Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet
GEOFIZIKAI KÖZLEMÉNYEK
XVIII. kötet. 4. szám.

TÖRTÉNETI, ELVI ÉS GYAKORLATI ADALÉKOK A DERÉKSZÖGŰ HASÁB TÖMEGVONZÁSÁNAK SZÁMÍTÁSAIHOZ

HAÁZ ISTVÁN

I. HAÁZ:

CONTRIBUTIONS TO THE CALCULATIONS OF THE GRAVITATIONAL ATTRACTION OF A RIGHT RECTANGULAR PRISM

Formulae of MOLLWEIDE and BESSEL (1813). – RÖTHIG's paper (1860) on the relations between the potential of a right rectangular prism and its first and second derivatives. – The signs of the first and third derivatives of the potential in the paper of MADER (1951). – A list of the formulae of the second derivatives of the potential of the right rectangular prism.

И. ХАЗ

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ

Формулы MOLLWEIDE и BESSEL (1813). – Связь притяжения прямоугольной призмы с производными потенциала по RÖTHIG (1860). – Знак первых и третьих производных согласно работе MADER (1951). – Перечень различных видов формул вторых производных потенциала для прямоугольной призмы.

I. MOLLWEIDE és BESSEL képletei

NAGY Dezsőnek a Geophysics 1966. évi áprilisi számában a derékszögű hasáb gravitációs vonzásáról írt közleményéhez a Geophysics 1966. októberi számában két hozzászólás jelent meg.

DE BREMAECKER hozzászólásában arra mutatott rá, hogy MACMILLAN 1930-ban megjelent könyvében közölt már képletet ilyen test potenciáljának kiszámítására, és igen egyszerű eljárást adott a potenciál deriváltjainak kiszámítására is.

CORBATÓ azt jegyezte meg, hogy NAGY Dezsőnek a derékszögű hasáb gravitációs vonzásának vertikális komponensére kapott és a Geophysics-ben közölt eredményét nemcsak SZOROKIN és e sorok írója, hanem a horizontális komponensekkel együtt már EVEREST is levezette, 1830-ban, 136 évvel NAGY előtt közölte, és az indiai Satpura Range okozta topografikus függővonal-elhajlások megbecslésére alkalmazta.

A derékszögű hasáb tömegvonzása problémájának megoldása azonban már jóval EVEREST közlése előtt ismeretes volt. Ugyanis a ZACH-féle Monatliche Correspondenz. . . . . c. folyóirat 1811 novemberi számában már két (speciális helyzetű) derékszögű parallelepipedon egymásra gyakorolt vonzásának meghatározását tűzte ki megoldandó feladatul. A feladat megoldásával kapcsolatban MOLLWEIDE és tőle függetlenül BESSEL foglalkozott a derékszögű hasáb tömegvonzásával illetve e vonzás potenciáljával.

MOLLWEIDE a függőleges oldalú derékszögű hasáb vonzásának függőleges komponensét közölte. A hasáb két vízszintes alapélének hosszát a és b-vel, függőleges oldalélének hosszát c-vel jelölte. Az egyik függőleges oldalél felfelé való meghosszabbításában, az alsó szögponttól h, tehát a felsőtől $h-c$ távolságban levő P pontban a hatás függőlegesen lefelé irányuló komponensét a következő alakban közölte (Monatl. Corr., 1813. jan., 33. old.): a keresett vonzás

$$= h \operatorname{Arc\,sin} \frac{ab}{\sqrt{(a^2+h^2)(b^2+h^2)}} \left| = h \operatorname{arc\,tang} \frac{ab}{h\sqrt{a^2+b^2+h^2}} \right|$$

$$-(h-c) \operatorname{Arc\,sin} \frac{ab}{\sqrt{[a^2+(h-c)^2][b^2+(h-c)^2]}}$$

$$+ a \log \frac{[b+\sqrt{a^2+b^2+(h-c)^2}]\sqrt{a^2+h^2}}{[b+\sqrt{a^2+b^2+h^2}]\sqrt{a^2+(h-c)^2}}$$

$$+ b \log \frac{[a+\sqrt{a^2+b^2+(h-c)^2}]\sqrt{b^2+h^2}}{[a+\sqrt{a^2+b^2+h^2}]\sqrt{b^2+(h-c)^2}}$$

E képlet arctangenses változata az én 1953 évi közleményemben a φ_z primitív függvényre megadott képletből a 0, 0, $h-c$ alsó határok és az a, b, h felső határok behelyettesítésével és összevonással is kiadódik.

Ha a P pont egybeesik a hasáb megfelelő felső csúcspontjával, akkor $h = c$ és akkor is véges értékű hatás adódik:

$$c \operatorname{Arc\,sin} \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}} + a \log \frac{[b+\sqrt{a^2+b^2}]\sqrt{a^2+c^2}}{a[b+\sqrt{a^2+b^2+c^2}]} +$$

$$+ b \log \frac{[a+\sqrt{a^2+b^2}]\sqrt{b^2+c^2}}{b[a+\sqrt{a^2+b^2+c^2}]}$$

MOLLWEIDE e képlete $(a, b, c) = (x, y, z)$ jelöléssel megegyezik ZILAHI-SEBESS Lászlónak 1966-ban ugyanerre a speciális esetre közölt (16) számú képletével.

Látjuk, hogy az $f\sigma$ tényező egyik képletben sem szerepel. Én és ZILAHI-SEBESS kifejeztük tárgyalásunkban, hogy az $f\sigma$ tényezővel osztott hatás képletével foglalkozunk; MOLLWEIDE nem nyilatkozik az $f\sigma$ tényező elhagyásáról.

BESSEL 1812. okt. 30-án ugyanennek a feladatnak a megoldásával kapcsolatban a folyóirat szerkesztőjéhez (LINDENAU-hoz) írt levelében a derékszögű hasáb tömegvonzása potenciáljának képletét közölte (Mon. Corr., 1813. jan., 82–83 old.).

Jelöljük a vonzó „parallelepipedum" részecskéinek az egyik sarokponttól számított koordinátáit x, y, z-vel, a vonzott pont koordinátáit ugyanettől a kezdőponttól x', y' z'-vel; a parallelepipedum sűrűségét Δ-val, és a méreteit (a kezdőponttal diametrálisan szemben levő sarokpont koordinátáit) a, b, c-vel; legyen továbbá:

$$q = [X^2 + Y^2 + Y^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(X, Y, Z) = -YZ\,l\,(q-X) + X^2 \operatorname{Arc}\left[\operatorname{tgt} = \frac{q-Y-Z}{X}\right]$$

$$-XZ\,l\,(q-Y) + Y^2 \operatorname{Arc}\left[\operatorname{tgt} = \frac{q-X-Z}{Y}\right]$$

$$-XY\,l\,(q-Z) + Z^2 \operatorname{Arc}\left[\operatorname{tgt} = \frac{q-X-Y}{Z}\right]$$

akkor La Place jelölésével

$$V = \Delta \cdot \left| \begin{array}{l} \varphi(x', y', z') - \varphi(x', y', z'-c) \\ -\varphi(x', y'-b, z') + \varphi(x', y'-b, z'-c) \\ -\varphi(x'-a, y', z') + \varphi(x'-a, y', z'-c) \\ +\varphi(x'-a, y'-b, z') - \varphi(x'-a, y'-b, z'-c) \end{array} \right|$$

az a függvény, amelyből a parallelepipedum vonzása így adódik:

$$x \text{ irányában } = -\left(\frac{dV}{dx'}\right)$$

$$y \text{ irányában } = -\left(\frac{dV}{dy'}\right)$$

$$z \text{ irányában } = -\left(\frac{dV}{dz'}\right)$$

Látjuk, hogy Bessel azt a függvényt jelölte V-vel, amelynek a koordináták szerint képezett negatív deriváltjai adják a vonzás (térerősségének) komponenseit. Ennek megfelelően Bessel φ (x, y, z) függvénye ellenkező előjelű az én 1953 évi dolgozatom φ függvényével, V pedig ellenkező előjelű dolgozaton U függvényével. (Bessel a V függvényt még nem nevezte potenciálnak: ezt az elnevezést Green vezette be 1828-ban.)

Látjuk továbbá, hogy Bessel képletében a sűrűség már szerepel, de az f tényező itt is hiányzik. Az f tényező elhagyása itt az egységeknek a CGS-rendszertől eltérő megválasztását jelentheti.

Bessel-nek ez a közleménye benne van értekezéseinek 1876-ban kiadott gyűjteményében is. (II. kötet, 353–354. old.).

II. Kapcsolat a derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai között Röthig szerint

A derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai közötti kapcsolatot 1953. évi közleményemben a potenciálnak és deriváltjainak primitív függvényeire (határozatlan integráljaira) mutattam ki. A potenciált és a deriváltjait kifejező határozott integrálokra vonatkozóan a megfelelő kapcsolatot O. RÖTHIG már 1860-ban megjelent közleményében tárgyalta. Az én eredményeim azonban előnyösebben alkalmazhatók, mert mindig közvetlenül megadják a potenciálnak illetve a potenciál első deriváltjainak primitív függvényeit, és ezekből a határozott integrálok a szokásos eljárással kiszámíthatók. RÖTHIG eredményei csak olyan határozott ingterálokra vonatkoznak, amelyekben az r távolság az integrációs változók négyzetösszegének négyzetgyökével egyenlő, és mindhárom változó szerint az integrálás alsó és felső határa csak előjelben különbözik egymástól. Ez azt jelenti, hogy a kezdőpontul választott vonzott pontnak a derékszögű hasáb geometriai középpontjában kell lennie. Ez azonban a tétel általános alkalmazhatóságának nem akadálya, mert – mint maga RÖTHIG kifejti – az általános helyzetű vonzott pontra vonatkozó határozott integrál 8 olyan derékszögű hasábra vonatkozó integrál összegének 8-adrészével egyenlő, amely hasáboknak az adott vonzott pont a geometriai középpontja.

RÖTHIG dolgozata a Journal für Mathematik LVIII. kötetében jelent meg (249 – 258 old.), de tárgyalása – csekély módosítással – megtalálható RAUSENBERGER Analytische Mechanik c. művében is (1888, I. köt., 253 – 256. old.)

RÖTHIG eredményei is, és az én eredményeim is, a derékszögű hasáb potenciáljának és e potenciál első deriváltjainak kiszámítását a potenciál könnyen meghatározható második deriváltjainak kiszámítására vezetik vissza. Én a második deriváltak kifejezéseit LANCASTER-JONES 1929. évi közleményéből vettem át, RÖTHIG maga határozta meg ezeket. Eredményei, a kezdőpont és a vonzott pont helyzetének általa történt felvételének figyelembevételével, megfelelnek LANCASTER-JONES képleteinek, a potenciál első deriváltjaira és a potenciálra kapott eredményei pedig, ugyanezek figyelembevételével, az én dolgozatom eredményeinek.

Én a derékszögű hasáb potenciálja harmadik deriváltjainak primitív függvényeire is érdekes kapcsolatokat állapítottam meg. RÖTHIG és RAUSENBERGER nem tárgyalja a harmadik deriváltak meghatározását.

III. A páratlan rendszámú deriváltak előjeléről

A derékszögű hasáb tömegvonzása potenciáljának, e potenciál első, második és harmadik deriváltjainak közvetlen integrálással történő meghatározását legteljesebben MADER tárgyalta 1951-ben megjelent munkájában. MADER eredményei teljesen megfelelnek az általam primitív függvények alakjában közölt eredményeknek, azzal az eltéréssel, hogy a logaritmikus tagokat az $\mathfrak{Ar}$ $\mathfrak{Sin}$ függvénnyel is kifejezi, és hogy az első és a harmadik deriváltakra közölt képletei az általam közölt képletekkel ellenkező előjelűek. Az előjeleltérés eredete a következő:

Én, az eléggé elterjedt szokásnak megfelelően, a vonzott pont koordinátáit x, y, z-vel, a vonzó test pontjainak koordinátáit ξ, η, ζ-val jelölöm és e jelölésnek megfelelően a potenciál deriváltjait a vonzott pont x, y, z koordinátái szerint, a potenciált és deriváltjait kifejező határozott integrálokat pedig a vonzó test pontjainak ξ, η, ζ koordinátái szerint képezem. Egyszerűsítésül – ugyanúgy, mint MADER – a kezdőpontot én is az x, y, z vonzott pontba helyezem, de a vonzó test ξ, η, ζ pontjának erre a kezdőpontra vonatkozó relatív koordinátáit nem jelölhetem – úgy, mint MADER – x, y, z-vel, hanem LANCASTER-JONES nyomán a, b, c-val jelölöm:

$$\xi - x = a$$

$$\eta - y = b$$

$$\zeta - z = c$$

és e transzformáció után az integrálásokat ξ, η, ζ, helyett az a, b, c változók szerint képezem.

MADER – sajnálatosan – a vonzott pont koordinátáit (a potenciál deriváltjainak differenciálási változóit) is és a vonzó test pontjainak a vonzott pontra vonatkoztatott relatív koordinátáit (az integrálás változóit) is x, y, z-vel jelöli. Ez az integrálás eredményét nem befolyásolja, mert a határozott integrál értéke független attól, hogy az integrációs változót milyen betűvel jelöljük, de előjelhibát okoz akkor, amikor áttér a potenciál deriváltjainak meghatározására.

Ugyanis akkor, amikor MADER az integrál jele után x, y, z szerint differenciál, akkor az én jelölésem szerint voltaképpen az a, b, c szerinti deriváltakat képezi, márpedig az a, b, c változókat bevezető transzformáció képleteiből következik, hogy $\frac{1}{r}$-nak x, y, z szerint képezett deriváltjai közül csak a páros rendszámúak egyeznek meg az a, b, c szerint képezett deriváltakkal, a páratlan rendszámú deriváltak a megfelelő a, b, c változók szerinti deriváltak -1-szeresei. Ez az oka annak, hogy MADER közleményében a potenciál páratlan rendszámú deriváltjai az általam (és mások által) közölt helyes eredményekkel ellenkező előjelűek.

IV. A második deriváltak primitív függvényeinek különböző alakjai

A derékszögű hasáb tömegvonzásának tárgyalását az utóbbi években az tette időszerűvé, hogy a nagyteljesítményű számológépek alkalmazásával lehetővé vált, hogy a gyakorlati gravitációs kutatások eredményeinek értelmezésére eddig alkalmazott úgynevezett „kétdimenziós" hatók helyett valóságos „háromdimenziós" hatókat vegyünk számításba. A legegyszerűbb ilyen háromdimenziós ható a függőlegesen álló derékszögű hasáb, és ennek legegyszerűbben mérhető hatása az a Δg-anomália, amelyet e hasáb tömegvonzása a földi nehézség erőterében létesít. Eredményeink egyike szerint e hatás $f\sigma$-val osztott primitív függvénye:

$$\varphi_z = -(a\varphi_{zx} + b\varphi_{zy} + c\varphi_{zz})$$

és ebből a Δg-hatás értéke:

$$\Delta g = -f\sigma[a\varphi_{zx} + b\varphi_{zy} + c\varphi_{zz}]_{a_1 b_1 c_1}^{a_2 b_2 c_2}$$

Tehát e hatás kiszámításához a második deriváltak φ_{zx}, φ_{zy}, φ_{zz} primitív függvényeinek kifejezéseire van szükségünk. A következőkben e primitív függvényeknek MOLLWEIDE és BESSEL képleteiből kikövetkeztethető, továbbá LANCASTER-JONES és MADER képleteiben szereplő alakjait, valamint az ezekből adódó, illetve ezek nyomán megállapítható további kifejezéseit foglalom össze. Egyenlőségjel helyett ponttal ellátott egyenlőségjelet alkalmazok, annak kifejezésére, hogy e jel két oldalán álló kifejezések egymástól oly tagok összegével különbözhetnek, amely tagok az a, b, c változók közül legalább az egyiktől függetlenek. Csak a Δg-hatás kiszámításához szükséges φ_{zx}, φ_{zy}, φ_{zz} primitiv függvények kifejezéseit közlöm:

$$\begin{aligned}
\varphi_{zx} &\doteq \ln(r+b) \\
&\doteq -\ln(r-b) \\
&\doteq \frac{1}{2}\ln\frac{r+b}{r-b} \\
&\doteq \ln\frac{r+b}{\sqrt{c^2+a^2}} \\
&\doteq \ln\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{r-b} \\
&\doteq \operatorname{ar\,sh}\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{zy} &\doteq \ln(r+a) \\
&\doteq -\ln(r-a) \\
&\doteq \frac{1}{2}\ln\frac{r+a}{r-a} \\
&\doteq \ln\frac{r+a}{\sqrt{b^2+c^2}} \\
&\doteq \ln\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{r-a} \\
&\doteq \operatorname{ar\,sh}\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{zz} &\doteq 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{r+a+b}{c} & &\doteq -2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{c}{r+a+b} \\
&\doteq 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{r-a-b}{c} & &\doteq -2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{c}{r-a-b}
\end{aligned}$$

$$\doteq 2 \operatorname{arc\,sin} \frac{r+a+b}{\sqrt{2(r+a)(r+b)}} \qquad \doteq -2 \operatorname{arc\,sin} \frac{c}{\sqrt{2(r+a)(r+b)}}$$

$$\doteq 2 \operatorname{arc\,sin} \frac{r-a-b}{\sqrt{2(r-a)(r-b)}} \qquad \doteq -2 \operatorname{arc\,sin} \frac{c}{\sqrt{2(r-a)(r-b)}}$$

$$\doteq -2 \operatorname{arc\,cos} \frac{r+a+b}{\sqrt{2(r+a)(r+b)}} \qquad \doteq 2 \operatorname{arc\,cos} \frac{c}{\sqrt{2(r+a)(r+b)}}$$

$$\doteq -2 \operatorname{arc\,cos} \frac{r-a-b}{\sqrt{2(r-a)(r-b)}} \qquad \doteq 2 \operatorname{arc\,cos} \frac{c}{\sqrt{2(r-a)(r-b)}}$$

$$\doteq -\operatorname{arc\,tg} \frac{ab}{cr} \qquad \doteq \operatorname{arc\,tg} \frac{cr}{ab}$$

$$\doteq -\operatorname{arc\,sin} \frac{ab}{\sqrt{(c^2+a^2)(b^2+c^2)}} \qquad \doteq \operatorname{arc\,sin} \frac{cr}{\sqrt{(c^2+a^2)(b^2+c^2)}}$$

$$\doteq -\operatorname{arc\,sin} \frac{ab}{\sqrt{c^2r^2+a^2b^2}} \qquad \doteq \operatorname{arc\,sin} \frac{cr}{\sqrt{c^2r^2+a^2b^2}}$$

$$\doteq -\operatorname{arc\,cos} \frac{cr}{\sqrt{(c^2+a^2)(b^2+c^2)}} \qquad \doteq \operatorname{arc\,cos} \frac{ab}{\sqrt{(c^2+a^2)(b^2+c^2)}}$$

$$\doteq -\operatorname{arc\,cos} \frac{cr}{\sqrt{c^2r^2+a^2b^2}} \qquad \doteq \operatorname{arc\,cos} \frac{ab}{\sqrt{c^2r^2+a^2b^2}}$$

Ezek alapján a derékszögű hasáb Δ_g-hatásának legegyszerűbb képlete:

$$\Delta g = -f\sigma \left| a \ln(r+b) + b \ln(r+a) + 2c \operatorname{arc\,tg} \frac{r+a+b}{c} \right]_{a_1 b_1 c_1}^{a_2 b_2 c_2}$$

A negatív előjel elkerülésére az alsó és felső határokat felcserélve és a határokat csupán az indexeikkel jelölve:

$$\Delta g = f\sigma \left[a \ln(r+b) + b \ln(r+a) + 2c \operatorname{arc\,tg} \frac{r+a+b}{c} \right]_{222}^{111}$$

E képlet alapján — ZILAHI-SEBESS László programozása szerint — a derékszögű hasáb Δg hatásának kiszámítása igen kedvezően gépesíthető.

A függővonalelhajlás-komponensek kiszámításához még szükséges φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{yy} primitiv függvények kifejezéseit nem közlöm: ezek a φ_{zx}, φ_{zy}, φ_{zz} primitív függvények előbb közölt kifejezéseiből az a, b, c változók ciklikus felcserélésével kaphatók meg.

IRODALOM

BESSEL, F. W., 1813. Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Bessel. Zach's Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Bd. XXVII.

BESSEL, F. W., 1876. Abhandlungen von Fr. W. BESSEL, Bd. II.

BREMAECKER, J. CL. DE, 1966. Discussion on „The gravitational attraction of a right rectangular prism" by DEZSŐ NAGY. – GEOPHYSICS, VOL. XXXI, No. 5.

CORBATÓ, Ch. E., 1966. Discussion on „The gravitational attraction of a right rectangular prism" by DEZSŐ NAGY. – GEOPHYSICS, VOL. XXXI, No. 5.

HAÁZ I. B., 1953. Kapcsolat a derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai között. Geofizikai Közlemények, II. 7.

LANCASTER-JONES, E., 1929. Computation of Eötvös Gravity Effects. Geophysical Prospecting. Amer. Inst. of. Min. and Metallurg. Engineers, New York, N. Y.

MADER, K., 1951. Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper u. seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Sonderheft 11 der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungwesen.

MOLLWEIDE, K. B., 1813. Auflösung einiger die Anziehung von Linien, Flächen und Körpern betreffenden Aufgaben unter denen auch die in der Monatl. Corresp. Bd. XXIV. S. 522. vorgelegte sich findet. Zach's Monatl. Corresp. Bd. XXVII.

MONATL. CORRESP. 1811. Bd. XXIV. S. 522. (Aufgabe).

NAGY, D. 1966. The gravitational attraction of a right rectangular prism. Geophysics, VOL. XXXI. No. 2.

RAUSENBERGER, O., 1888. Lehrbuch der analytischen Mechanik, Bd. I.

RÖTHIG, O., 1860. Das Potential eines homogenen rechtwinklingen Parallelepipedums. Journal für Mathematik, Bd. LVIII. Heft 3.

ZILAHI-SEBESS L., 1966. Háromdimenziós tömeg gravitációs hatásának kiszámítása az UMC – 1 elektronikus számítógéppel. Geofizikai Közlemények XV. 1 – 4.

TARTALOM

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ