AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS OKTATÁSÁRÓL

KÖRTESI PÉTER

Összefoglalás

A határozott integrál értelmezése során különböző integrál-összegekkel találkozhatunk. Nyilvánvaló, hogy a határozott integrál pontosan akkor létezik, ha ezek az integrál-összegek konvergensek. Ez azt is jelenti, hogy ha egy határozott integrál létezik, mert pl. van primitív függvénye az adott intervallumon, vagy az intervallumon folytonos függvény integrálját tekintjük, akkor ez a határozott integrál egyben mindenfajta, sajátos formában felírt integrál-összegnek a határértéke is.

Kulcsszavak: *integrálszámítás, integrál összegek, oktatás,*

The education of the integral calculus

Abstract

While introducing the notion of definite integral one use different integral sums. By definition the definit integral exists exactly when the given sums converge. Once the definite integral exists (e.g. the given function has pimitive or it is continous on that interval) it will be the limit of all sums, even special form integral sums as well.

Keywords: *integral calculus, integral sum, teaching*

Elméleti háttér

Ha az f Riemann integrálható az elmélet szerint a $\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_k^n)$ ([Denkinger, Gyúrkó 1999) Riemann integrál összeg határértéke az $\int_a^b f(x)dx,$ ahol Δ_n a felosztásokat, ξ_k^n az adott felosztásnak megfelelő intervallumhoz tartozó független változót jelöli.

Ha tehát adott egy integrálható $f : [a,b] \to R$ függvény és az $[a,b]$ intervallumnak egy egyenlőközű felosztása, mégpedig a $\frac{b-a}{n}$ hosszúságú részintervallumokra, akkor az $[a,b]$ intervallum osztópontjainak halmaza:

$$\left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, ..., a+(n-1)\frac{b-a}{n}, a+n\frac{b-a}{n}\right\}$$

Ehhez képezzük a

$$\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

integrálösszeget, ahol

$$f(a+k\frac{b-a}{n})$$

rendre az f függvénynek az

$$\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$$

részintervallumok jobboldali végpontjában felvett értékei, ekkor az előbbiek értelmében:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$$

s

Ha bizonyos összegek határértékének a kiszámítása a célunk, akkor már csak azt kell felismernünk, hogy milyen függvényhez és milyen intervallumhoz tartozó integrál-összeg írható fel.

1. Példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}})$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}})=$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\frac{1}{n})=$$

$$\lim_{n\to\infty}((\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}+...+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}})\frac{1}{n})=$$

$$\lim_{n\to\infty}((\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+...+\sqrt{\frac{n}{n}})\frac{1}{n})=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{1}{n})\frac{1}{n}, \text{ahol } f\ :\ [0,1]\to \mathsf{R},\ f(x)=\sqrt{x},$$

ez viszont egy integrálható függvény, és ismert, hogy:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}})=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

A vázolt módszer nyilván más módosításokkal is alkalmazható, pl. ha az integrál-összeget nem a részintervallumok felső, hanem az alsó végpontjában, vagy akár egy köztes pontjában (felezőpont) írjuk fel, vagy ha az intervallum felosztása nem n, hanem pl. 2n, 2^n részre történik. Ezekben az esetekben a megfelelő módosítások után hasonlóan számítható ki az adott összegek határértéke.

2. Példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}}{n}\right).$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\frac{1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+(k-1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \text{ ahol } f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to \mathsf{R}, f(x)=\cos x,$$

ez viszont egy integrálható függvény, és ismert, hogy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}}{n}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Az elv alkalmazható a határozott integrál helyett például az improprius integrálok esetén is, bizonyos megszorításokkal. Elégséges például, ha az integrandusz függvény pozitív és monoton csökkenő lásd pl.:(Démidovitch *et al*., 1968).

3. példa.

Számítsuk ki a következőösszeg határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+\ldots+1}{n}\right)$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+\ldots+1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)\frac{1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{1}{n})\frac{1}{n}$$

ahol

$$f\ :\ [0,1]\to \mathsf{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

ez viszont egy improprius integrálhoz vezet, és ismert, hogy

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0+0}\int_a^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0+0}2\sqrt{x}\Big|_a^1=2.$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+\ldots+1}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0+0}\int_a^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0+0}2\sqrt{x}\Big|_a^1=2$$

Bizonyos esetekben az adott összeg csak egy felsőkorlátját tudjuk meghatározni, de ez is fontos, hiszen a felülről korlátos pozitív tagú összegek egy monoton növekvő sorozatot alkotnak, tehát az összegek-sorozata (sor) monoton nő és felülről korlátos akkor konvergens a sorozat (a sor konvergens). Tehát ez a módszer alkalmas bizonyos sorok konvergenciájának a vizsgálatára is.

4. Példa.

Igazoljuk, hogy az

$$s_n=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

egy konvergens sor részösszege (Draghicescu et al., 1976).

Az adott sor felülről korlátozható az $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ improprius integrál egy lehetséges integrál összegének határértékével, csak például elengedjük azt a kikötést, hogy a részintervallumok hossza csökkenő kell, hogy legyen.

Felírhatjuk:

$$s_n\le 1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)1\le 1+\int_1^\infty\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=3,$$

mivel az $[1,\infty)$ intervallum egy lehetséges felosztása az $\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$, és ekkor a részintervallumok hossza 1, ez ugyan nem csökken a 0-hoz, de alkalmas arra, hogy alulról korlátozza az integrál értékét. Tehát maga az összeg is határértékben az adott improprius integrálnak egy alsó korlátja. Ugyanakkor:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{b}}+\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = 2.$$

Tehát

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}} \le 1+\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = 3,$$

azaz a sor felülről korlátos és emellett a sor pozitív tagú, tehát monoton növekvő, és így konvergens.

5. Példa.

Legyen $f\ :\ [0,1]\to R$ Egy Riemann-értelemben integrálható függvény. Az $(a_n)_{n\ge 1}$ szigorúan pozitív tagú sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezik (Giurgiu – Turtoiu, 1981):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=0$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)\frac{a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\int_0^1 f(x)dx;$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kf\left(\frac{k^2}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

Megoldás:

a) Vegyük a $(\Delta_n)_{n\ge 1}$ felosztások sorozatát, ahol

$$\Delta_n=\left\{0,\frac{a_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n},\frac{a_1+a_2}{a_1+a_2+\ldots+a_n},\ldots,\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_n},\ldots,1\right\};$$

és amelyre a felosztás normája

$$\|\Delta_n\|=\frac{\max(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\to 0.$$

Ha a függvényértékeket pontosan a felosztási pontokban vesszük, azaz

$$\xi_k^n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_n},\ k=1,2,\ldots n$$

rögtön belátható, hogy az egyes felosztásokhoz tartozó Riemann-féle összeg

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_k^n)=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)\frac{a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

és így ezen összegek sorozatának határértéke (mivel a felosztások normája tart nullához), éppen $\int_0^1 f(x)dx$

b) Tekintsük a $\Delta_n = \left\{0, \frac{1^2}{n^2}, \frac{2^2}{n^2}, ..., \frac{k^2}{n^2}, ..., 1\right\}$ felosztásokat, amelyekre az osztópontok

$$x_k^n = \frac{k^2}{n^2}, k = 1, 2, ..., n.$$

Észrevehető, hogy $x_k^n - x_{k-1}^n = \frac{2k-1}{n^2} \le \frac{2n-1}{n^2}$ és ezért $\|\Delta_n'\| \to 0.$

Az egyes közbe esőpontokat újból a felosztási pontokba választva,

$$\xi_k^n \in \left[x_{k-1}^n, x_k^n\right], \xi_k^n = x_k^n = \frac{k^2}{n^2} (k = 1, 2, ..., n);$$

$$\sigma_{\Delta_n'}(f, \xi_k^n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n^2} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k^2}{n^2}\right),$$

ahonnan:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta_n'}(f, \xi_k^n) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k^2}{n^2}\right). \quad (1)$$

Mivel az f függvény integrálható, így korlátos is, tehát létezik olyan $M > 0$, amelyre $|f(x)| \le M,$ bármely $x \in [0,1]$ értékre. Ennek alapján

$$\left|\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k^2}{n^2}\right)\right| \le \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n \left|f\left(\frac{k^2}{n^2}\right)\right| \le \frac{nM}{2n^2} \to 0,$$

vagyis az (1)-es összefüggés jobboldalán a második tag határértéke nulla.

Az (1) összefüggésben határértékre térve kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

Köszönetnyilvánítás:

A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 projekt támogatásával készült el.

Hivatkozott források:

Denkinger G. Gyurkó L. (1999): Analízis gyakorlatok, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999, 70-71, 265-267.

Démidovitch M., et all. (1968): Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathematique, Mir Moscou, 1968, 159.
Draghicescu et all. (1976): Ghid de pregatire la matematica, Scrisul Rominesc, Craiova, 1976, 195-196.
Giurgiu I. - Turtoiu F. (1981): Culegere de probleme de matematica, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1981, 217-219.

Szerző:

Körtesi Péter,PhD
egyetemi docens
Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék
matkp@uni-miskolc.hu