

A maximum entrópia módszer (MEM) és az idősorok spektrumának meghatározása a MEM segítségével

VARGA MIHÁLY*

Jelen dolgozat kapcsolódik Szendrői Judit, Varga Mihály, Verő József a Maximum Entrópia Módszer alkalmazása geomágneses idősorokra c. cikkéhez, annak elméleti összefoglalását adja. A szerző röviden ismerteti a kutatásban használt programrendszert.

Настоящая работа связывается с статьей Юдит Сендреи, Михая Варга и Йожефа Вере под заглавием «Употребление Метода Максимальной Энтропии на геомагнитные данные», даёт её теоретическое обобщение. Автор кратко излагает программу, употреблённую в исследовании.

This paper is an extension to the paper on the "Use of Maximum Entropy Method in geomagnetic time series" by J. Szendrői, M. Varga, J. Verő and it is given a theoretical summary of the subject. The author describes the program package in a digested form.

Az entrópia fogalma és kapcsolata a spektrális sűrűséggel

Egy stacionáris folyamat entrópiája:

$$H = \frac{1}{4f_N} \cdot \int_{-f_N}^{f_N} \log P(f) df, \quad (1)$$

ahol $f_N = \frac{1}{2\Delta t}$ a Nyquist frekvencia, Δt a mintavételi távolság, $P(f)$ pedig a spektrális sűrűség, amit a $\Phi(k)$ autokovariancia függvény Fourier-transzformáltjával lehet kifejezni:

$$P(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{-2\pi i f k \Delta t}, \quad (2)$$

és ezzel az entrópia:

$$H = \frac{1}{4f_N} \int_{-f_N}^{f_N} \log \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(k) \exp(-i 2\pi f k \Delta t) \right] df. \quad (3)$$

A rendszer entrópiája a rendszer egyes eseményei előfordulási valószínűségeinek bizonytalanságával áll kapcsolatban. Bebonyolítható, hogy a legtöbb információt akkor kapjuk a rendszerről, ha az ismeretlen $\Phi(k)$ autokorrelációs koefficienseket úgy választjuk meg, hogy a rendszer entrópiája maximális

* MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézete, Sopron

legyen. A (3) variációs módszerrel történő maximálása után a $P(f)$ spektrális sűrűség:

$$P(f) = \frac{P_M}{f_N \left| 1 + \sum_{j=1}^{M-1} \gamma_{Mj} \exp(-i 2\pi f j \Delta t) \right|^2}. \quad (4a)$$

A maximum entrópia módszerről bebizonyítható, hogy analóg egy: M -ed rendű autoregresszív folyamat létrehozásával. Ez esetben a spektrális sűrűség:

$$P(f) = \frac{2\sigma_M^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^M a_{Mj} \exp(-i 2\pi f j \Delta t) \right|^2}. \quad (4b)$$

A (4a) és (4b) képletek formailag teljesen megegyeznek, csak a γ_{Mj} és a_{Mj} együtthatók kiszámítása különbözik. A fenti képletekben P_M , ill. σ_M^2 M -től függő konstansok a γ_{Mj} , ill. a_{Mj} az M -ed rendű predikciós hibaszűrő együtthatói, amelyeket a vizsgálandó adatsorból határozzunk meg, a (4a) esetben a Burg által javasolt iterációs módszerrel, a (4b) esetben a Yule-Walker módszerrel. Mindkét módszer sarkalatos kérdése a predikciós hibaszűrő hosszának, az M -nek, a meghatározása, ami a Burg módszer esetében az iterációk számát, a Yule-Walker módszernél az autoregresszív folyamat rendjét méri.

A_{Mj} és a P_M értékek meghatározása Burg módszerével

A felhasznált rekurziós képletek a következők:

$$P_0 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t^2, \quad (5)$$

$$b_{1,t} = X_t, \quad (6)$$

$$C_{1,t} = X_{t+1} + 1, \quad (7)$$

$$b_{M,t} = b_{M-1,t} - a_{M-1,M-1} \cdot c_{M-1,t}, \quad (8)$$

$$C_{M,t} = C_{M-1,t+1} - a_{M-1,M-1} \cdot b_{M-1,t+1}, \quad (9)$$

$$\gamma_{M,M} = -2 \sum_{t=1}^{N-M} b_{M,t} \cdot C_{M,t} \left/ \sum_{t=1}^{N-M} (b_{M,t}^2 + C_{M,t}^2) \right., \quad (10)$$

$$a_{M,K} = a_{M-1,K} - a_{M,M} \cdot a_{M-1,M-K}, \quad (11)$$

$$P_M = P_{M-1} \cdot (1 - a_{M,M}^2), \quad (12)$$

ahol:

$$t = 1 \dots N-1, \quad (13)$$

$$K = 1 \dots M-1. \quad (14)$$

A képletekben szereplő jelölések

X_t — a vizsgálandó adatsor

N — az adatsor hossza

M — a predikciós szűrő hossza, azaz az iterációs lépések száma

$a_{M, M'} M' = 1, \dots, M$ – a predikciós szűrőoefficiensek az M -edik iterációs lépésben

A predikciós szűrő hosszát Akaike ötlete nyomán abból a feltételből határozzuk meg, hogy a minden iteráció során kiszámított

$$FPE(M) = \frac{N + M + 1}{N - M - 1} P_M \quad (15)$$

mennyiség minimális legyen.

Számításainkban az (5)–(15) formulák kissé módosított változatát használtuk. A módosítások célja a számítások lerövidítése volt, egyrészt a nagy M esetén fellépő viszonylag nagy időigény, másrészt az eredményeket eléggé befolyásoló kerekítési és egyéb számítási hibák csökkentése miatt.

A programrendszer rövid ismertetése

A maximum entrópia módszert vizsgáló munkánkban ismertetett eredményeket egy az idősorok spektrálanalízisére szolgáló programrendszer segítségével határoztuk meg. A rendszer az idősorok spektrumaát a már említett MEM Burg és Yule-Walker változata mellett a Blackman-Tukey és a Gyors Fourier Transzformáció Welch változata alapján is képes meghatározni, így módon lehetőség van a különböző módszerek alkalmazhatóságának a vizsgálatára. Az alább közölt eredményeket mind a Burg-féle módszer segítségével határoztuk meg. A kapott spektrumokból több, az idősorokra jellemző, paramétert (pl. koherencia, polarizáció, keresztenergiaspektrum, ellipticitás, transfer függvény) is meg lehet határozni, majd a kapott eredmények plotteren kirajzoltathatók.

IRODALOM

- [1] *Iwabuchi, M., Fujui, R. and Utsumi, T.*, 1978: Conversational System of Spectrum Analysis by the Use of Graphic Display
- [2] *Ulrych, T. J. and Bishop, T. N.*, 1975: Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. Rev. Geophys. Space. Phys. 13.
- [3] *Smylie, D. E., Clarke, G. K. C. and Ulrych, T. J.*, 1973: Analysis of irregularities in the earth's rotation Method in Computational Physics, 13.
- [4] *Anderson, N.*, 1974: On the calculation of filter coefficients for maximum entropy analysis. Geophysics, 39, 69–72.