KOMPLETTEN POZITÍV LEKÉPEZÉSEK ÉS R. V. KADISON EGY SEJTÉSE

KOVÁCS ISTVÁN BÉLA

Összefoglalás

Múlt évben az operátor tér és a kompletten korlátos leképezés fogalmát jártuk körül, azaz azt vizsgáltuk, hogyan adható meg alkalmas norma sorozat egy lineáris tér vektoraiból alkotott négyzetes mátrixokon. Ez évben egy C-algebra elemeiből alkotott mátrixok kvantálásával foglalkozunk. Ha A egy C*-algebra és* $M^n(A)$ *az olyan n x n-es mátrixok tere, amelyek elemei A-ból valók, akkor* $M^n(A)$ *is természetes módon C*-algebra, pozitív elemekkel. Definiáljuk C*-algebrák kompletten pozitív leképezéseit és bemutatunk néhány példát. Megvizsgáljuk a pozitivitás, kompletten pozitív tulajdonság, valamint a komplett korlátosság viszonyát, majd bemutatunk néhány a kompletten pozitív leképezésekre vonatkozó tételt. Végül néhány, az operátor tér struktúrából származó többlet információt kihasználó tétel segítségével két ekvivalens megfogalmazását ismertetjük Kadison egyik, a C*-algebrák algebra homomorfizmusaira vonatkozó sejtésének.*

Kulcsszavak: *C*-algebra, kompletten pozitív operátor, deriváció*

Completely positive maps and a conjecture of Kadison's

Abstract

Last year we have introduced operator spaces and completely bounded maps, that is we investigated how can a sequence of norms be defined on matrices constructed from the vectors of a linear space. This year we quantize matrices with entries from a C-algebra. If A is a C*-algebra then* $M^n(A)$ *is again a C*-algebra in a natural way, with positive elements. We define the completely positive maps of C*-algebras and list some examples. We inspect the relationship between complete positivity and complete boundedness and quote further theorems on completelypositive maps. Finally, with the help of some theorems using the extra information encoded in the operator space structure we show two equivalent forms of Kadison's conjecture on bounded algebra homomorphisms of C*-algebras.*

Key words: *C*-algebra, completely positive operator, derivation*

Bevezetés

Múlt évben bevezettük az operátor tér fogalmát

X Banach tér; $A \in M_n(X)$, $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adjuk meg norma sorozatot $M_n(X)$-en, n = 2, 3, …., hogy teljesítse

$$\|T \oplus S\| = \left\| \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right\| \max\{\|A\|, \|B\|\}$$

és

$$\|\alpha \cdot T \cdot \beta\| \leq \|\alpha\| \cdot \|T\| \cdot \|\beta\|$$

axiómákat, ahol

$A \in M_n(X)$, $B \in M_m(X)$ és $\alpha \in M_{m,n}(C)$, $\beta \in M_{n,m}(C)$. Ekkor $(A, \|...\|_n)$ absztrakt operátor tér. Legyen H Hilbert tér, B(H) korlátos operátorok tere, $M_k(B(H)) = B(H^k)$ természetesen normált. $(B(H), \|...\|_n)$ konkrét operátor tér.

Leképezések: $(X, \|...\|_n)$, $(Y, |...|_n)$ absztrakt operátor terek. $\Phi : X \to Y$ lineáris operátor.

$$\Phi_n : M_n(X) \to M_n(Y)$$

$$\Phi_n : \begin{bmatrix} x_{11} & ..... & x_{1n} \\ . & & . \\ x_{n1} & ..... & x_{nn} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Phi(x_{11}) & ..... & \Phi(x_{1n}) \\ . & & . \\ \Phi(x_{n1}) & ..... & \Phi(x_{nn}) \end{bmatrix}$$

Φ az operátor normákra nézve kompletten korlátos, cb, ha $\sup\|\Phi_n\| < \infty$. Ilyenkor $\|\Phi\|_{cb} = \sup\|\Phi_n\|$ valódi normát a Φ cb normájának nevezzük. (CB(X,Y), $\|...\|_n$) Banach tér, ha Y teljes. (CB(X,Y), $\|...\|_n$) általában nem zárt (B(X,Y), $\|...\|$)-ban. Φ komplett izometria, ha Φ_n izometrikus minden indexre.

Pozitív elemek C*-algebrában. A egy C*-algebra, ha Banach algebra, azaz (A $\|...\|$) teljes algebra és teljesül $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ miden A-beli a, b elempárra. Involutórikus, azaz adott
* : A → A konjugált lineáris leképezés, hogy (ab)* = b*a* és a** = a , továbbá $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Megjegyzés: Ilyenkor $\|a^*\| = \|a\|$ teljesül. A következőkben csak egység elemes C*-algebrákkal foglalkozunk.

$a \in A$ pozitív, $a \geq 0$, ha $a = a*$ és $\sigma(a) \subset R^+$. Ekvivalensen: $a \geq 0$ pontosan akkor, ha a = bb* valamely $b \in A$-ra.

Reprezentációk $\pi : A \to B(H)$ *-izomorfizmus, ha algebra izomorfizmus és $\pi(a^*) = \pi(a)^*$.

π rendezés tartó: ha a = bb*, akkor $\pi(a) = \pi(b) \cdot \pi(b^*) \geq 0$.
Tétel Minden C*-algebra reprezentálható B(H)-ban.

A pozitív elemek újabb jellemzése: $a \geq 0$ pontosan akkor, ha $\langle ah, h \rangle \geq 0$ minden $h \in H$-ra.

Dekompoíció: Ha $a \in A$, akkor $a = b + ic$, ahol b és c önadjungáltak. Továbbá $a = b^+ - b^- + i(c^+ - c^-)$, azaz bármely elem felírató 4 pozitív elem kombinációjakét.

C*-algebrák mint operátor terek. Legyen A egy C*-algebra, $\pi : A \to B(H)$ *-izomorfizmus
ekkor π_n : $M_n(A) \to M_n(B(H)) = B(H^n)$ is *-izomorfimus, tehát $M_n(A)$-n definiálható norma, mellyel $M_n(A)$ C*-algebra.

Tétel: (B. Aupetit) Egység elemes C*-algebra normája egyértelmű ($\|e\| = 1$).
$M_n(A)$ pontosan egy normával C*-algebra, (A, $\|\ldots\|_n$) konkrét operátor tér.

Kompletten pozitív leképezések

Legyenek A és B C*-algebrák, $\Phi : A \to B$ lineáris operátor. Jelentse Φ_n : $M_n(A) \to M_n(B)$ azt a leképezést, amelyet $\Phi_n([a_{ij}]_{ij}) = [\Phi(a_{ij})]_{ij}$ definiál. Φ pozitív, ha A pozitív elemeit B pozitív elemeire képezi. Φ kompletten pozitív, ha $\Phi_n \geq 0$ miden n-re.
Például egy $\pi : A \to B$ *-homomorfizmus kompletten pozitív.

Lemma: $M_n(A)$ pozitív elemei felírhatók legfeljebb n darab

$$\begin{bmatrix} a_1^* a_1 & a_1^* a_2 & \ldots & a_1^* a_n \\ a_2^* a_1 & a_2^* a_2 & \ldots & a_2^* a_n \\ . & . & \ldots & . \\ a_n^* a_1 & a_n^* a_2 & \ldots & a_n^* a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^* & 0 & \ldots & 0 \\ a_2^* & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ a_n^* & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

= A*A ≥ 0

alakú mátrix összegeként. Most már $\Phi_n\left(\left[a_i^* \cdot a_j\right]_{ij}\right) = \left[\Phi(a_i)^* \cdot \Phi(a_j)\right]_{ij} \geq 0$.

A komplett korlátosság és komplett pozitivitás viszonya

Tétel: (Russo – Dye) A , B egység elemes C*-algebrák, $\Phi : A \to B$ pozitív leképezés.

Ekkor: $\|\Phi\| = \|\Phi(e)\|$.

Mivel $M_n(A)$ egység eleme $\begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \\ & & \dots & \\ & & & e \end{bmatrix}$, és

$$\left\|\Phi_n\left(\begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \\ & & \dots & \\ & & & e \end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{bmatrix} \Phi(e) & & & \\ & \Phi(e) & & \\ & & \dots & \\ & & & \Phi(e) \end{bmatrix}\right\| = \|\Phi(e)\| = \|\Phi\|,$$

ezért $\|\Phi\|_{cb} = \|\Phi\|$.

Példák

3. Schur szorzat

Legyen $a = \left[a_{ij}\right]_{ij} \in M_n$, $b = \left[b_{ij}\right]_{ij} \in M_n$. Schur szorzatuk $a * b = \left[a_{ij} \cdot b_{ij}\right]_{ij} \in M_n$.

Rögzített $a \in M_n$ indukálja $S_a : M_n \to M_n$ leképezést $S_a b = a * b$ által.

Tétel: $a \in M_n$ következő tulajdonságai ekvivalensek:

a) a pozitív M_n-ben
b) $S_a : M_n \to M_n$ pozitív operátor
c) $S_a : M_n \to M_n$ kompletten pozitív

4. Tétel: Legyen A C*-algebra és $f \in A^*$. Ha f pozitív akkor kompletten pozitív.

5. Tétel: Ha V operátor tér, és $\Phi : V \to C(X)$ korlátos operátor, akkor $\|\Phi\|_{cb} = \|\Phi\|$.

   Ha V C*-algebra és Φ pozitív, akkor Φ kompletten pozitív.

6. Tétel: (Stinespring) Ha B C*-algebra és $\Phi : C(X) \to B$ pozitív, akkor Φ kompletten pozitív.

7. Tétel: (Choi) Ha B C*-algebra, $\Phi : M_n \to B$ lineáris leképezés, továbbá E_{ij} mátrixegységek M_n-ben, akkor a következő tulajdonságok ekvivalensek:
   a) Φ kompletten pozitív
   b) Φ_n pozitív
   c) $\Phi_n\left(\left[E_{ij}\right]_{ij}\right) = \left[\Phi\left(E_{ij}\right)\right]_{ij}$ pozitív $M_n(B)$-ben.

8. Egy pozitív leképezés, ami nem kompletten pozitív. A transzponálás, $t : B(l_2) \to B(l_2)$ pozitív, de mivel nem kompletten korlátos, így nem lehet kompletten pozitív sem.

Konkrétan: $t : M_2 \to M_2$, $t : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ pozitív leképezés, hiszen ha $AA^H \geq 0$ M_2-ben, akkor $t(AA^H) = \left(A^H\right)^t A^t = \overline{A} \cdot \left(\overline{A}\right)^H \geq 0$. Azonban t nem 2-pozitív:

$$A = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$ mátrixra

$$t_2(A) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$, és

$$[0,-1,1,0]\cdot t_2(A)\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=-2<0$$
.

Arveson kiterjesztési tétele

Definíció: (E. Effros) A C*-algebra. $S\subset A$ operátor rendszer, ha $e\in S$ és S önadjungált altere A-nak.

Arveson kiterjesztési tétele : Legyen A C*-algebra, S pedig operátor rendszer A-ban. Legyen továbbá $\Phi : S\to B(H)$ egy kompletten pozitív operátor. Ekkor Φ -nek létezik kompletten pozitív kiterjesztése A-ra.

Következmény: (Arveson) Legyen A C*-algebra, $e\in M$ lineáris altere A-nak. Legyen továbbá $\Phi : M\to B(H)$ komplett kontrakció (azaz $\|\Phi\|_{cb}\le 1$) amely megőrzi az egység elemet. Ekkor Φ -nek létezik kompletten pozitív kiterjesztése A-ra.

Lemma: $\Psi : M+M^*\to B(H)$, $\Psi(a+b^*)=\Phi(a)+\Phi(b)^*$ a Φ jól definiált egyértelmű kiterjesztése $M+M^*$-ra.
Tehát $e\in M+M^*$ operátor rendszer, amelyre Φ -nek a lemma szerint van kompletten pozitív kiterjesztése.

Egy alkalmazás, McAsey – Muhly tétele : Legyen A a felső háromszög mátrixok algebrája M_n -ben, E_{ij} pedig a mátrixegységek. Bármely algebra homomorfizmus $\pi : A\to B(H)$ amely teljesíti a $\|\pi(E_{ij})\|\le 1$ feltételeket kompletten kontraktív.

Legyen ugyanis $\Phi(E_{ij})=\pi(E_{ij})$, ha $i\le j$, és $\Phi(E_{ij})=\pi(E_{ji})^*$, ha $j\le i$.
A bizonyítás azt mutatja meg, hogy Φ kompletten pozitív. $\pi(E_{ii})$ ortogonális projekciók, összegük I.) Ekkor $\|\Phi_m\|=\|\Phi_m(I_{m\cdot n})\|=\|I_{H^m}\|=1$.

Wittstock Tételei

Lemma: Legyenek A és B C*-algebrák, jelölje e mindkettő egység elemét! Legyen továbbá V operátor tér A-ban (altér) és $\varphi : V \to B$ lineáris leképezés. Definiáljuk $S \subset M_2(A)$ operátor rendszert

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda e & a \\ b & \mu e \end{bmatrix} : \lambda, \mu \in C \text{ és } a, b \in V \right\}$$ által.

Tekintsük $\Phi : S \to M_2(B)$

$$\Phi : \begin{bmatrix} \lambda e & a \\ b & \mu e \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda e & \varphi(a) \\ \varphi(b)^* & \mu e \end{bmatrix}$$ leképezést.

Ha φ komplett kontrakció, akkor Φ kompletten pozitív.

Wittstock kiterjesztési tétele: Legyen V az A C*-algebra altere és legyen $\varphi : V \to B(H)$ kompletten korlátos. Ekkor létezik φ-nek olyan olyan $\Phi : A \to B(H)$ kiterjesztése, hogy $\|\varphi\|_{cb} = \|\Phi\|_{cb}$.

Lemma: A C*-algebra, $\varphi : A \to B(H)$ kompletten korlátos. Ekkor léteznek φ_1 és $\varphi_2 : A \to B(H)$ kompletten korlátos leképezések úgy, hogy $\|\varphi_1\|_{cb} = \|\varphi_2\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$, és

$$\Phi : M_2(A) \to B\left(H^2\right)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \varphi_1(a) & \varphi(b) \\ \varphi(c^*)^* & \varphi_2(d) \end{bmatrix}$$ kompletten pozitív.

Ha φ komplett kontrakció, akkor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_H & \varphi(b) \\ \varphi(c^*)^* & I_H \end{bmatrix}$$ kompletten pozitív.

Következmény 1: A Stinespring reprezentációs tétel egy változata: Legyen A C*-algebra, $\varphi : A \to B(H)$ kompletten korlátos. Ekkor létezik K Hilbert tér és egy $\pi : A \to B(K)$ reprezentáció (*-homomorfizmus), továbbá $V_1, V_2 : H \to K$ operátorok, melyekkel $\|\varphi\|_{cb} = \|V\|_1 \cdot \|V\|_2$, és $\varphi(a) = V_1^* \cdot \pi(a) \cdot V_2$. Ha továbbá $\|\varphi\|_{cb} = 1$, akkor V_1, V_2 választható izometriának.

Következmény 2: Wittstock felbontási tétele: Legyen A C*-algebra, $\varphi : A \to B(H)$ kompletten korlátos. Ekkor létezik $\psi : A \to B(H)$, hogy $\|\psi\|_{cb} \le \|\varphi\|_{cb}$, továbbá $\psi \pm \mathrm{Re}\,\varphi$ és $\psi \pm \mathrm{Im}\,\varphi$ mind pozitív operátorok.

Ilyenkor $2\varphi = (\psi + \mathrm{Re}\,\varphi) - (\psi - \mathrm{Re}\,\varphi) + i[(\psi + \mathrm{Im}\,\varphi) - (\psi - \mathrm{Im}\,\varphi)]$ előáll négy pozitív operátor lineáris kombinációjaként.

Sejtések ekvivalenciája

Kadison egyik sejtése: Legyen A C*-algebra. Ha $\varphi : A \to B(H)$ egység elemes korlátos algebra homomorfizmus, akkor φ hasonló egy *-homomorfizmushoz.

Lemma: A operátor algebra, $\rho : A \to B(H)$ egység elemes, kompletten korlátos algebra homomorfizmus. Ekkor létezik K Hilbert tér és $S : H \to K$ invertálható operátor, valamint $\pi : A \to B(K)$ kompletten kontraktív algebra homomorfizmus, hogy

$$\pi(..) = S \cdot \rho(\ldots) \cdot S^{-1} \quad \text{és} \quad \|\rho\|_{cb} = \|S\| \cdot \|S^{-1}\|.$$

Ilyenkor $\|\rho\|_{cb} = \min\{\ \|R\| \cdot \|R^{-1}\| :\ \pi(..) = R \cdot \rho(..) \cdot R^{-1}\ \}$

Haagerup tétele: Legyen A C*-algebra, $\rho : A \to B(H)$ korlátos, egység elemes algebra homomorfizmus. Ekkor ρ hasonló egy *-homomorfizmushoz pontosan akkor, ha ρ kompletten korlátos.

Tehát Kadison sejtése pontosan azon C*-algebrákra igaz, amelyek algebra homomorfizmusai kompletten korlátosak.

Derivációk: Legyen A C*-algebra. Egy $\delta : A \to B(H)$ lineáris leképezés deriváció, ha

$$\delta(ab) = \pi(a) \cdot \delta(b) + \delta(a) \cdot \pi(b)$$

valamely $\pi : A \to B(H)$ *-homomorfizmussal. Ringrose (1972) tétele szerint a derivációk korlátosak.

Rögzítsük $x \in B(H)$-t! Legyen $\delta(a) = \pi(a) \cdot x - x \cdot \pi(a)$. Az így definiált δ deriváció.
Az ilyen derivációkat belső derivációknak nevezzük Vannak-e nem belső derivációk?

Tekintsük a $\rho : A \to B(H \oplus H)$, $\rho(a) = \begin{bmatrix} \pi(a) & \delta(a) \\ 0 & \pi(a) \end{bmatrix}$ leképezést!

Egyszerűen kiszámolható, hogy ρ algebra homomorfizmus pontosan akkor, ha δ deriváció.

Lemma: δ belső deriváció pontosan akkor, ha ρ hasonló egy *-homomorfizmushoz.

Következmény, Christensen tétele: Ha $\delta : A \to B(H)$ deriváció $\pi : A \to B(H)$ egység elemes *-homomorfizmussal, akkor δ belső deriváció pontosan akkor, ha ρ kompletten korlátos (pontosan akkor ha δ kompletten korlátos).

Ha A C*-algebrára igaz Kadison sejtése, és δ deriváció, akkor ρ korlátos algebra homomorfizmus, tehát kompletten korlátos. Christensen tétele szerint ekkor δ belső deriváció.

Kirchberg tétele (1996): Ha A C*-algebra minden derivációja belső, akkor A korlátos homomorfizmusai hasonlók egy *-homomorfizmushoz (és így kompletten korlátosak).

Tehát Kadison sejtése pontosan azokra a C*-algebrákra igaz, amelyek minden derivációja belső.

Hivatkozott források:

Vern P.(2002) : Completely Bounded Maps and Operator Algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 78, Cambridge University Press, Cambridge

Szerző:

Kovács István Béla, PhD
docens
BGF-PSZK, Módszertani Tanszéki Osztály
kovacs.istvan@pszfb.bgf.hu