

## Segítsen-e, illetve hogyan segítsen a szülő a nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) megoldásában alsó tagozaton?

**Szilágyiné Szinger Ibolya**

Eötvös József Főiskola, Matematikai és Informatikai Szakcsoport, Baja

*A nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) tanítása során gyakran tapasztalhatják a tanítók, hogy a kisiskolásoknak – elsősorban a házi feladatok megoldásában – nyújtott szülői segítség visszalépést okozhat a már elért eredményekben. A szülők megoldási módszerei általában nem azonosak az alsó tagozaton alkalmazott módszerekkel, feltehetőleg ez a probléma forrása.*

*Ennek szemléltetésére bemutatok egy negyedik osztályos esettanulmányt, amelyben a szülők segíteni próbáltak a gyermeküknek a házi feladatként feladott nyitott mondat megoldásában. A szülők – beszámolójuk alapján – teljes kudarcként élték meg ezt a szituációt, ezért tanácsot kértek abban, hogyan tudnának a későbbiekben segíteni a gyermeküknek.*

**Kulcsszavak:** nyitott mondatok, egyenletek, fogikai függvények, általános iskola, próbálgatás

A nyitott mondat a logikai függvény<sup>1</sup> alsó tagozatos elnevezése, mellyel többnyire egyenletek, egyenlőtlenségek formájában találkozunk az 1–4. osztályban. Természetesen a nyitott mondat általánosabb fogalom, mint az egyenlet, egyenlőtlenség, gondoljunk például a „ $\square$  osztója a 36-nak.” típusú nyitott mondatokra. Az egyenlet, egyenlőtlenség elnevezések helyett alsó tagozaton a nyitott mondatok kifejezést használjuk, felső tagozaton térünk át az egyenlet, egyenlőtlenség elnevezésekre. A nyitott mondatok megoldása során a nyitott mondatokat igazgató elemeket keressük, amelyek az ún. igazsághalmazt, a megoldások halmazát alkotják. Alsó tagozaton az egyváltozós egyenletek, egyenlőtlenségek értelmezési tartománya (alaphalmaz) a természetes számok halmaza, illetve annak bármilyen részhalmaza lehet. Mivel a megoldások halmaza az alaphalmaz részhalmaza, így törtszám, illetve negatív szám nem szerepelhet a megoldások között.

A nyitott mondatok alsó tagozatos tanításának célja a fogalom kialakításán túl a tanulók ítéliképességének, valamint számolási készségének fejlesztése, továbbá fontos szerepet játszanak a modellalkotás területén, a szöveges feladatok megoldásában, illetve a szabályjátékok szabályának leírásában.

A nyitott mondatok megoldása alsó tagozaton többféle módszerrel történhet, így az egyváltozós egyenleteket megoldhatjuk:

- próbálgatással,
- tervszerű próbálgatással („túl kicsi – túl nagy” módszer),
- műveletek közötti kapcsolat alapján,
- következtetéssel, az eltérés változásának megfigyelésével,
- szakaszos rajz segítségével.

<sup>1</sup> A logikai függvény egy adott „nyitott”, – azaz csak az „állítványt” tartalmazó, nem „teljes” – mondat szerint minden egyes behelyettesített „alanyhoz” hozzárendeli az „igaz” vagy a „hamis” logikai értéket. A szóba jöhető alanyok alkotják az ún. alaphalmazt. A megoldást az alaphalmaz azon elemeinek összessége adja, amelyekhez az „igaz” érték tartozik.

A *próbalgatás* a számok egymás utáni behelyettesítésével kapott állítások logikai értékének (igaz vagy hamis) meghatározását jelenti.

A próbalgatásnak magasabb szintű formája a *tervszerű próbalgatás*. A tervszerű jelző arra utal, hogy itt már mérlegelünk, mit érdemes kipróbálni, megjelenik egyfajta tudatosság a véletlenszerű próbalgatással szemben. A módszer alkalmazásával fokozatosan jutunk el a nyitott mondat megoldásához. Általános iskola 3–4. osztályában ez a leggyakrabban alkalmazott módszer.

Az egy műveletet tartalmazó nyitott mondatokat megoldhatjuk a műveletek közötti kapcsolatok alapján, mely esetekben egy alkalmas művelettel számítjuk ki a megoldást. Ennek a módszernek az alkalmazását számos próbalgatással, illetve tervszerű próbalgatással történő nyitott mondat megoldása előzi meg.

Nézzünk erre egy második osztályos példát! A következő egyműveletes nyitott mondat megoldását keressük:  $\diamond - 27 = 35$ . A probléma szóbeli megfogalmazása megkönnyítheti a megoldást, ezért fogalmaztassuk meg a gyerekekkel, hogy azt a számot keressük, amelyből ha 27-et kivonunk, 35-öt kapunk. Ha kipróbálják például a 30-at, észrevehetik, hogy így túl kicsi a különbség. A különbség növelését úgy érhetjük el, hogy a változó helyére nagyobb számot helyettesítünk be. Ha behelyettesítik például a 90-et, akkor túl nagy lesz a különbség, ezért ennél kisebb számot kell keresnünk. Tegyük fel, hogy behelyettesítik például a 60-at, akkor a különbség 33 lesz. Innen már könnyen adódik a 62 mint megoldás. Kellő számú ilyen típusú nyitott mondat próbalgatással, illetve tervszerű próbalgatással történő megoldásával megszerezhetik a tanulók azt a tapasztalatot, hogy a hiányzó kisebbítendőhöz eljuthatunk úgy is, hogy a különbséget éppen a kivonandóval növeljük, azaz a különbség és a kivonandó összeadásával. Hangsúlyozzuk, hogy ez nem a mérlegelv alkalmazását jelenti, ugyanis nem arról van szó, hogy mindkét oldalt egyenlően változtattuk, azaz mindkét oldalhoz hozzáadtunk 27-et.

Ha a szülő otthon úgy próbál segíteni a gyerekének egy ilyen jellegű nyitott mondat megoldásában, miszerint magyarázat nélkül közli, hogy itt a 35-höz hozzá kell adni a 27-et, akkor ő a *mérlegelv* alkalmazásán keresztül teszi azt. A mérlegelvet azonban – mint az egyenletek általános megoldási módszerét – alsó tagozaton még nem tanítjuk. Ennek, valamint a *lebontogatás* módszerének tárgyalására csak 6. osztályban kerül sor. A lebontogatás előkészítésével matematika-szakkörön, vagy differenciált foglalkoztatás keretében azonban már foglalkozhatunk.

Az egyenlőtlenségek megoldása alsó tagozaton próbalgatással vagy tervszerű próbalgatással (3–4. osztályban) történhet. A tervszerű próbalgatásnál először a legnagyobb jó és a legkisebb jó megoldást<sup>2</sup> kerestetjük a tanulókkal, a közbülső számokat – a megfelelő tapasztalatok megszerzése után – már behelyettesítés nélkül, egyszerűen a megoldások közé sorolják.

A két- vagy háromváltozós nyitott mondatok megoldási módszere szintén a próbalgatás.

A nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) tanítása során gyakran tapasztalhatják a tanítók, hogy a kisiskolásoknak – elsősorban a házi feladatok megoldásában – nyújtott szülői segítség visszalépést okozhat a már elért eredményekben. A szülők megoldási módszerei többnyire nem azonosak az alsó tagozaton alkalmazott módszerekkel, feltehetőleg ez a probléma forrása.

<sup>2</sup> Itt a „megoldás” szót abban az értelemben használjuk, amit mondhatnánk „egy jó” számnak (egy gyöknek). Tehát a legkisebb, illetve legnagyobb jó számról, a legkisebb, illetve legnagyobb igazgá tevő számról van szó.

Ennek szemléltetésére bemutatok egy negyedik osztályos esettanulmányt, amelyben a szülők segíteni próbáltak a gyermeküknek a házi feladatként feladott nyitott mondat megoldásában.

*Réka:* Anya, apával csináltam tegnap a leckémet, és nem volt jó. Nem is értem.

*Anya:* Mit nem értesz? Mutasd!

*Réka:* Matek.

Ötszáztizennyegy nagyobb, mint valamennyiből ötven.

$511 > \square - 50$  (Sokszínű matematika Számolófüzet 4, 10/1. feladat)

*Anya:* Mi itt a kérdés?

*Réka:* ?????

*Anya:* Mennyiből kell kivonni 50-et, hogy az eredmény kisebb legyen 511-nél. Ugye?

*Réka:* Ühüm. És ezt hogy kell megoldani?

*Anya:* Másoljuk le egy lapra! Én csak úgy tudom megcsinálni, ahogy mi tanultuk. *Kínosan ügyeltem, hogy ki ne ejtsem az egyenlet szót: egyrészt, mert még nem tanulták, másrészt, mert ez épp egy egyenlőtlenség. Gyorsan írtam:*

$511 > \square - 50$

Írjuk le fordítva, mert úgy egyszerűbb!

$\square - 50 < 511$

Ez ugyanazt jelenti, igaz?

*Réka:* Ühüm.

*Anya:* Arra kell törekedni, hogy a „valamennyi” egyedül maradjon az egyik oldalon, mert az a kérdés. Most nekünk útban van a mínusz ötven. Ami az egyik oldalon mínusz, azt pluszként lehet átvinni a másik oldalra, pont az ellenkező művelettel. *Rájöttem, hogy nem mínusznak és plusznak mondják, ezért javítottam:* A kivonásból összeadás lesz, az összeadásból kivonás a másik oldalon. Nézd!

$\square - 50 < 511 \quad /+50$

$\square < 511 + 50$

$\square < 561$

*Réka:* De anya, mi ezt nem így tanultuk. Én ezt nem is értem. *Réka már sírt.*

*Anya:* Hát itt az 561-nél kisebb számok lesznek a jó megoldások.

A füzetbe fordítva írd le:  $561 > \square$ , mert emlékszel, egyszer megfordítottuk.

*Réka:* 560, 559, 558, ..., 0 – írta alá sírva.

*Anya:* Csak az egész számokat tanultátok?

*Réka:* Mindig így írjuk a megoldást.

*Anya:* Nulláig?

*Réka:* Ühüm.

Hasonlóan oldották meg a következő nyitott mondatot is:

$\triangle + 100 \geq 409 \quad /-100$

$\triangle \geq 409 - 100$

$\triangle \geq 309$

Az édesanya – látva gyermekük kétségbeesését, sírását a házi feladat megoldása során – megkeresett és elmesélte, hogy teljes kudarcként élte meg ezt a szituációt, majd megkérdezte, hogy hogyan kellett volna megoldani ezt a nyitott mondatot, illetve hogyan tudnának a későbbiekben segíteni a gyermeküknek.

Az édesanya következő mondatait érdemes részletesen elemezni: „Arra kell törekedni, hogy a „valamennyi” egyedül maradjon az egyik oldalon, mert az a kérdés.

*Most nekünk útban van a mínusz ötven. Ami az egyik oldalon mínusz, azt pluszként lehet átvinni a másik oldalra, pont az ellenkező művelettel. A kivonásból összeadás lesz, az összeadásból kivonás a másik oldalon.”*

Rékának ezek a mondatok valószínűleg teljesen értelmetlennek tűntek. A következő kérdések kavarghattak a fejében: Mit jelent az, hogy a „valamennyi” egyedül maradjon? Mit jelent az, hogy pluszként át lehet vinni a másik oldalra? Hogyan lesz a kivonásból összeadás, amikor ő csak kivonást lát a nyitott mondatban? Réka egy sor értelmetlen szabállyal találta magát szemben a szülői instrukciókban, hiszen ő eddig a tanítójától – feltehetőleg – a tervszerű próbálgatás módszerét látta. Meg kellett oldania egy nyitott mondatot úgy, hogy a valamennyi egyedül maradjon, átvinni a mínusz 50-et pluszként a másik oldalra.

*Richard R. Skemp* matematikus-pszichológus az ilyesfajta utasításokat az értelem sorozatos megsértésének nevezi: „*Ha valaki megpróbál megérteni valamit, ez együtt jár szkémáinak az akkomodációjával. Ha ilyen esetben a küldő fél értelmetlen dolgokat közöl, akkor a befogadó megpróbálja szkémáit az értelmetlenséghez asszimilálni. Ez pedig egyenértékű e szkémák lerombolásával, ami a testi sértés szellemi megfelelője*” (*Skemp*, 1975. 56. o.).

Réka elsírta magát, mert nem volt képes értelmet találni abban, amit az édesanyja nyújtott a számára, de nem ismerte fel, hogy a hibát nem ő követte el, hanem a szülő, még ha csupán tudatlanságból is. Az elhangzott párbeszédéből egyértelműen kiderül, hogy a szülő megoldási módszerként a mérlegelvet alkalmazta, mert úgy tudja megcsinálni, ahogy tanulta. Ez azonban a kislánya számára ismeretlen módszer, ezért nem egyeztethető össze saját értelmével. Az édesanyjával folytatott beszélgetés során igyekeztem átadni a tervszerű próbálgatás módszerének lényegét, egyúttal rámutatni arra, hogy a mérlegelv nem a 4. osztályos gyermekeknek megfelelő módszer, ezért nem jutottak ők sem egyről a kettőre. Néhány példán keresztül bemutattam neki, hogyan oldhatunk meg nyitott mondatokat ezzel a módszerrel. Két-három héttel később hasonló problémával fordult Réka édesanyjához.

*Réka:* Anya, tudsz segíteni a nyitott mondatos feladatnál? Az a feladat, hogy egy számból elvettem 5800-at, a különbség 3900-nál kisebb lett, és ezt leírom egy nyitott mondatba.

$\Delta - 5800 < 3900$  (Sokszínű matematika Számolófüzet 4, 38/2. feladat)  
És akkor most nem tudom, hogy ezt hogyan kellene kiszámolnom.

*Anya:* Van egy tipped rá?

*Réka:* Úgy, hogy a 3900-at ki kell vonni az 5800-ból?

*Anya:* Lehet, hogy az is jó, de próbáljuk meg találgatással. Jó? Keressünk egy számot, és arra próbáljuk ki! Itt ilyen ezres meg százas nagyságrend van. Tehát akkor?

*Réka:* Nyolcezer valamennyi.

*Anya:* 8000-rel próbáljuk meg!

*Réka:* 8000-ből 5800 az 2200.

*Anya:* Tehát a 8000 esetén tényleg...

*Réka:* ...kisebb.

*Anya:* Kisebb lett a különbség, ...

*Réka:* ..., mint 3900.

*Anya:* Igen. Akkor most próbáljunk ki egy másikat!

*Réka:* Mondjuk a 7000-et, nem, inkább a 8900-at.

*Anya:* Jó, próbáljuk ki a 8900-at!

Réka: 8900-ból 5800 az egyenlő 3100.

Anya: Tehát még jó a 8900 is.

Réka: Igen.

Anya: Az előbb próbáltuk a 8000-et, most a 8900-at. Akkor még fölfelé vagy lefelé érdemes próbálkozni?

Réka: Még fölfelé. És ha mondjuk, azt nézem, hogy a 8900-hoz adok 100-at, az 9000 lesz, akkor a különbség 3200 lesz. Ha még a 9000-hez hozzáadok ...

Anya: Na, hány százat?

Réka: 700-at még.

Anya: Igen.

Réka: Az már nem jó.

Anya: Próbáljuk ki vele!

Réka: 9700-ból 5000, az 4700, 4700-ból 800 egyenlő 3900.

Anya: Igen, tehát akkor...

Réka: A 9700 már nem jó. Attól kisebbek jók nekünk ugye?

Anya: Igen.

Réka: Ezt leírom. Valamennyi egyenlő, nem, kettőspont.

Anya: Miért kettőspontot teszel?

Réka: Így szoktuk, és utána felsoroljuk.

Anya: Melyik az első jó szám?

Réka: 9699, utána a 9698, a 9697, és pont, pont, pont 0-ig.

Anya: A 0-ig?

Réka: Igen, mert a mínuszokat még nem tanultuk igazán.

Anya: Akkor így jó.

Látványos fejlődés figyelhető meg a szülői kérdéskultúrában, a szaknyelvi pontatlanságok ellenére. A mérlegelv korábbi alkalmazása azonban hagyott némi nyomot a kislányban, ezért akart helytelenül az 5800-ból 3900-at kivonni.

Réka és anyukája figyelmét – ahogy az előző feladatban is – elkerülte az a tény, hogy ha 5800-nál kisebb számot helyettesítünk be, akkor a kivonás műveletét – legalábbis alsó tagozaton – nem tudják elvégezni, mert pl. 5000-ból nem tudnak 5800-at elvenni. A kisiskolások nem tudják meghatározni a különbséget abban az esetben, ha egy természetes számból egy nála nagyobb természetes számot kell kivonni. Éppen ezért a legkisebb jó szám az 5800, és nem a 0.

A kiinduló kérdéseinkre visszatérve, úgy válaszolhatunk, hogy természetesen segítsen a szülő a nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) megoldásában, amennyiben a gyermeke igényli, de – amint láthattuk a fenti példákban – egyáltalán nem mindegy, hogy hogyan teszi. Nem mérlegelvel. Így célszerű lenne szülői értekezlet keretében bemutatni a 6–10 éves gyerekek életkori sajátosságainak megfelelő próbálgatás, illetve tervszerű próbálgatás módszerét, hogy alkalmas módszerekkel segíthessenek a gyermekeiknek, amennyiben szükséges.

A kisiskolásoknak megfelelő matematikai nyelvezetre, szóhasználatra is mutatunk példákat, mert a nyelv a tanulás fontos része. A szakszerű, módszertanilag kifogástalan tanítást természetesen csak a tanítóktól várjuk el, de a szülőket annyiban segítenünk kell, hogy a gyermekek gondolkodásának fejlődését előre, és ne visszafelé mozdítsák, zűrzavart okozva ezzel a gyerek gondolati világában.

Zárásként Szendrei Julianna gondolatait idézem: „A dolgok értelmének feltárásához viták, beszélgetések, a tanulók közös munkája szükséges. Ezek együttese eredményezheti azt, hogy valakinek az osztályában sokan értik a matematikát.”

## Irodalom

- Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Ildikó – Szabados Anikó (2013): *Sokszínű matematika* Számolófüzet 4. Mozaik Kiadó, Szeged.
- Skemp, Richard R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat, Budapest.
- Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Kiadó, Budapest.
- Szerencsi Sándor – Papp Olga (1987): *A matematika tanítása II*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Török Tamás (2013): Nyitott mondatok. In: Herendiné Kónya Eszter (szerk.) *A matematika tanítása az alsó tagozaton* Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest.