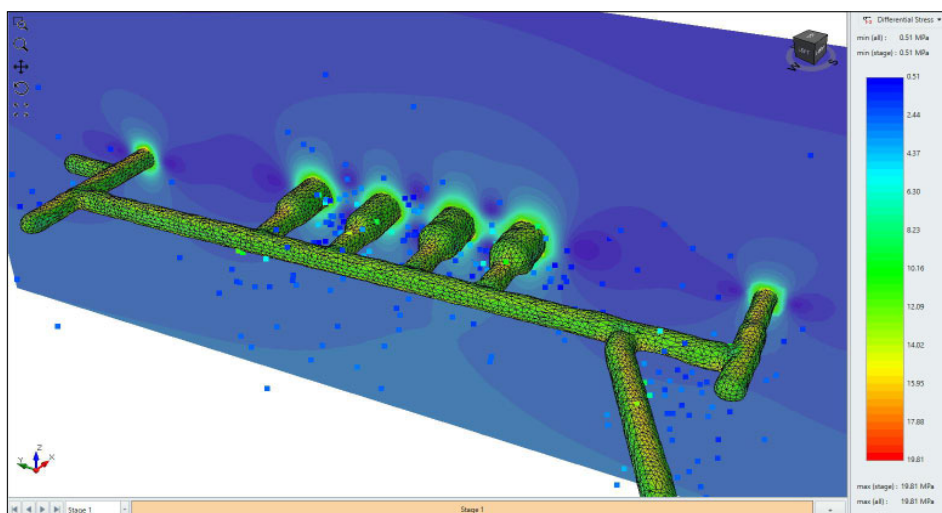
A hipocentrumok megjelenésének gyakorisága alapján is egy elég hasonló képet kaptunk, amelyet a 24. ábra mutat be.



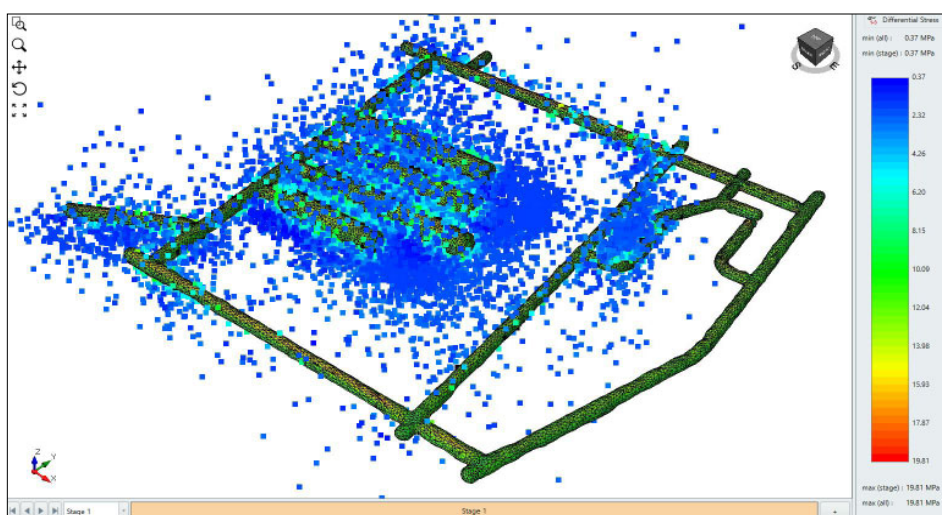
18. ábra | Differenciális feszültségek az AE hipocentrumok környezetében KDK-i irányból nézve
 Figure 18 | Differential stresses in the vicinity of AE hypocentres, viewpoint from ESE direction



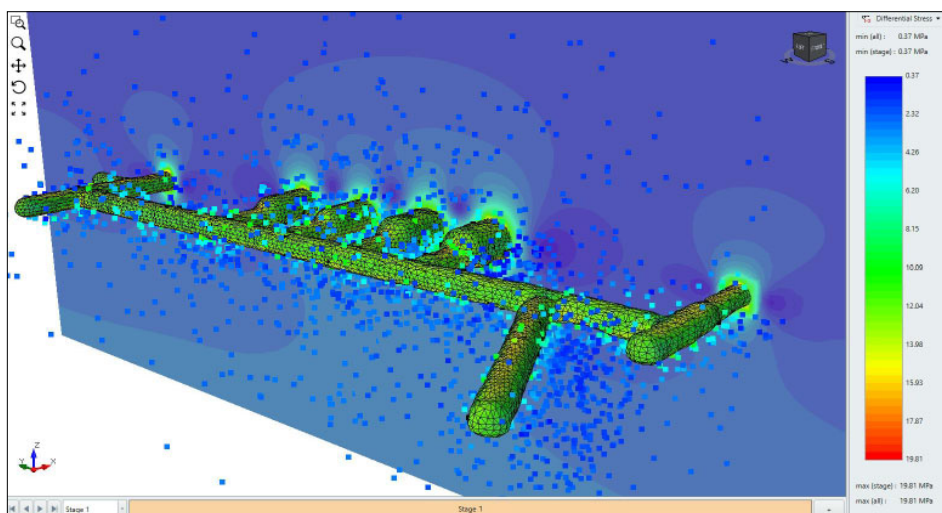
19. ábra | Differenciális feszültségek az AE hipocentrumok környezetében K-i irányból nézve
 Figure 19 | Differential stresses in the vicinity of AE hypocentres, viewpoint from E direction



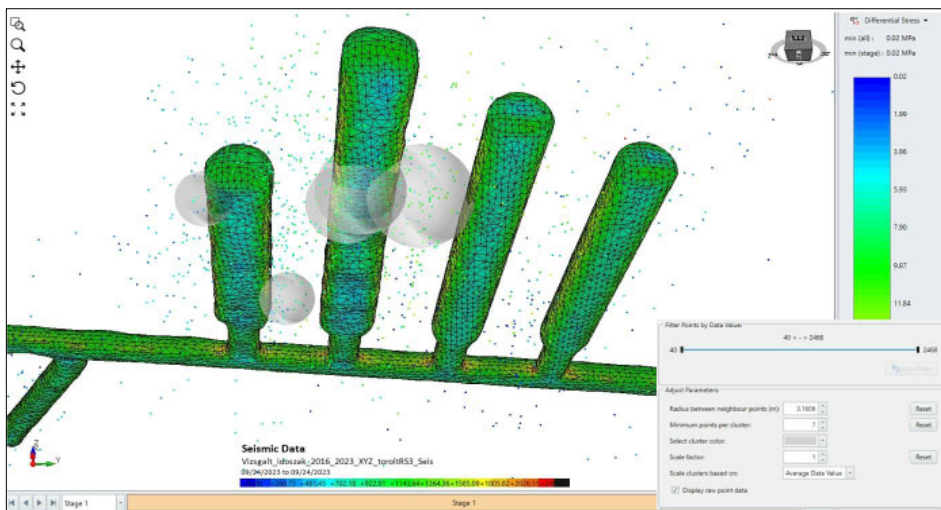
20. ábra Differenciális feszültségek az AE hipocentrumok környezetében DNY-i irányból, fentről nézve
Figure 20 Differential stresses in the vicinity of AE hypocentres, viewpoint from SW direction from above



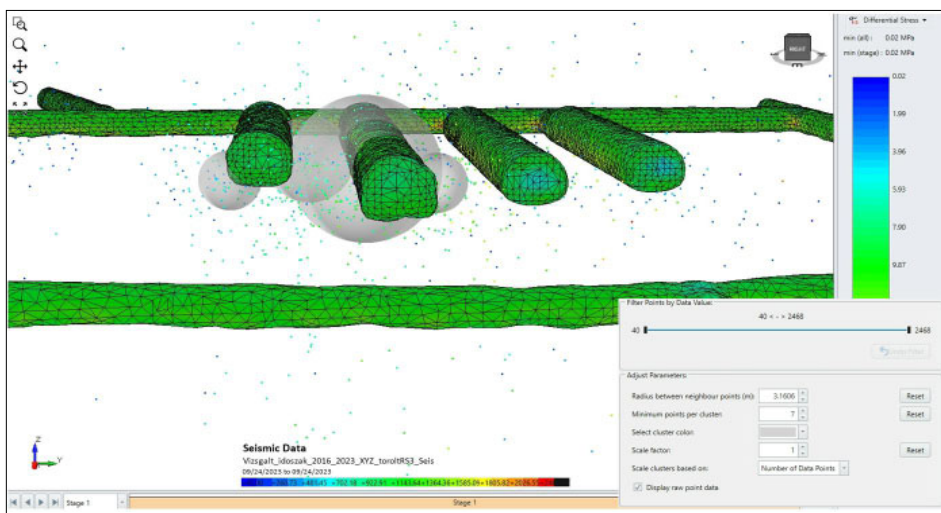
21. ábra Differenciális feszültségek az AE hipocentrumok környezetében DK-i irányból, fentről nézve (a teljes vizsgált időszak: 2011–2022)
Figure 21 Differential stresses in the vicinity of AE hypocentres, viewpoint from SE direction, from above – 2011–2022 period



22. ábra Differenciális feszültségek az AE hipocentrumok környezetében DNY-i irányból, fentről nézve (a teljes vizsgált időszak: 2011–2022)
Figure 22 Differential stresses in the vicinity of AE hypocentres, viewpoint from SW direction, from above – 2011–2022 period



23. ábra Klaszteranalízis a differenciális feszültségállapotokkal (a kamratárség alulról nézve)
 Figure 23 Cluster analysis with differential stress states – repository chambers area seen from below



24. ábra Klaszteranalízis a differenciális feszültségállapotokkal (a kamratárség felülről nézve)
 Figure 24 Cluster analysis with differential stress states – repository chambers area seen from above

5.6. Elméleti háttér

Az AE és kőzetmechanikai vizsgálatokra alapozva a kőzettest viselkedésére egy már meglévő sematikus modellt alakítottunk át még régebben (Deák 2023), mely egyszerű áttekintést ad a kőzettest viselkedéséről (alapozva a kőzettestet alkotó ép kőzet tulajdonságaira is) egy feszültség-alakváltozási diagramon (25. ábra). Ezzel a megközelítéssel leírható a felszín alatti üregek közvetlen környezetének (pl. EDZ) és ezzel egy időben a távol eső kőzettestnek a kőzetmechanikai viselkedése.

Ming Cai (Cai et al. 2004) hosszabb tanulmányozás után hasonló eredményeket publikált, mint amelyeket mi is észleltünk a Bábaapáti NRHT esetében. Azaz a Derek Martin által megalkotott rideg-képlékeny átmenet, valamint a töréses tönkremenetel keletkezésének és fejlődésének határállapotait kőzettest esetében (kiváltképpen a gyengébb kőzetminőség, GSI <65 mellett) át kell gondolni, és az ép

kőzetre vonatkozó értékeket csökkenteni kell. Ehhez Cai azt ajánlotta, hogy a kőzettest szilárdsági értékeit *in situ* értéként vegyük figyelembe. A CI határérték:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = A \sigma_{cm}, \tag{7}$$

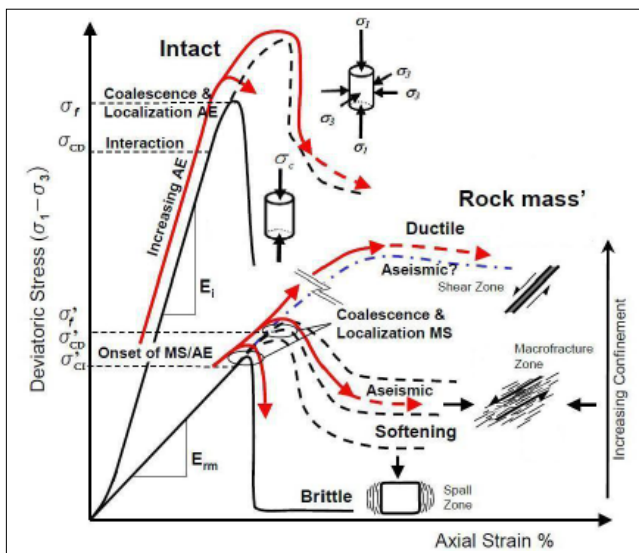
ahol $A = 0,4-0,6$, a CD határérték pedig:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = B \sigma_{cm}, \tag{8}$$

ahol $B = 0,8-1,0$.

A háttéranalízis során Cai megfigyeléseire támaszkodtunk (Cai et al. 2004), majd a saját megfigyeléseinkre (Deák et al. 2023).

A kőzettest tönkremenetelének folyamatát több különböző deformációs szakasz jellemzi, amelyek magukban foglalják a repedés iniciálását vagy repedésfejlődés kezdetét (CI), a repedés terjedését és összeolvadását vagy összekapcsolódását (koaleszcenciáját) (CD). Fontos tudni, hogy a mérnöki tervezés során ezek a deformá-



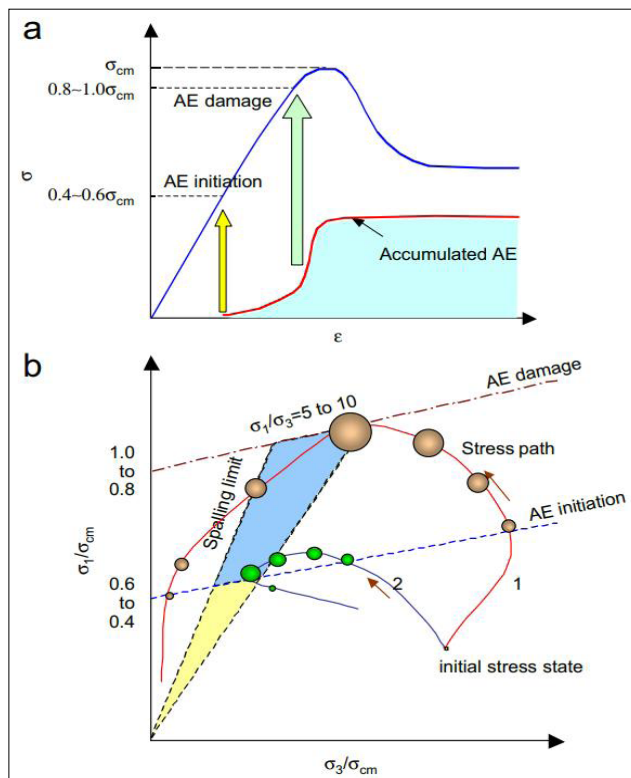
25. ábra A kőzettest viselkedésének sématis rajza a befogás függvényében, összehasonlítva egy ép kőzetminta eredményével és a kőzettest modulusával, minden esetben ábrázolva a mikrosezimikus és AE-aktivitás tartományát, a kapcsolódó tönkremeneteli módokat és az így meggyengült szerkezeteket is (Coulson 2009 után)

Figure 25 Schematic draw on the rock mass behaviour as a function of confinement comparison with an intact rock sample's result and rock mass modulus, in each case depicting the range of microseismic and AE activity, the associated failure modes and the resulting weakened structures

ciós szakaszok milyen feszültség-szintekkel járnak a gyakorlatban.

Átfogó elméleti, kísérleti és numerikus vizsgálatok léteznek az ép kőzetek tönkremeneteli folyamatáról. Általában érthető, hogy a repedés keletkezés (CI) a tönkremeneteli csúcs (UCS) egytengelyű nyomószilárdság 0,3–0,5-szöröse. A befogott állapotban lévő minták esetében egy állandó deviatorikus feszültségkritériumot írtak le a repedés keletkezés (CI) feszültség szintjének megállapítására.

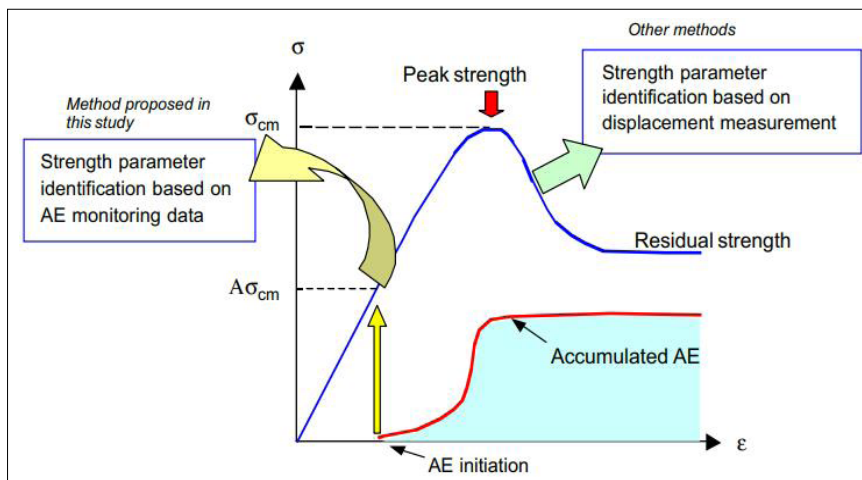
Törérendszerek nélküli masszív kőzettest esetén a kőzettest szilárdsága megegyezik az intakt kőzet CD-értékével ($\sigma_{cm} = \sigma_{CDi}$); az ép kőzet hosszú távú egytengelyű szilárdsága. Az ép kőzetek és a kőzettestek adatainak vizsgálata után megállapítható volt, hogy masszív vagy közepesen töredezett kőzettestek esetében az A és B anyagállandók a 0,4–0,5, 0,8–0,9 tartományban vannak, illetve erősen és közepesen töredezett kőzettestek esetében A és B a 0,5–0,6, 0,9–1,0 tartományba esnek. Az általános repedéskeletkezési és repedés-összekapcsolódási tönkremenetel (CI- és CD-) küszöbértékek egyszerű lineáris elasztikus feszültség-egyelemzéssel kombinálva segítenek az értékelés-



26. ábra Generalizált feszültség-alkváltozás diagram (a), feszültség állapotokat és a lepattozást (spalling) bemutató határgörbe (b) kőzettestek esetére, mely mutatja az AE események kezdetét és az AE tönkremenetelt a hozzájuk tartozó feszültségállapottal. A gömbök mérete az AE aktivitását számszerűsíti (Cai et al. 2007)

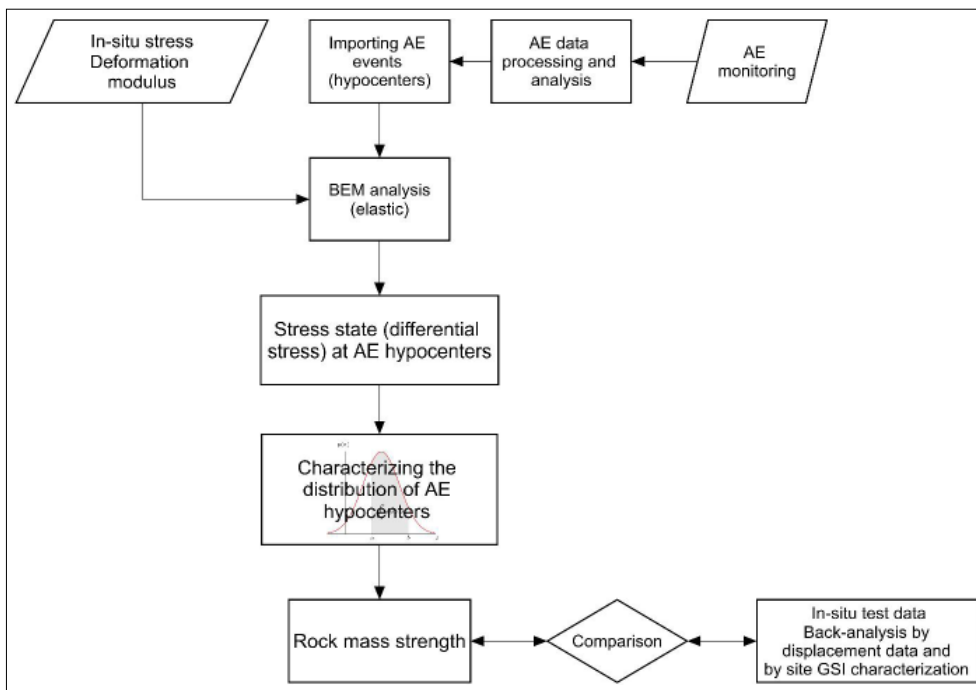
Figure 26 Illustration of (a) generalized stress-strain diagram and (b) stress paths and spalling limit for rock masses, showing the AE initiation and AE damage (propagation) stress levels. The ball size in (b) indicates the number of AE activities

ben, hogy a kőzettest integritása jellemezhető legyen alacsony szintű befogási (confinement) körülmények között, ami jelentősen csökkenti a szükséges erőfeszítést az anyag-állandók megállapításában a felszín alatti létesítmények mérnöki tervezéséhez.



27. ábra Sématis ábra, amely a különböző tönkremeneteli állapotokat és azoknak a műszeres észlelési módjait mutatja be (Cai et al. 2007)

Figure 25 Scheme of using AE monitoring data for rock mass strength determination



28. ábra | Folyamatábra a kőzettest szilárdságának háttéranalíziséről (Deák et al. 2023)
 Figure 28 | Rock mass strength back-analysis flowchart

A 26., 27. ábra mutatja be azt az eljárási sémát, melyet mi is követtünk a vizsgálatok során.

Egy alapvető eltérést alkalmaztunk Cai által bemutatott módszertől, melynek során elemzést végeztünk a differenciális feszültség eloszlásának vizsgálatára az exportált hipocentrumok esetében (28. ábra). A végső cél az volt, hogy ennek az újonnan bevezetett elemzési folyamatnak a révén (Deák et al. 2023) megjósoljuk a kőzettest szilárdságát (UCS_{mass}). A kőzettest tulajdonságainak jobb megértésével megbízhatóbb előremenő elemzések végezhetőek a kőzettest viselkedésének előrejelzésére a tervezett jövőbeli felszín alatti üregek körül.

A kőzettest AE megjelenéseinek kezdete vagy AE-kezdet (AE initiation) és AE-tönkremeneteli (AE damage) feszültségének az előremenő elemzéssel összefüggésben fontos, hogy megbízható értékelést kapjunk a kőzettest szilárdságáról. Ezt megfelelő helyszíni vizsgálatokkal vagy alternatívaként a GSI rendszer alkalmazásával lehet elérni. Mindkét esetben szükséges a terepi vizsgálati adatok vagy a GSI rendszerből kapott tervezési értékek háttéranalízissel történő ellenőrzése is. Mindazonáltal az AE-monitoring-megközelítés kevésbé invazív és kevésbé költséges, mint az egyéb alkalmazható helyszíni vizsgálatok. Ezenfelül az AE-monitorozás a teljes kőzettestre kiterjed, ami lehetővé teszi a tulajdonságok változásának jobb térbeli megértését anélkül, hogy fúrásokat kelljen végezni.

Az általános AE-kezdeti küszöbérték alapján megállapítható, hogy az AE-indulási feszültség a kőzettest szilárdságával függ össze. Ha a feszültségeket a föld alatti feltárások körül egy rugalmas modell segítségével becsüljük meg, és az AE-aktivitást nyomon követjük, akkor ezek az adatok felhasználhatók a kőzettest szilárdságának

meghatározására egy háttéranalízis alapján végzett módszerrel.

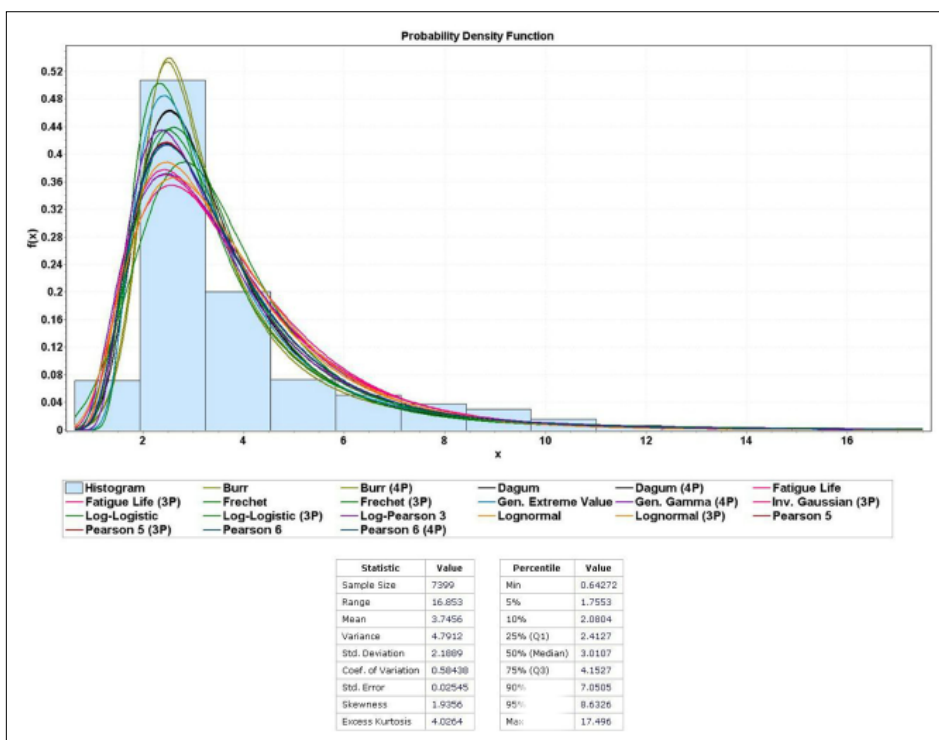
5.7. Eredmények a vizsgálat időszakról

A BEM-modellekből lehetővé vált az egyes hipocentrum-pontok differenciálfeszültség értékeinek exportálása egy komplex adatbázisba. Az adatbázist komplex statisztikai elemzésnek vetettük alá, amelynek során az AE-események differenciálfeszültség eloszlására vonatkozó görbéket több különböző megközelítéssel illesztettük (29., 30. és 31. ábra). A transzformációkat a fenti egyenletekkel oldottuk meg, a σ_{cm} -re pedig Hoek alapegyenletét használtuk (Hoek et al. 2002):

$$\sigma_{cm} = s^a \sigma_{ci} \tag{9}$$

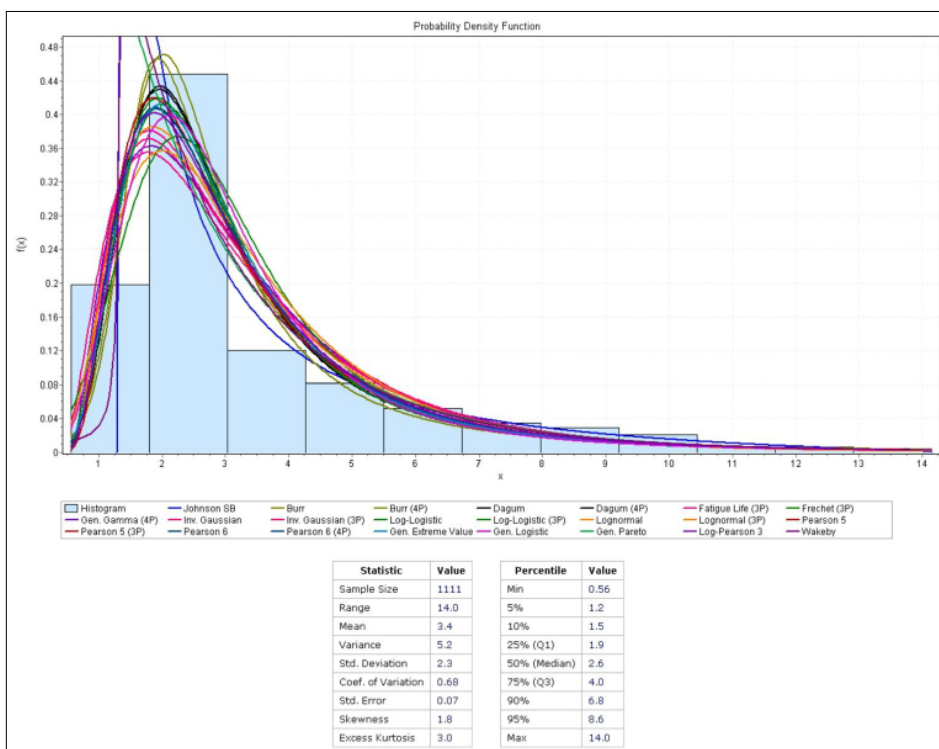
A (9) egyenlet segítségével az ép vagy intakt $USC = 129$ MPa értéket feltételezve, UCS_{mass} vagy $\sigma_{cm} = 7,8$ MPa értéket eredményez (ha $GSI = 50$). Ebből következik, hogy a jellemzett mérsékelt töredezett kőzettest általános repedéskezdeti (AE) küszöbértéke $\sigma_{ci} \approx 3,9$ MPa lenne (ha $A = 0,5$).

Az eredmények azt mutatják, hogy az eloszlás csúcsa a 25%-os percentilisének (Q1) van, ami azt jelenti, hogy a CI_{mass} küszöbérték annak közvetlen közelében lehet. Az, hogy ez alatt is vannak értékek, annak tulajdonítható, hogy a modelleterületen a kitermelt üregektől távol hipocentrumok vannak, ahol a modellezés alapján nyugodt feszültségmező található. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a közelükben nem lehet olyan törés vagy törésrendszer, amely lehetővé teszi, hogy az adott hipocentrumok feszültségállapota meghaladja a CI_{mass} határértéket. Mivel



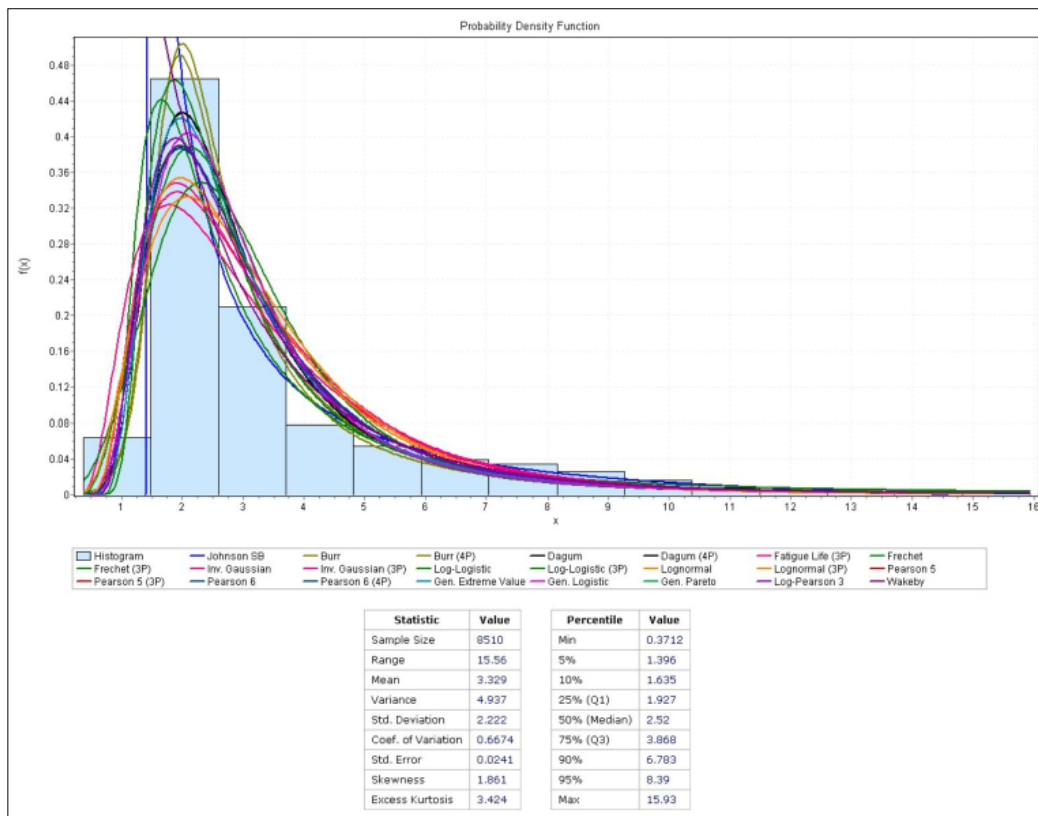
29. ábra | Statisztikai eredmények az AE hipocentrumok elemzéséről – 2011–2015 időszak (az x tengely a differenciális feszültség MPa-ban)

Figure 29 | Statistical results on the AE hypocenters analysis – 2011–2015 period (x axis is the differential stress in MPa)



30. ábra | Statisztikai eredmények az AE hipocentrumok elemzéséről – 2016–2022 időszak (az x tengely a differenciális feszültség MPa-ban)

Figure 30 | Statistical results on the AE hypocenters analysis – 2016–2022 period (x axis is the differential stress in MPa)



31. ábra | Statisztikai eredmények az AE hipocentrumok elemzéséről – 2011–2022 időszak (az x tengely a differenciális feszültség MPa-ban)

Figure 31 | Statistical results on the AE hypocenters analysis – 2011–2022 period (x axis is the differential stress in MPa)

a jelen tanulmányban nem volt lehetséges a jól dokumentált fő törésrendszerek meghatározására a BEM-modellekben, ezért a hozzájuk esetlegesen kapcsolódó AE-események vizsgálata elmaradt. Az eloszlások alapján a mediánérték is nagyszámú hipocentrumot tartalmaz, ezért ebben a tanulmányban is megemlítjük az értékét.

A fenti statisztikai vizsgálatok eredményei alapján a következő megállapításainkat alább foglaltuk össze.

5.7.1. A 2011–2022 időszak vizsgálatának eredményei

- Ha GSI = 50: $UCS_{mass} \approx 7,8$ MPa és $\sigma_{ci} \approx 3,9$ MPa – ez a variáció megfelel a modellezett eredményeknek. De ugyanakkor a statisztikai elemzésből kapott átlagértékekkel is jól korrelál:
 - 2011–2015 időszak: átlag $\sigma_{ci} \approx 3,75$ MPa
 - 2016–2022 időszak: átlag $\sigma_{ci} \approx 3,4$ MPa
 - 2011–2022 időszak: átlag $\sigma_{ci} \approx 3,3$ MPa
- Ha GSI = 42: $UCS_{mass} \approx 4,8$ MPa és $\sigma_{ci} \approx 2,41$ MPa, ez a variáció megfelel a statisztikai elemzésből kapott 25%-os percentilis (Q1) értékeknek a 2011–2015 időszak esetében. Míg a 2016–2022 és a 2011–2022 időintervallumok esetében az 50%-os percentilis (median-) értékekhez közelít a legjobban a σ_{ci} érték. Az itt említett esetekben egy tényezőt változtattunk meg a várt statisztikai adatok elérése érdekében, és ez nem más, mint a GSI.

A kamratérés geológiai dokumentálása során a kőzettest jellemzően a GSI = 42–50 közötti kategóriába volt sorolható. A numerikus modellezések során a leggyakrabban mi a GSI = 50 értéket szoktuk beállítani a kamratérés esetében.

6. Következtetések

Ki kell hangsúlyozni, hogy az AE mérésekre támaszkodó megfigyelések időben és térben is nagyon hasznos információval szolgálnak és maguk az AE események jóval a kőzettest tönkremenetele előtt jelennek meg (a repedésfejlődés kezdeti szakaszában a CI határértéktől), és ezek további fejlődése nyomon követhető egészen a tönkremeneteli pontig, majd később a reziduális szilárdság is monitorozható.

A konvencionális geotechnikai mérőrendszerek mérésein alapuló (elmozdulás- és alakváltozás-mérések) háttéranalízis megközelítés alkalmazása főleg elmozdulás mérésalapú. Ebben az esetben a kőzettestszilárdsági paraméterek azonosításához a kőzettestnek el kell érnie vagy meg kell haladnia a tönkremeneteli csúcserőértéket, és be kell lépnie a csúcserő utáni régióba a nagymértékű alakváltozások vagy elmozdulások kialakulásához.

Jelenlegi vizsgálatban nem nyílt lehetőség a nagyobb geológiai szerkezetekhez köthető AE-aktivitásokat részle-

tesen megvizsgálni. Itt egy nagyon fontos példa a kamratérsgében lévő vizes pászta, mely törési övhöz nagyon jellemző AE-aktivitás tartozik térben, időben és intenzitásában. Ezt egy régi vizualizációval vizsgáltuk, ám a mostani esetben az üregképzéshez köthető hipocentrumokra koncentráltunk.

Az AE hipocentrumok időbeli eloszlását figyelve azt láthatjuk, hogy vágathajtási időszakokban a mikroszeizmikus és akusztikus emissziók száma számottevően megnő, míg a vágathajtási időszakok között is egy meghatározott szinten, de folyamatosan látunk kisebb intenzitású hipocentrum-megjelenéseket, melyek köthetők a kőzettest hosszútávú deformációjához. Ezek későbbi vizsgálata nagy fontossággal bír, hiszen időben, térben és intenzitás alapján is vizsgálni lehet az időfüggvényű deformációkat, illetve – ha a későbbiekben – ezekben a megfigyelt térszésekben újabb vágathajtás történik, akkor összességében van mód a kőzettest szilárdságának időfüggvényű degradációját is megfigyelni.

A folyamatos aktivitás mellett az elkövetkező évtizedek során (az üzemidő alatt is, de a bezárást követően biztosan) várható, hogy megjelennek észlelhető deformációk a felszín alatti létesítmény vágatfalain. Pontosabb előrejelzés megadásához további elemzések szükségesek.

A háttéranalízis (back-analysis) során kapott eredményekre támaszkodva megállapíthatjuk, hogy a modellezéshez felhasznált bemenő paraméterek, peremfeltételek, valamint az eredmények alapján a kőzettest CI-értékéből, majd a szilárdságából visszszámított kőzettest osztályozási értékekre átlagosan a $GSI = 42\text{--}50$ intervallum feleltethető meg. Ez tükröződik vissza terepi dokumentációkból is, tehát azok jelentős alul- vagy felülbecslése jelen munka során nem volt megállapítható.

Az is megállapítható, hogy a legtöbb emisszió a CI-értékhez köthető, és térben a legnagyobb részük ezeknek a vágatfalaktól távolabbi pontokban helyezkedik el. A vágatok EDZ zónáinak környezetében ($\sim 3\text{--}17,5$ MPa differenciális feszültségek tartománya) már sok esetben a kőzettest CD határétékén túli feszültségállapotok is megjelennek, ami jelentős irreverzibilis deformációkhoz vezet. Ugyanakkor ebben a zónában már maga a vágathajtás hatására a statikus és dinamikus terhelések miatt nagyfokú deformációs folyamatok játszódhatnak le.

További érzékenységi vizsgálatokat tervezünk még elvégezni a teljes összefüggő háttéranalízisben, melyet majd a későbbiekben tovább vizsgálunk.

A tanulmány szerzői:

Deák Ferenc, Bakai János, Szűcs István

Hivatkozások

- Bakai J. (1978): Javaslatok a mikroszeizmikus impulzusok keletkezési helyének és energiájának meghatározására. Miskolc
- Bakai J., Kádi Z. (2023): Értékelő jelentés – Az NRHT szeizmoakusztikus rendszer 2022. évi észlelési adatainak feldolgozása, kézirat, RHK-K-001/23, 42 o.
- Cai M., Kaiser P.K., Tasaka Y., Maejima T., Morioka H., Minamic M. (2004): Generalized crack initiation and crack damage stress thresholds of brittle rock masses near underground excavations. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 41/5, 833–847.
- Cai M., Morioka H., Kaiser P.K., Tasaka Y., Kurose H., Minami M., Maejima T. (2007): Back-analysis of rock mass strength parameters using AE monitoring data. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 44/4, 538–549.
- Deák F. (2023): Excavation damage zone behaviour under static and dynamic loading: Case studies from Bataapáti radwaste repository. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, Pál Vásárhelyi Doctoral School of Civil Engineering and Earth Sciences, 134 p.
- Deák F., Perras M. A., Szűcs I., Török Á. (2023): Back-analysis of rock mass strength at a radioactive waste disposal site using acoustic emission monitoring data and 3D numerical modelling. *Energies*, 16, 4686.
- Hoek E., Carranza-Torres C., Corkum B. (2002): Hoek-Brown failure criterion – 2002 edition. In: *Proceedings of NARMS-TAC Conference*, Toronto, Canada.
- Szűcs I. (2016): Zárójelentés – a Bataapáti Nemzeti Radioaktív-hulladék-tároló (NRHT) 3. vizsgálati kamra, Nyugati feltáró vágat, I-K3 és I-K4 kamra nyaktagok (létesítés III. ütem, 1. szakasz) részfeladataival összefüggésben létesített és üzemeltetett szeizmoakusztikus monitoring rendszerhez kapcsolódó alábbi feladatok teljesítéséről: I. Aktív szeizmoakusztikus észlelőrendszer telepítése, meglévő rendszer, módosítása; II. Aktív szeizmoakusztikus észlelőrendszer üzemeltetése. Kézirat, 2016. március, LADINI Mérnöki Tanácsadó és Szolgáltató Kft. Mecsekérc Adattár, LA-PRO01-MÉ-2014-16.
- Zhao X. G., Cai M., Wang J., Ma L. K. (2013): Damage stress and acoustic emission characteristics of the Beishan granite. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 64, 258–269.

Báró Eötvös Loránd szobrának 2024. évi megkoszorúzása

A báró Eötvös Loránd szobrának ünnepélyes avatása a COVID-járvány miatt 2021. október 5-én történt meg a Gesztenyés kertben, a BAH csomópont közelében.

A szoborállító Eötvös Loránd Geofizikai Alapítvány (ELGA) kuratóriuma ekkor úgy döntött, hogy minden évben, lehetőleg ugyan ezen a napon tisztelete jeléül megkoszorúzza a szobrot, várva szeretettel erre az eseményre természetesen minden Eötvös Lorándot tisztelő személyt. Elhatározásunkat eddig minden évben, így idén is sikerült megvalósítanunk.

Az idei esztendőben október 8-án 10 órakor találkozott a tisztelők kis csapata a szobornál, hogy lerója tiszteletét nagy elődünk előtt. Az időjárás a hagyományoknak megfelelően idén is kegyes volt, és szép napos idővel tisztelte meg az eseményt.

A geofizikus és a turista társadalom képviselőiben mintegy tizenhatan jöttünk össze, hogy lerójuk tisztele-

tünket Eötvös Loránd emléke előtt. A rövid beszéd, melyet *Pályi András* tartott, két gondolat köré csoportosult. Az egyik megemlékezés volt a kiemelkedő személyiségre, világhírű tudósra. A másik, hogy igyekezzünk mindannyian erőnk szerint példaképként állítani Őt a következő generációk elé, így ápolva és átörökítve szellemiségét az utókorra.

A megjelentek képviselőiben, továbbá az ELGA nevében *Pályi András*, a Magyar Geofizikusok Egyesülete nevében *Bereczki László* és *Falus György*, valamint a Téry Ödön Turista Baráti Társaság, továbbá a Szt. Jakab Zarándok Egyesület nevében *Mészáros János* helyezték el koszorúikat a szobornál.

A fotókat *Grábler Zsuzsa*, az „Eötvös Expedíció” c. dokumentumfilm megálmodója és megvalósítója készítette.

Pályi András



Báró Eötvös Loránd szobrának megkoszorúzása a Gesztenyés kertben

Vida Zsolt

vasokleveles geofizikus-mérnök

1935 – 2024

Vida Zsolt 1935. augusztus 23-án született Nagykanizsán. Elemi iskoláit Csáktornyán majd Letenyén, gimnáziumi tanulmányait a Keszthelyen végezte. 1953-ban érettségizett. Egyéves kényszerű villanyszerelői munka után iratkozhatott be Sopronban a Nehézipari Műszaki Egyetem Földmérő mérnöki Karának geofizikus mérnöki szakára, ahol 1959. április 23-án kapta meg oklevelét.

1956 decemberében neki is alkalma lett volna Torontóban folytatni tanulmányait, de inkább hazatért. Mint tanszéki demonstrátornak meg volt a lehetősége Sopronban az egyetemen maradni, de ehelyett az ipart választotta.

Közel negyvenéves olajipari pályájának első állomása a nagykanizsai székhelyű Kőolajfűró Vállalat Geofizikai részlege. A kötelező műhely, majd szelvényező operátori munka után kiértékelő, majd szelvényező operátor volt, főként a gellénházi, budafai és babócsai mélyfúrásokon.

1961 szeptemberében kikérte a munkahelyéről a budapesti Vízkutató és Fűró Vállalat, ahol két évet töltött mint vezető szelvényező-mérnök. Az olajiparban szerzett tapasztalatait itt eredményesen tudta hasznosítani. Több mint 150 település artézi kútjainak geofizikai vizsgálatában, szűrőzésében, létrejöttében vett részt.

1963 szeptembere és 1968 májusa között a Geofizikai Mérőműszer Gyárban, mint villamos tervezőmérnök dolgozott az ún. EL-7000 műszerkocsi tervezésén és kivitelezésén. Később pedig a műszer exportjában, átadásában vállalt vezető szerepet, főként az NDK viszonylatában. Megbízták szakmai film forgatókönyvének írásával is.

1968 tavaszán a Geofizikai Kutató Vállalathoz lépett át. Hat évig a Geoelektromos Osztályon dolgozott, ahol a terepi csoportok képzése, a műszerezettség karbantartása, fejlesztése volt a feladata, továbbá a módszerfejlesztés. Majd a GKV vezetése kinevezte egy akkor alakult Beruházási szervezet vezetőjének. Két év után a vállalat egy nagy teljesítményű számítóközpontot vásárolt a geofizikai szeizmikus mérések feldolgozására, annak féléves tanfolyamán

vett részt Franciaországban ill. az USA-ban. Ezt követően a számítóközpont üzemeltetéséért felelt egy évtizedig.

1984-ben nagy kihívást kapott. Az OKGT felkérte, hogy az ún. első világbankos kölcsön kapcsán a Chemokomplexben képviselje az olajipar érdekeit. A felkérésből négy év szakértőség lett, rövidesen vezetői beosztásban. Közel-keleti nemzetközi vásárokon is rábízták a képviselést. 1988-tól már a Tröszt alkalmazottja, a Világbank Iroda helyettes vezetője lett. Feladata volt, hogy az olajipar (ez most már a MOL Rt) által felvett második és harmadik világbankos kölcsön ügyeit bonyolítsa, a szerződéseket írja alá és kövesse a tartalmi és pénzügyi teljesítéseket.

1997-ben ment nyugdíjba, de az aktív munkát nem hagyta abba. 2000-ig a MOL Rt.-nél külsősként dolgozott tovább. 1998-tól Siófokon az ottani Kőolajvezeték építőnél volt tanácsadó. 2001 és 2011 között egy olajiparhoz közeli nagyvállalatnál először tanácsadó majd később a Felügyelőbizottságának tagja volt. 1999-től tizenkét éven keresztül az az Újbudai Önkormányzatnál szerződéses szakértőként is dolgozott és az 1993-ban bejegyzett GEO Bt.-nek volt ügyvezetője. Szabadidejében saját készítésű geoelektromos műszerével vizet kutatott, baráti alapon.

1959 óta tagja a Magyar Geofizikusok Egyesületének. (Archivált filmanyaga értéknek számít az idősebb kollégák körében.) A sok munkahelyi kitüntetés, oklevél mellett természetesen rendelkezik a Bányász Szolgálat Érdemérem (időarányos) fokozatával is.

Vida Zsolt munkás életének 90. évében 2024. október 1-jén hunyt el. Hosszú élete során édesanyja útmutatását követte és élte meg: „Úgy imádkozz, mintha minden pillanatban meghalnál, úgy dolgozz, mintha örökké élnél.”

Kedves Zsolt, kedves kollégánk, nyugodjál békében!

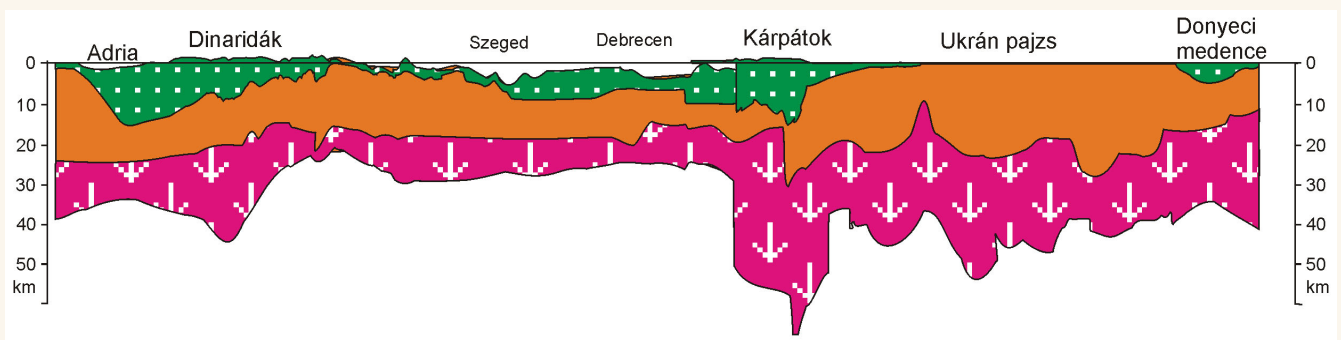
Szerkesztőség
(Vida Zsolt önéletrajzának felhasználásával)



Vida Zsolt
1935 – 2024

Az első földkéregkutató mélyszeizmikus szelvény a Kárpát-medencében

1964



Az Adria és a Donyeci medence között, nemzetközi együttműködésben, refrakciós – széles szögű reflexiós beérkezésekből meghatározott szeizmikus szelvény.
(Magyarország területén a méréseket, a kiértékelést és az értelmezést az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet végezte.)



MAGYAR GEOFIZIKUSOK EGYESÜLETE

1145 Budapest, Columbus u. 17–23.; Tel./Fax: (1) 201-9815

E-mail: postmaster@mageof.t-online.hu; Honlap: www.mageofegy.hu