Imre Klára

Számelmélet a felvételi előkészítés tükrében

Határainkon túlról érkezett magyar diákjaink oktatásában szerzett tapasztalataink azt mutatják (lassan egy évtizedes múltra tekinthetünk vissza), hogy a számelméleti feladatok megoldása a legtöbb diák számára komoly nehézséget jelent, a diákok zöme sokszor a rutin jellegű feladatokkal sem birkózik meg. Ugyanezt tapasztaltam a hazai középiskolákban végzett diákok felvételi dolgozatainak javítása során is. Hallgatóink ugyan tisztában vannak azokkal az alapfogalmakkal, melyeket a *Felvételi vizsgakövetelmények a felsőoktatási intézményekben* című kiadvány is felsorol (pl. osztó, többszörös, prímszám, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, a számelmélet alaptétele stb.), ez a tudás azonban igen kevésnek bizonyul a sikeres felvételi írásbeli (illetve szóbeli) vizsgához.

Az elmúlt 4 év írásbeli dolgozatainak példaanyagát (12 érettségi-felvételi, ill. pótírásbeli feladatsort) elemezve tapasztalhatjuk, hogy szaporodtak a számelmélet témájába vágó feladatok, méghozzá a gondolkodtató, 7. és 8. feladatok között találjuk őket (összesen 6 feladat). A tankönyvpiacon megjelenő, egyéni felkészülést segítő példatárakban is megnőtt a számelméleti feladatok aránya (lásd pl. *Dr. Gerőcs László: Irány az egyetem* vagy a népszerű tv-műsor alapján készült *Dr. Gerőcs László: Repeta matek* tankönyvsorozatokat). A követelményekhez nekünk is igazodnunk kellett, tananyagunkban évek óta nagyobb hangsúlyt fektetünk e téma oktatására. Az intézeti kiadásban megjelent jegyzetünk az elmélet részletes (a szigorúan vett középiskolai törzsanyagon túlmutató) összefoglalása mellett bőséges feladatanyagot is kínál megoldással, ill. útmutatással együtt. Elsősorban típusfeladatokat mutatunk be, de ez sem lebecsülendő, hiszen ezen feladatok megoldási módszereinek palettája is igen színes. Összetettebb, gondolkodtatóbb, speciális ötleteket igénylő feladatból számos példatárban találhatunk gazdag választékot. Csemegézni ez utóbbiakból is érdemes, bár önálló megoldásra csak nagyon kevés — jórészt matematika versenyeken megedződött — hallgatónál számíthatunk.

A legtöbb diák — még ha birtokában is van a szükséges alapismereteknek — rendszerint az alapfeladatokkal sem tud mit kezdeni, ha korábban nem vagy csak felszínesen találkozott azokkal a "trükkökkel", amelyek alkalmazása a megoldáshoz szükséges. Ezek az "ötletek és trük-

kök" egyébként mind olyan elméleti tudást feltételeznek, melyeket a diákok jól ismernek, ezért a típusfeladatok megoldása során viszonylag gyorsan sikerélményhez juttathatjuk őket. Ezekkel a tapasztalatokkal felvértezve pedig már összetettebb feladathoz is bátrabban kezd hozzá a hallgató, s juthat el — tehetségétől függően — a teljes megoldáshoz. A rendszerező összefoglalás kitűnő lehetőséget teremt arra is, hogy összekapcsoljunk olyan anyagrészeket, melyeket a diákok eddig elkülönítve kezeltek és a feladatok megoldásában így kamatoztassuk azokat. Ilyen lehetőségekre szeretnék — a teljesség igénye nélkül — az alábbiakban néhány példát mutatni.

A polinomok szorzattá alakításának módszerei az "öncélúan unalomig sulykolt, diákkínzó" gyakorlatok közé számítanak a tanulók körében, számelméleti feladatok estében viszont remek segédeszközzé válnak.

Példa: Bizonyítsa be, hogy 360 osztja az $n^5 - 5n^3 + 4n$ kifejezést, ha n 3-mal nem osztható egész szám!

Példa: Az n milyen egész értékei esetén lesz az $n^5 + n^4 + 1$ prímszám?

Kiváló lehetőség nyílik a hatványozás azonosságainak alkalmazására az alábbi típusú feladatokban.

Példa: Bizonyítsa be, hogy a $5^{2n+1} + 4^{n+2}$ osztható 21-gyel! *($n \in \mathbf{N}$)*

A halmazműveletek ismétlését is célozhatja a következő feladat, de megoldása ezen túlmenően komoly számelméleti gondolatokat is igényel.

Példa: $A := \{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ pozitív osztói$\}$, $B: = \{4704$ pozitív osztói$\}$ és
$C := \{$négyzetszámok$\}$
A halmazok elemeinek felsorolása nélkül adjon választ a következőkre:
a) Határozza meg a következő halmazok elemszámát: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \times B$!
b) Adja meg C összes olyan D valódi részhalmazát, amelyre $D \times D \subset A \times B$!
c) Hány elemű a B halmaznak az a részhalmaza, amelynek elemei nem oszthatók 14-gyel?

Érdemes kicsit tovább időzni a diofantoszi egyenletek témakörénél. A középiskolákban erre általában nem jut elég idő, pedig a téma változatos példaanyaga igazi agytornára kényszerítheti a diákokat. Célszerű vizsgálni a kétismeretlenes elsőfokú diofantoszi egyenlet megoldási algoritmusát. A magasabbfokú diofantoszi egyenletek megoldásai oszthatósági vizsgálatokon alapulnak. De hát itt is igaz: ahány feladat, annyi ötlet. Külön elemzést érdemelne az, hogy a felvételi előkészítésben az ismerten gazdag választékból milyen példaanyagot lehet/érdemes — a törzsanyag elméleti ismereteire alapozva és a továbbtanulási szakirányt is szem előtt tartva —

feldolgoztatni diákjainkkal. Erre most részleteiben nem szeretnék kitérni, ízelítőnek csak néhány példa.

Példa: Vannak-e olyan x és y egész számok, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség?
a) $x^3 + 2xy = 1998$;
b) $15x^2 - 7y^2 = 9$;
c) $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 13$.

Megismertetjük a hallgatókat olyan alaptípussal, mint amilyenre pl. az alábbi feladat is vezethető. A sok numerikus példa megoldása után egy "életszagú" feladat — s ez igaz matematika-oktatásunk más területeire is — kiváló motiváló hatású lehet.

Példa: Egy tepsi sült tésztát a tepsiben darabolunk fel, ennek két szélével párhuzamos, széltől szélig haladó vágásokkal. Nevezzük a szélek mentén keletkező darabokat "rossz"-aknak, a többit "jó"-nak. Hány vágás esetén sikerül a süteményt úgy adagolni, hogy minden adag egy "jó" és egy "rossz" darabból álljon?

Mennyivel kellemesebb ilyen problémán meditálni, mint az alábbi, ugyanazon megoldási módszert igénylő feladaton! A számrendszerekkel kapcsolatos alapfogalmak felelevenítésére azonban ez a példa igen hasznos lehet.

Példa: Határozza meg az x és y számjegyek értékét úgy, hogy teljesüljön a következő egyenlőség: $\overline{x0} + \overline{yx} + \overline{x(y-1)}_y = 112$.

Matematika jegyzetünkben minden tételnek a bizonyítását is szerepeltetjük. Ezzel több célt is szeretnénk elérni. Egyrészt a fogalmak letisztulását, rögzítését, másrészt a diákok gondolkodásmódjának fejlesztését (a bizonyítások során alkalmazott gondolatmenetek feladatok megoldása során kiválóan reprodukálhatók). Célunk, hogy kifejlesszük a diákokban a bizonyítási igényt, a bizonyítási módszerek (pl. ekvivalenciával megfogalmazott tételek bizonyítása, indirekt bizonyítási módszer) rutinos alkalmazását. Mindez a felsőfokú tanulmányokra való felkészülést is szolgálja.

A tételek feltételeit elemezve rávilágíthatunk a gyakoribb típushibákra.

Típushiba: A $c \mid ab$ *és* $c \nmid a$ *feltételekből a* $c \mid b$ *állításra következtetnek.*
Tétel: Ha $c \mid ab$ *és* $(a; c) = 1$, *akkor* $c \mid b$.

Típushiba: Ha $b_1, b_2, .., b_n$ *mindegyike osztója az a-nak, akkor a* $b_1 \cdot b_2 \cdot .. \cdot b_n$ *szorzat is osztója a-nak.*

Tétel: Ha $b_1, b_2, \dots, b_n$ mindegyike osztója az a-nak és $b_1, b_2, \dots, b_n$ páronként relatív prímek, akkor a $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$ szorzat is osztója a-nak.
(A $(b_1, b_2, \dots, b_n) = 1$ nem elegendő feltétel. Ez is gyakori hibaforrás.)

A számelmélet fejezetben tárgyaljuk a teljes indukciót is. Viszonylag több időt szánunk rá, mivel diákjaink későbbi tanulmányaikban gyakran találkozhatnak majd ezzel a bizonyítási módszerrel. A széleskörű alkalmazhatóságának illusztrálására — a jól ismert numerikus feladatok mellett — célszerű a példaanyagot színesen megválogatni, a matematika különböző területeiről venni.

Tétel: A számtani és a mértani sorozat n-edik elemének, ill. első n eleme összegének meghatározása.

Tétel: Az n ($n \in \mathbf{N}$) elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n.

Példa: Adott az e egyenesen egy O pont és az e egyenes ugyanazon félsíkjában elhelyezkedő $A_1, A_2, \dots, A_n$ pont úgy, hogy

$|\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OA_2}| = \dots = |\overrightarrow{OA_n}| = 1$. *Bizonyítsuk be, hogy ha az n páratlan*

szám, akkor $|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}| \geq 1$!

Példa: Néhány egyenes a síkot tartományokra bontja. Mutassuk meg, hogy ezek a részek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy az oldalszomszédos tartományok különböző színűek legyenek!

Példa: n ($n \geq 4$) idős hölgy mindegyike tud egy pletykát, azonban csak telefonon tudnak beszélni egymással. Mutassuk meg, hogy 2n - 4 hívással megoldható, hogy mindenki ismerje mindegyik pletykát!

A fentiekből, úgy érzem, kitűnik, hogy a rendszerező összefoglalás keretében érdemes a számelmélet fejezetre több időt szentelnünk, a téma megérdemli a nagyobb odafigyelést. Olyan ismeretekkel gazdagíthatjuk hallgatóinkat, melyek remélhetőleg nemcsak a sikeres felvételi vizsgához, hanem a sikeres egyetemi/főiskolai tanulmányokhoz is hozzásegítik őket.