

Hilbert-transzformált előállítás inverziós alapú robusztus Fourier-transzformációval

SZEGEDI H.[@], DOBRÓKA M.[&]

Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros

[@]E-mail: gfszh@uni-miskolc.hu

[&]E-mail: dobroka@uni-miskolc.hu

A tanulmányban bemutatunk egy robusztus inverziós módszert a Hilbert-transzformáció számítására, amely eljárás egyben a kiugró zajokkal (outlier) szemben rezisztens viselkedést biztosít. A Miskolci Egyetem Geofizika Tanszékén kidolgozott inverziós alapú Fourier-transzformációs eljárást a Steiner Ferenc professzor által kidolgozott leggyakoribb érték módszerrel (MFV) kombinálva a Fourier-transzformáció hatásosan robusztifikálható, ami korábbi publikációinkban igazolást nyert. Az így előállított robusztus Fourier-transzformációs eljárás (IRLS-FT) outlierekkel szembeni rezisztenciája és kiemelkedő zajelnyomó képessége indokolja, hogy a módszert a szeizmikus adatfeldolgozás területén is kipróbáljuk és sikeres alkalmazás esetén használatát javasoljuk. E célkitűzés első állomásaként a jelen dolgozatban a Hilbert-transzformáció robusztus inverzió alapuló előállítását mutatjuk be, alkalmazási példaként pedig az így előállítható analitikus jel abszolút értékét mint attribútumszelvényt (pillanatnyi amplitúdó) számítjuk. Az új algoritmus kettős inverzió alapul: egyrészt inverzióval határozzuk meg az időjel (csatorna) Fourier-spektrumát, másrészt a Hilbert-transzformációhoz szükséges átalakítással kapott spektrumot robusztus inverzióval transzformáljuk időtartományba. Ez utóbbi műveletet az iteratív újrasúlyozás (IRLS) módszerében a Steiner professzor által bevezetett súlyokat (Steiner-súlyok) alkalmazva hajtjuk végre (inverziós alapú robusztus inverz Fourier-transzformáció). Az időjel diszkretizálására a skálázott Hermite-függvények szerinti sorfejtést alkalmazunk, és a sorfejtési együtthatókat az inverziós eljárás ismeretlenjeiként határozzuk meg. Az új Hilbert-transzformációs eljárást Gauss- ill. Cauchy-eloszlást követő zajjal terhelt Ricker-waveleten teszteltük. Az eredményekből kitűnik, hogy az eljárás a kiugró zajokkal szemben figyelemre méltó rezisztenciát és a hagyományos (DFT-vel számított) szelvényhez képest egy nagyságrenddel jobb zajelnyomó képességet mutat.

Szegedi, H., Dobróka, M.: Generating Hilbert transform using inversion-based robust Fourier transform

In this study a robust inversion method is presented for performing the Hilbert transform, which shows robust behavior against outliers. The most frequent value method (MFV) was developed by professor Ferenc Steiner at the Department of Geophysics of Miskolc University. The inversion-based Fourier transform, developed also at the Department of Geophysics, combined with the MFV method becomes robustness. It has been proved in former publications. The prominent noise suppression ability and the resistance against outliers of the produced robust Fourier transform algorithm (IRLS-FT) give reason for trying it in field of seismic data processing, and we proposed to apply this method. In this paper, the robust Hilbert transform is demonstrated, and the absolute value of the analytic signal, which is calculated as a seismic attribute (instantaneous amplitude). The new algorithm is based on double-inversion procedure: firstly the Fourier spectra of the time function (trace) are defined by inversion, and finally we need to transform the obtained spectra by robust inversion in the time domain. This transform is performed in the framework of the iteratively reweighted least squares method (IRLS) with the use of Steiner weights. For the discretization of the time function, series expansion were applied with the scaled Hermite functions as basis functions. The coefficients of the series expansion are handled as unknown inversion parameters. The new Hilbert transform algorithm was tested on the Ricker wavelet in case of the noiseless, Gauss- and Cauchy-distribution noise. The results show that the method reduces the noise sensitivity of the inversion procedure even in case of having outlier data.

Beérkezett: 2014. június 14.; *elfogadva:* 2014. június 28.

Bevezetés

Az attribútumszelvények a szeizmikus adatfeldolgozásban és értelmezésben fontos szerepet kapnak. Ezek segítségével lehetőség van bizonyos információk (fizikai vagy geometriai paraméterek) kiemelésére. Taner és társai által 1979-ben

megjelentetett úttörő közlemény óta a tématerület kiszélesedett és jelentős fejlődésen ment át. Ma az attribútumok széles választékáról beszélhetünk, feloszthatjuk ezeket fizikai és geometriai attribútumokra, osztályozhatjuk az eljárásokat aszerint, hogy összegzés előtt vagy után nyernek-e alkalmazást, egy vagy több szeizmikus csatornán vannak-e értel-

mezve, stb. A mérési és adatfeldolgozási eljárások fejlesztése és alkalmazása során fontos feladat a jel/zaj viszony kezelése, lehetőség szerinti javítása. Az attribútumszelvények létrehozásában gyakran jut kiemelt szerephez a Fourier-transzformáció. Korábbi dolgozatunkban (Szegedi, Dobróka 2012) egy robusztus, inverziós alapon felépített Fourier-transzformációs eljárásra (IRLS-FT) tettünk javaslatot. Bemutattuk, hogy a módszer a kiugró zajok elnyomásában hatékonyan működik, és a jel/zaj viszonyt akár egy nagyságrenddel is képes megjavítani. A jelen dolgozatban kezdeményezzük az eljárás alkalmazását az attribútumszelvények számítása területén. Első lépésként a komplex csatorna definíciójában meghatározó szerepet játszó Hilbert-transzformált robusztus/rezisztens inverzió keretében történő előállítását mutatjuk be.

Az analitikus jel

Az alapvető attribútumszelvények számításában a kiinduló pont az analitikus jel (analitikus vagy komplex csatorna) létrehozása. Az analitikus jel fogalmát az adatfeldolgozásban Gábor Dénes Nobel-díjas magyar fizikus vezette be (Gábor 1946). Törekvése az volt, hogy a jelfeldolgozásban is alkalmazhatóak legyenek a kvantummechanika hatékony matematikai eszközei (Hilbert-tér, négyzetesen integrálható komplex függvények stb.). Ennek érdekében az

$$u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (1)$$

alakú időfüggvényt komplex jellé egészítette ki

$$s(t) = u(t) + jv(t), \quad (2)$$

ahol t jelöli az időt, ω a körfrekvenciát és j a képzetes egység. A $v(t)$ függvényt úgy definiálta, hogy az (1) kifejezésben a \cos függvény helyére \sin , a \sin függvény helyére pedig $-\cos$ függvényt írt, ezáltal előállítva a függvény kvadratúráját

$$v(t) = a \sin(\omega t) - b \cos(\omega t).$$

A (2) kifejezés így az

$$s(t) = (a - jb) \exp(j\omega t)$$

alakot ölti, amely egy komplex forgó vektorként ábrázolható. Ezt az eljárást általánosítva Gábor egy tetszőleges $u(t)$ időjel Fourier-transzformációs előállításában (\sin és \cos függvények cseréjével) a

$$v(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (3)$$

eredményre jutott, ami az $u(t)$ időjel Hilbert-transzformáltja:

$$v(t) = u_H(t).$$

Az adatfeldolgozásban tehát az analitikus jelet az

$$s(t) = u(t) + j u_H(t) \quad (4)$$

formulával állítjuk elő. Az 1. ábra szemlélteti a komplex analitikus jel szerepét.

A (3) egyenlet szerint a Hilbert-transzformáltat az $u(t)$ és a $-1/(\pi t)$ időfüggvények konvolúciójaként állíthatjuk elő. Mint ismeretes, a frekvenciatartományban ez a kapcsolat az

$$\mathcal{F}\{u_H(t)\} = \mathcal{F}\{u(t)\} \mathcal{F}\{-1/(\pi t)\}$$

alakban írható, ahol \mathcal{F} a Fourier-transzformációt jelöli. Mivel az $\mathcal{F}\{-1/(\pi t)\} = -j \operatorname{sgn}(\omega)$, bevezetve az $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ jelölést

$$\mathcal{F}\{u_H(t)\} = -j \operatorname{sgn}(\omega) U(\omega) = U_H(\omega). \quad (5)$$

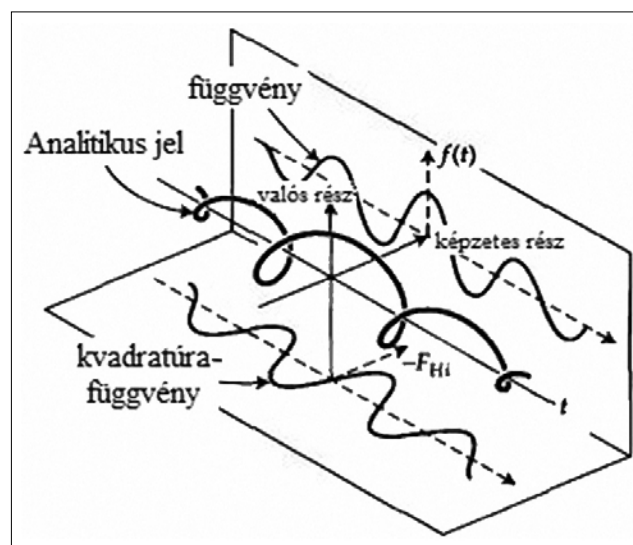
Belátható, hogy a Hilbert-transzformált jel $U_H(\omega)$ spektruma ezzel a módosítással Hermitikus lesz, azaz az inverz Fourier-transzformáció után ($u_H(t)$) valós jelet kapunk.

A reflexióerősség attribútum zajérzékenysége

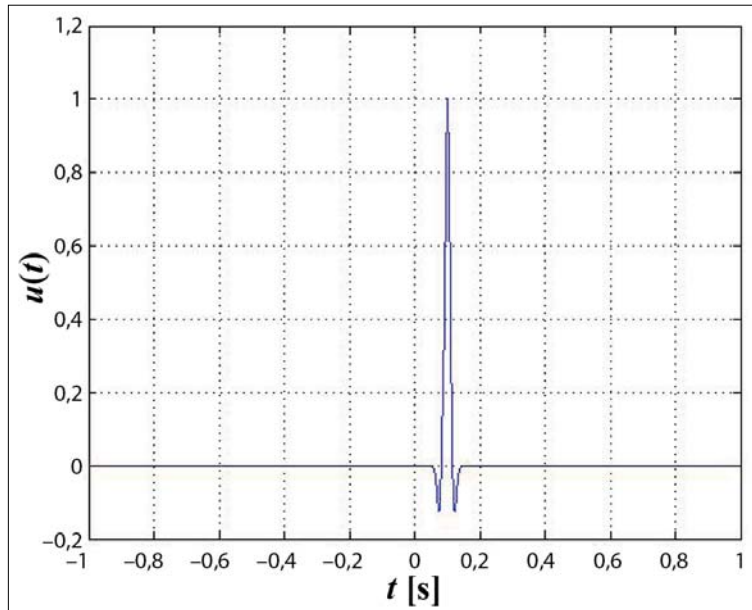
Miután a (4) szerinti analitikus jel ismert, az attribútumok előállíthatók. A továbbiakban példaként a reflexióerősséget (pillanatnyi amplitúdó, burkoló) vizsgáljuk, melyet a komplex csatorna

$$A(t) = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$$

abszolút értékeként definiálunk. Ezen attribútum zajérzékenységét a 2. ábrán látható Ricker-waveleten szemléltetjük. Az idősor a $[-1, 1]$ intervallumban 0,005 s mintavételi közzel a 0,1 s-nál lokalizált 10 Hz-es hullámcsoportot mutat. Az adatsort zérus középpű, $\sigma = 0,0025$ szórási Gauss-zajjal terhelve állítottuk elő az I. adatrendszert. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszert (II.) az $\varepsilon = 0,04$ skálaparaméterű Cauchy-eloszlást követő zaj generálásával hoztunk létre. A 3a-c. ábra a hagyományos eljárással számolt reflexióerősség csatornát mutatják zajmentes, Gauss-zajjal terhelt (I.), illetve Cauchy-zajjal terhelt (II.) bemenő adatok esetén.



1. ábra | A komplex analitikus jel szemléltetése
Figure 1 | The role of complex analytic signal



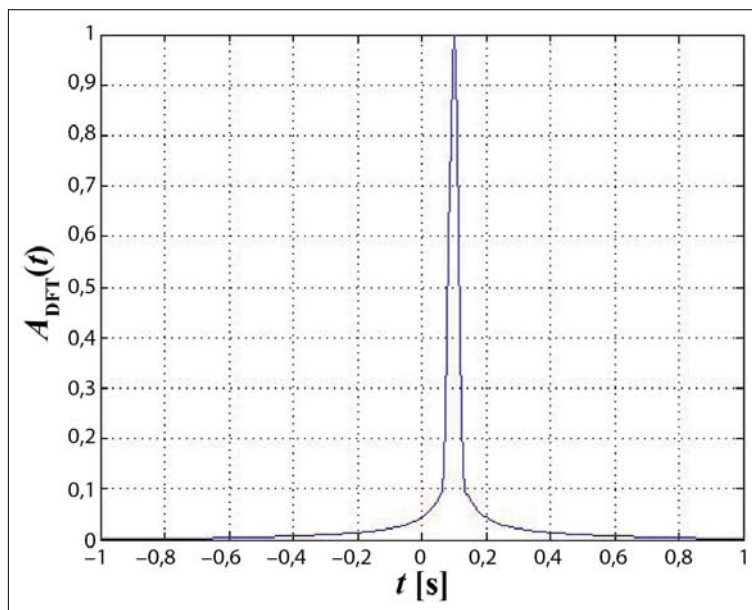
2. ábra | A zajmentes Ricker-wavelet az időtartományban

Figure 2 | The noiseless Ricker wavelet in the time domain

A Hilbert-transzformált előállítására a diszkrét Fourier-transzformációs eljárást (DFT), illetve annak inverzét (IDFT) alkalmaztuk. Látható, hogy a II. kiugró zajokat tartalmazó adatrendszer alapján számított reflexióerősség-szelvény különösen zajos. A zajérzékenység jellemzésére bevezetjük a

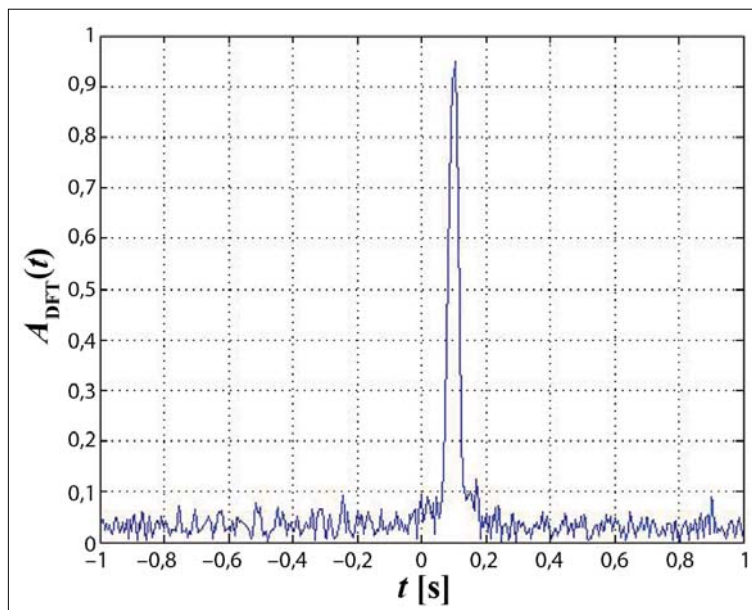
$$d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (A^{(zajos)}(t_k) - A^{(zajmentes)}(t_k))^2}$$

adattérbeli távolságot, amely az I. adatrendszer esetén a $d_{(I)} = 0,0306$, a II. adatrendszer esetén pedig a $d_{(II)} = 0,0444$ értéket vesz fel. A 3c. ábra indokolja kiugró zajokkal szemben fokozottan rezisztens Hilbert-transzformációs eljárás kidolgozását. Mivel az előzőek szerint a Hilbert-transzformált képzése a Fourier-transzformáción alapul, kézenfekvő, hogy a feladat megoldására a korábbi publikációkban (Szegedi, Dobróka 2012) közölt Steiner-súlyokkal definiált inverziós alapú Fourier-transzformációs eljárást (IRLS-FT) alkalmazzuk.

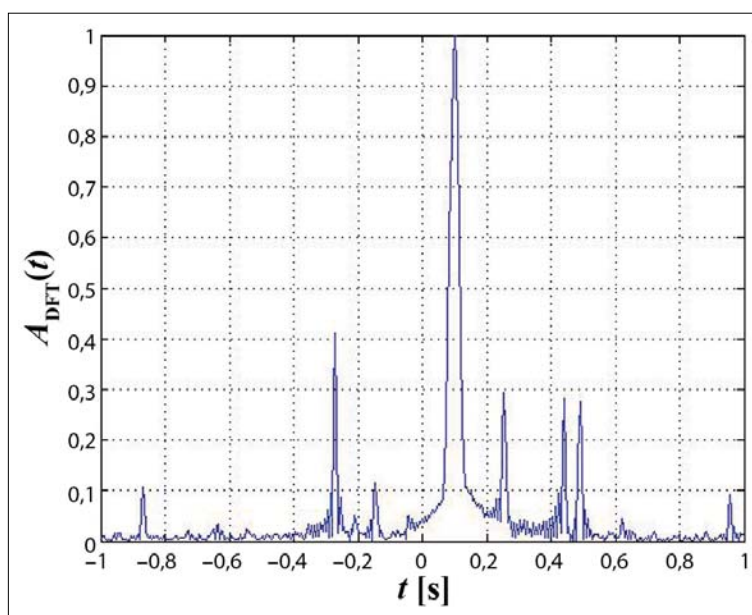


3a. ábra | DFT-vel számított zajmentes reflexióerősség az időtartományban

Figure 3a | The noiseless reflection strength in the time domain (traditional method)



3b. ábra DFT-vel számított reflexióerősség az I. adatrendszer (Gauss-zaj) esetén
Figure 3b The reflection strength in case of data set I (traditional method)



3c. ábra DFT-vel számított reflexióerősség a II. adatrendszer (Cauchy-zaj) esetén
Figure 3c The reflection strength in case of data set II (traditional method)

Elméleti áttekintés: az inverziós alapú Fourier-transzformáció (IRLS-FT)

A Fourier-transzformáció a jel regisztrálásának időtartományát és a jel vizsgálatának frekvenciatartományát kapcsolja össze a következő formulák alapján

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Az $U(\omega)$ frekvenciaspektrum az $u(t)$ időjel Fourier-transzformáltja, amely általában komplex értékű folytonos függvény. Sorfejtéses diszkrétizáció alkalmazásakor a spektrumot valamely alkalmasan választott $\Psi_n(\omega)$ bázisfüggvényrendszer szerint fejtjük sorba:

$$U(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n \Psi_n(\omega),$$

ahol B_n jelöli a komplex sorfejtési együtthatókat és $\Psi_n(\omega)$ az n -edik ismert bázisfüggvényt.

Ha a Fourier-transzformációt túlhatározott inverz problémaként fogjuk fel, először a direkt feladatot kell kijelöl-

nünk, amely az inverz Fourier-transzformáció, és amely a k -adik mérési adat esetén így definiálható

$$u^{(elm)}(t_k) = u_k^{(elm)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t_k} d\omega.$$

A fenti egyenleteket kombinálva a számított (elméleti) adatokat a következő lineáris egyenletrendszer szerint határozhatjuk meg

$$u^{(elm)}(t_k) = u_k^{(elm)} = \sum_{n=1}^M B_n G_{kn},$$

ahol

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(\omega) e^{j\omega t_k} d\omega = \mathcal{F}_k^{-1}\{\Psi_n(\omega)\}$$

a Jacobi-mátrix. A mért és számított adatok eltérésvektora

$$e_k = u_k^{(mért)} - u_k^{(számított)} = u_k^{(mért)} - \sum B_n G_{kn}$$

szerint számítható. A kifejezésben szereplő modellparaméterek a sorfejtési együtthatók, melyeket az eltérésvektor valamely normájának minimalizálásával határozzuk meg (Szegedi, Dobróka 2012). A sorfejtési együtthatók ismeretében a spektrum tetszőleges frekvencián meghatározható

$$U^{(becsült)}(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n^{(becsült)} \Psi_n(\omega)$$

Kiugróan zajos adatrendszeren igazoltuk, hogy az inverziós alapú Fourier-transzformációval egy nagyságrenddel jobb jel/zaj viszony érhető el, mint a hagyományos DFT eljárással.

Hilbert-transzformáció inverziós előállítás

A Hilbert-transzformált (5) formula szerinti (frekvenciaterbeli) előállításához ismernünk kell a jel $U(\omega)$ spektrumát. A jel/zaj viszony javítása érdekében a Fourier-transzformációt IRLS-FT módszerrel végezzük el, majd a spektrumot szorozzuk a $-j \operatorname{sgn}(\omega)$ függvénnyel. Ezek után az időtartományba inverz Fourier-transzformációval jutunk vissza. Az utóbbi műveletet robusztus inverzióval valósíthatjuk meg az alábbiak szerint.

A direkt feladat esetünkben a Fourier-transzformáció

$$U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

képletével adott, ahol az $u(t)$ időfüggvényt sorfejtéses formában diszkrétizáljuk

$$u(t) = \sum_{n=1}^M B_n \Psi_n(t). \tag{6}$$

(Itt és a továbbiakban $U_H(\omega)$ -ban és $u_H(t)$ -ben a H indexet elhagyjuk.) Behelyettesítés után a spektrum k -adik mintavételi elemére az alábbi formulát kapjuk

$$U_k(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=1}^M B_n G_{kn},$$

ahol

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(t) e^{-j\omega_k t} dt = \mathcal{F}_k\{\Psi_n(t)\}, \tag{7}$$

a Jacobi-mátrix, amelynek elemei a bázisfüggvényrendszer Fourier-transzformáltjaiként foghatók fel. A formulában szereplő komplex integrál kiszámítását elkerülhetjük, ha a (6) sorfejtés bázisfüggvényeit a Fourier-transzformáció sajátfüggvényei közül választjuk, mert ekkor

$$\mathcal{F}\{\Psi_n(t)\} = \lambda \Psi_n(\omega_k),$$

ahol λ a sajátértéket jelöli.

A bázisfüggvényrendszer megválasztása

Vaidyanathan (2008) bebizonyította, hogy ha $\Psi_0(t)$ a Fourier-transzformáció sajátfüggvénye λ sajátértékkel akkor a

$$\Psi_1(t) = t \Psi_0(t) - d \Psi_0(t) / dt \tag{8}$$

is sajátfüggvény $-j\lambda$ sajátértékkel, azaz

$$\mathcal{F}\{\Psi_1(t)\} = -j\lambda \Psi_1(\omega). \tag{9}$$

A fenti eljárást folytatva a sajátfüggvények egy rendszerét állíthatjuk elő. Legyen pl. a generáló függvényünk

$$\Psi_0(t) = \exp(-t^2/2), \tag{10}$$

amely a Fourier-transzformáció sajátfüggvénye $\lambda = 1$ sajátértékkel

$$\mathcal{F}\{e^{-t^2/2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-j\omega t} dt = e^{-\omega^2/2}.$$

A (8) formula szerint a

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= t \Psi_0(t) - \frac{d\Psi_0(t)}{dt} = 2t e^{-t^2/2}, \\ \Psi_2(t) &= t \Psi_1(t) - \frac{d\Psi_1(t)}{dt} = (4t^2 - 2) e^{-t^2/2}, \\ \Psi_3(t) &= t \Psi_2(t) - \frac{d\Psi_2(t)}{dt} = (8t^3 - 12t) e^{-t^2/2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kifejezések is sajátfüggvényei a Fourier-transzformációnak $(-j)^n$ sajátértékkel ($n = 1, 2, \dots$), és az eljárás tetszés szerinti n -ig folytatható. Észrevehetjük, hogy a fenti (zárójelben levő) polinomok sorozata az Hermite-polinomok rekurziós formuláját követi

$$h_{n+1}^{(0)}(t) = 2t h_n^{(0)}(t) - 2n h_{n-1}^{(0)}(t),$$

ahol $h_0^{(0)} = 1, h_1^{(0)} = 2t$. Az Hermite-polinomok integrálási tulajdonságát felhasználva

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} h_n^{(0)}(t) h_m^{(0)}(t) dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

az alap Hermite-függvényeket definiálhatjuk ortonormált és négyzetesen integrálható formában

$$H_n^{(0)}(t) = \frac{e^{-t^2/2} h_n^{(0)}(t)}{\sqrt{\pi n! 2^n}}.$$

A fenti szempontok szerint az Hermite-függvények a Fourier-transzformáció sajátfüggvényei

$$\mathcal{F}\{H_n^{(0)}(t)\} = (-j)^n H_n^{(0)}(\omega),$$

és ezekkel

$$G_{kn} = \mathcal{F}_k\{\Psi_n(t)\} = (-j)^n H_n^{(0)}(\omega_k).$$

A gyakorlati feladatokban az Hermite-függvényeket skálázni kell, mert a geofizikai alkalmazások széles időtartományt ölelhetnek fel. Az ennek megfelelően skálázott Hermite-polinomok a Rodriguez-formula felhasználásával

$$h_n(t, \beta) = (-1)^n e^{\beta t^2} \left(\frac{d}{dt} \right)^n e^{-\beta t^2},$$

és teljesítik az alábbi rekurziós egyenletet

$$h_{n+1}(t, \beta) = 2t\beta h_n(t, \beta) - 2n\beta h_{n-1}(t, \beta).$$

A skálázott Hermite-polinomok integrális tulajdonságát felhasználva kapjuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} h_n(t, \beta) h_m(t, \beta) dt = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} (2\beta)^n n! \delta_{nm},$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases},$$

ahol β a skálázó tényező és $h_0^{(0)}(t, \beta) = 1$, $h_1^{(0)}(t, \beta) = 2\beta t$ (Gröbner, Hoffreiter 1958). Így a skálázott Hermite-függvények

$$H_n(t, \beta) = \frac{e^{-\beta t^2/2} h_n(t, \beta)}{\sqrt{\pi/\beta} n! (2\beta)^n}$$

szerint határozhatók meg, és teljesül az

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t, \beta) H_m(t, \beta) dt = \delta_{nm}$$

ortogonalitási feltétel. A Jacobi-mátrix a következőképpen írható fel a $H_n(t, \beta)$ skálázott Hermite-függvények felhasználásával:

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t, \beta) e^{j\omega_k t} dt$$

Belátható, hogy

$$h_n(t, \beta) = \sqrt{\beta^n} h_n^{(0)}(t\sqrt{\beta}) \text{ és } H_n(t, \beta) = \sqrt[4]{\beta} H_n^{(0)}(t\sqrt{\beta}).$$

Ezzel, valamint a $t' = t\sqrt{\beta}$, $\omega' = \omega/\sqrt{\beta}$ jelölések bevezetésével végül a

$$G_{kn} = \frac{1}{\sqrt[4]{\beta}} \mathcal{F}_k\{H_n^{(0)}(t')\} = \frac{(-j)^n}{\sqrt[4]{\beta}} H_n^{(0)}\left(\frac{\omega_k}{\sqrt{\beta}}\right)$$

alakban gyorsan és integrálás nélkül számítható.

A Hilbert-transzformált előállítás robusztus inverzióval

A fentiekben előállított, Jacobi-mátrixszal a számított spektrumadatok meghatározhatók

$$U_k^{(\text{számított})}(\omega) = \sum_{n=1}^M B_n G_{kn},$$

ezzel a mért és számított spektrumadatok eltérésvektora

$$e_k = U_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=1}^M B_n G_{kn} \quad (11)$$

alakban írható, ahol (5) alapján $U_k^{(\text{mért})} = U_H(\omega_k)$. Az eltérésvektor L_2 normáját minimalizálva a

$$B = (G^T G)^{-1} U^{(\text{mért})} \quad (12)$$

eredményre jutunk. Amennyiben az adatrendszer kiugró zajjal terhelt, megfelelően választott súlyokat kell alkalmazni. Ez esetben a minimalizálandó függvény az eltérések súlyozott normája

$$E_w = \sum_{k=1}^N W_{kk} e_k^2,$$

ahol a W_{kk} diagonális mátrix elemei a Steiner-súlyok,

$$W_{kk} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + e_k^2}$$

az ε dihéziók az adatrendszerből (az e_k eltérésvektor-elemekből) egy belső iterációs eljárásban határozhatók meg (Steiner 1997). Ezek a súlyok azonban tartalmazzák az ismeretlen sorfejtési együtthatókat is, ezért a (11)-ben adott kifejezés nem kvadratikus. A probléma az iteratív újrásúlyozás (IRLS) módszerével oldható meg. Nevét a módszer onnan kapta, hogy az egyes iterációs lépésekben az előző lépés eredménye alapján meghatározott eltérésvektor elemeivel számítja újra a W_{kk} súlyokat, amelyek az adott iterációban szereplő ismeretlenektől már függetlenek.

A 0. iterációs lépésben a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszerével oldjuk meg a problémát. Ekkor (12) szerint

$$B^{(0)} = (G^T G)^{-1} G^T U^{(\text{mért})}.$$

Ezzel a sorfejtési együtthatókkal előállíthatjuk a számított adatok közelítését:

$$U_k^{(0)} = \sum_{n=1}^M B_n^{(0)} G_{kn},$$

és felírhatjuk az eltérésvektor elemeit:

$$e_k^{(0)} = U_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=1}^M B_n^{(0)} G_{kn},$$

amellyel a súlyokat a

$$W_{kk}^{(0)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(0)})^2}$$

formula szerint számíthatjuk. Az első iterációban a hiba-függvényt így közelítjük:

$$E_w^{(1)} = \sum_{k=1}^N W_{kk}^{(0)} e_k^2,$$

amely kifejezés kvadratikusan (a súlyok az előző iterációból származnak, a jelen iteráció ismeretlenjeit nem tartalmazó konstansok), és minimalizálása a súlyozott legkisebb négyzetek módszerének megfelelő inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet. Ennek megoldását

$$\mathbf{B}^{(1)} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(0)} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(0)} \mathbf{U}^{(\text{mért})}$$

ismét csak az

$$e_k^{(1)} = U_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=1}^M B_n^{(1)} G_{kn}$$

eltérések, illetve a súlymátrix

$$W_{kk}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(1)})^2}$$

újabb közelítésének számítására használjuk. Az IRLS eljárás q -edik lépésében kapott normálegyenlet-rendszer megoldása

$$\mathbf{B}^{(q)} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(q-1)} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^{(q-1)} \mathbf{U}^{(\text{mért})},$$

amellyel számított eltérések

$$e_k^{(q)} = U_k^{(\text{mért})} - \sum_{n=1}^M B_n^{(q)} G_{kn},$$

illetve a Steiner-súlyok

$$W_{kk}^{(q)} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + (e_k^{(q)})^2}.$$

Az így definiált IRLS iterációs eljárás valamely alkalmasan választott stop kritérium teljesüléséig folytatható, megoldásként az utoljára kapott sorfejtési együtthatókat fogad-

juk el, melyekkel a Hilbert-transzformált az időtartományban így állítható elő (a H indexet most már kiírva):

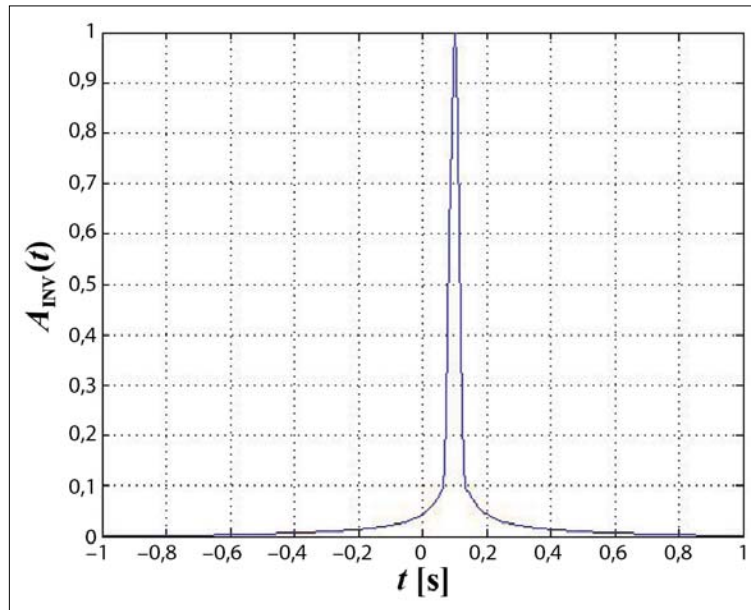
$$u_H(t) = \sum_{n=1}^M B_n \Psi_n(t),$$

ahol $\Psi_n(t)$ a skálázott Hermite-függvényeket jelenti:

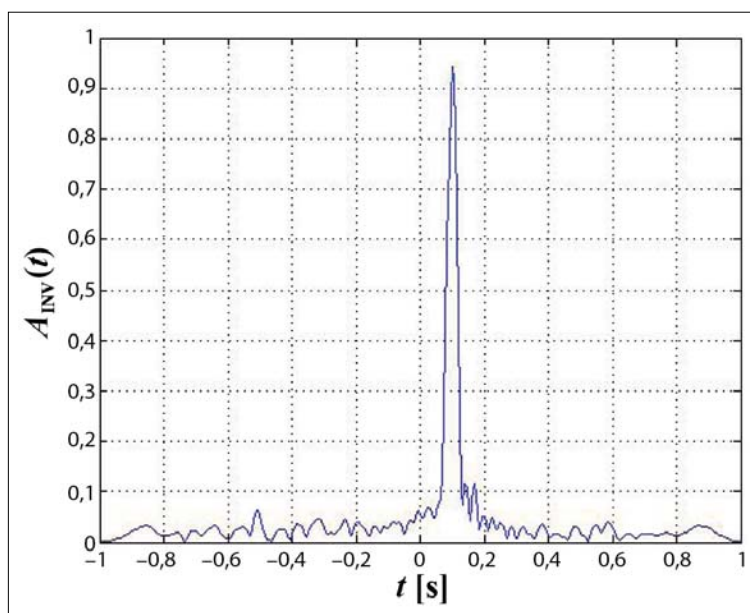
$$H_n(t, \beta) = \frac{e^{-\beta t^2/2} h_n(t, \beta)}{\sqrt{\sqrt{\pi/\beta} n! (2\beta)^n}}.$$

Numerikus vizsgálatok

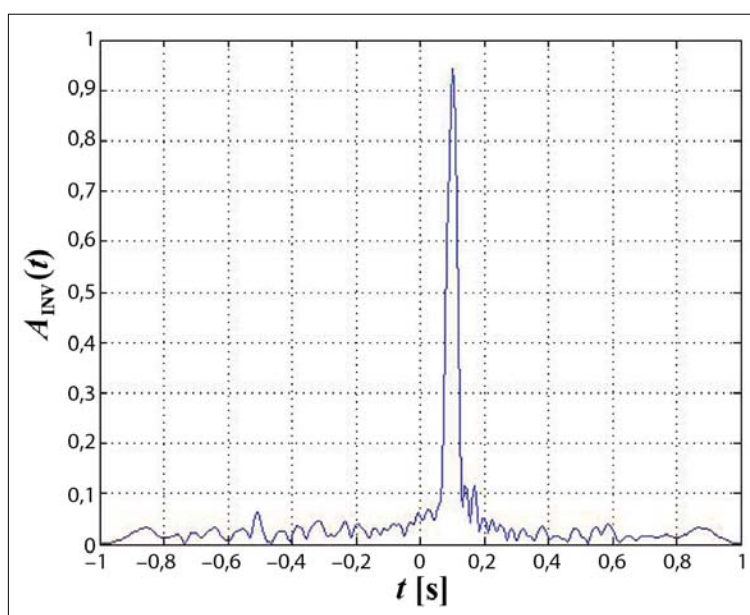
A 3a–c. ábrán a példaként felvett zajmentes, Gauss-, ill. Cauchy-eloszlású zajjal terhelt Ricker-wavelettel számított analitikus jel abszolút értékét (reflexióerősség) mutattuk be. A 4a–c. ábrán ugyanezen bemenő jelek robusztus inverzióval számított Hilbert-transzformáltjaival generált analitikus jel abszolút értékét szemléltetjük. Természetesen a zajmentes bemenő jelre módszerünk ugyanazt az eredményt szolgáltatja, mint a hagyományos DFT eljárással számított Fourier-transzformációt felhasználó eljárás. Az I. bemenő adatrendszer (Gauss-zaj) esetén az inverziós alapú Hilbert-transzformált a 4b. ábra tanúsága szerint kevésbé zajos, mint a hagyományos módszerrel előállított 3b. ábra. A nem túl nagy mértékű javulást az adattérben számított $d_{(I.)} = 0,0183$ távolság jellemzi. Lényeges javulást tükröz azonban a II. adatrendszernek (Cauchy-zaj) a Steiner-súlyokkal definiált robusztus inverziós módszerrel történt feldolgozása a 4c. ábra szerint. Itt – a 3c. ábrával összehasonlítva – a kiugró adatok hatásának szinte teljes elnyomását tapasztalhatjuk, amit az adattérbeli távolság $d_{(II.)} = 0,0064$ értéke is igazol. A hagyományos és az inverziós el-



4a. ábra Az inverzióval számított zajmentes reflexióerősség az időtartományban
Figure 4a The noiseless reflection strength in the time domain (new inversion method)



4b. ábra | Az inverzióval számított reflexióerősség az I. adatrendszer (Gauss-zaj) esetén
Figure 4b | The reflection strength in the time domain in case of data set I (new inversion method)



4c. ábra | Az inverzióval számított reflexióerősség a II. adatrendszer (Cauchy-zaj) esetén
Figure 4c | The reflection strength in the time domain in case of data set II (new inversion method)

járással kapott adattérbeli távolságok között közel egy nagyságrend eltérés mutatkozik.

A fenti eredmények a jel/zaj viszont jelentős javulását igazolják, amennyiben a Hilbert-transzformáció előállítására robusztus inverziós alapú Fourier-transzformációt és ugyancsak robusztus inverziós alapon felépített inverz Fourier-transzformációt használunk.

Következtetések

Korábbi publikációnkban (Szegedi, Dobróka 2012) a Steiner-féle leggyakoribb érték módszerre alapozva új inverzi-

ós alapú Fourier-transzformációs algoritmust mutattunk be. Az új IRLS inverziós Fourier-transzformációs módszerről bebizonyítottuk, hogy használatával nagymértékű zajelnyomás, illetve a kiugróan zajos adatokkal szemben számottevő rezisztencia érhető el. A jelen dolgozatban ezt az eljárást a Hilbert-transzformált előállításában alkalmaztuk. A bemutatott algoritmus kettős inverzió alapul, egyrészt a Fourier-transzformációra IRLS-FT-t alkalmazunk, másrészt a Hilbert-transzformált spektrumának előállítását követően az inverz Fourier-transzformációt is inverziós alapú robusztus/rezisztens eljárással számítjuk (IRLS-FT). Noha a kettős inverzió a hagyományos DFT/IDFT transzformációhoz

képest jelentős számítási idő többletet igényel, a bemutatott numerikus példa tanúsága szerint nagyfokú javulást érhetünk el az inverziós alapú Hilbert-transzformációs eljárással. A számítógépek jelenkori kapacitásának és gyorsaságának figyelembevételével valószínűsíthető, hogy egyes gyakorlati esetekben a többlet számítási idő tolerálható.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás a TÁMOP-4.2.4.A/2-11/1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg. A tanulmányban bemutatott eredmények az OTKA által támogatott kutatásokhoz is kapcsolódnak (OTKA nyilvántartási szám: K109441). A második szerző (D.M.) köszönetét fejezi ki a támogatásért, aki jelen

kutatásaiban támaszkodott a 2013-ban befejezett TÁMOP (4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001) projektben elért eredményekre is.

A tanulmány szerzői

Szegedi Hajnalka, Dobróka Mihály

Hivatkozások

- Gábor D., 1946: Theory of communication. Part I. J. Inst. Elect. Eng. 93, 429–441
- Gröbner W., Hoffreiter N., 1958: Integraltafel. Zweiter Teil. Bestimmte Integrale. Springer-Verlag, Wien und Innsbruck
- Steiner F., 1997: Optimum Methods in Statistics. Akadémiai Kiadó, Budapest
- Szegedi H., Dobróka M., 2012: Robusztus Fourier-transzformáció Steiner-súlyok alkalmazásával. Magyar Geofizika 53/1, 1–8
- Taner M. T., Koehler F., Sheriff R. E., 1979: Complex seismic trace analysis. Geophysics 44/6, 1041–1063
- Vaidyanathan P. P., 2008: Eigenfunctions of the Fourier transform. IETE Journal of Education 49/2, 51–58