

## Játékok a számelméletben

### Óra-aritmetika

#### Árokszállási Eszter

Vak Bottyán Gimnázium, Paks

*A tapasztalatok azt mutatják, hogy sok gyerek fél a matematikától, habár a gyerekek szívesen játszanak matematikai játékokat. Bemutatunk egy játékot, amely lehetőséget nyújt a tanulók ismereteinek bővítésére. A számelméletből a maradékos osztás témakörét választjuk. Három reprezentációs szint használatával eljutunk a matematikai szabályok felismeréséig. A szerepjáték segíti a gyerekeket (10–12 év) abban, hogy örömmel vegyenek részt a felfedezésben. A játékot a gyerekek ajándékba kapják, így közelebb kerülnek a közös tudáshoz és ennek segítségével nem eltaszítjuk, hanem bevonjuk őket a matematikába.*

**Kulcsszavak:** matematika, játék, játékos oktatás, sejtés szerepe, flow

„Próbáljátok meg a játékokat lejátszani.” (Szendrei Julianna, 1987)

### Bemutató

A számítógépen az egyik keresőprogramba beírjuk a „Félelem a matematikától.” mondatot és bármely kereső programmal nagyon sok találatot jelez a monitor. Tanári munkám során fontosnak tartom, hogy megértsem ezt a félelmet, helyette a matematika szépségeire összpontosítsak és segítsék abban, hogy a diákok a matematikát szívesen tanulják, a „szeretem” tantárgyak közé sorolják.

Ebben az írásban egy olyan matematikai játékot mutatok be, amely alkalmas arra, hogy a gyerekeknek a *flow* (áramlat) élményét nyújtsa. A játékot 6. osztályos tanulóknak szánom és azt szeretném bizonyítani, hogy a maradékos osztást lehet játékos formában is tanítani. Csíkszentmihályi Mihály használta először és írta le a *flow* (áramlat) kifejezést. A *flow* olyan élmény, amikor annyira belemerülünk abba, amit csinálunk, hogy észre sem vesszük mennyire telik az idő, mint amikor az áramló folyó sodor bennünket. Áramlattevékenység közben a játék igazi örömeért tevékenykednek a tanulók, próbálgathatnak, kérdezhetnek, lehetőséget kapnak, hogy a szabályokat saját maguk fedezzék fel (Csíkszentmihályi, 2000.). Miközben húek maradunk a magyar matematikus Pólya György hitvallásához is, aki három pontban gyűjti össze tanítási attitűdjének lényegét. 1. *Mi a tanítás? A tanítás az, hogy lehetőséget adunk a tanulóknak arra, hogy a dolgokat saját maguk fedezzék fel.* 2. *Először találgass, azután bizonyíts!* A harmadik pontban egy matematikával kapcsolatos hiedelemről (*belief*) beszél: 3. *Úgy tűnik, hogy a matematika a bizonyításokból áll, de ez nem egészen van így. A kész matematika bizonyításokból áll, de a matematika művelése találgatások összessége* (Pólya, 1966.).

A találgatásokhoz és a szabályok felfedezéséhez három reprezentációs szintet használunk (Bruner, 1966). Ezzel is segítünk abban, hogy az átlagos képességű ta-

nulók könnyebben léphessenek be a szimbólumok világába. A három reprezentációs szintet az alábbiak szerint használjuk. A materiális (enaktív) síkon, az ismeretszerzéshez a játékhoz szükséges órát a gyerekek készítik el. Játék közben a gyerekek az óra mutatóját a megfelelő számra forgatják. Az ikonikus síkon, a szerepjátékban a gyerekek magukat egy elképzelt világba helyezik. Az órákat lerajzolják a füzetükbe. A szimbolikus síkon, a felismert szabályokat hangosan elmondják, megbeszélik társukkal, megértik. A tanár segítségével matematikai szimbólumokká alakítják. A matematikai szimbólumok legtömörebb formái a matematikai nyelvnek. A matematikusok közös megegyezésén alapulnak, ezért sem várhatjuk el, hogy a tanulók minden nehézség nélkül azonnal alkalmazzák azokat.

## A játék bemutatása

### a) *Maradék ország leírása*

A gyerekeket bevezetjük egy elképzelt országba, ahol ők is szerepelhetnek. Nevezzük ezt az országot *Maradék országnak!* *Maradék országban Maradék városok* vannak, ahol csak a maradékok számítanak. Az órák is ennek megfelelően működnek. A *Nulla* maradékvárosban nem mérik az időt. Ez a *Maradék* főváros itt a Király vagy Királynő lakik. Az *Egyes* maradékvárosban egy hosszú szalagot használnak, amelyen beosztások vannak: 0; 1; 2; 3; 4...  $m-1$ ;  $m$ ... Ha a szalag elfogyna, egyszerűen hozzáragasztanak még.

A *Kettes maradékvárosban* körlapot használnak, amelyen 0 és az 1-es jel van. Ezen forog az óra mutatója pozitív irányban. Hasonlóan a *Hármas maradékvárosban* az óra körlapjára a 0, az 1 és a 2-es jelet festik.

Az  $m$ -es maradékvárosban a körlapra a 0, 1, 2...  $m-1$  jeleket festik. Az órákat a király parancsára összehangolják. Az *Egyes-*, *Kettes-*, *Hármas-*...  $m$ -es *maradékvárosban* is, egy óra ugyanannyi ideig tart. *Maradék ország* az EGÉSZEK birodalma. Itt minden városban csak egészekben mérik az időt. Ezekbe a városokba elutazhatunk és ott az aktuális időszámítás szerint mérjük az időt.

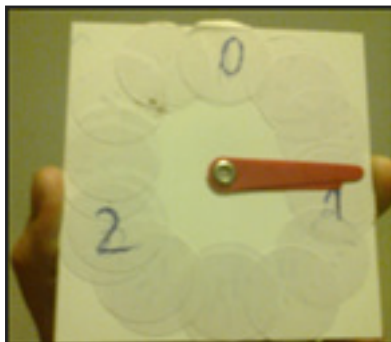
### b) *A játék szereplői és feladatuk*

A játék szereplői a Király vagy Királynő, a Nagy utazók és a Bölcsök. A játék elején egy Királyt vagy Királynőt kijelölünk, először ez a játékos a tanár. Később a gyerekek is szívesen vállalják ezt a szerepet. A játékot párban játsszuk. A padban egymás mellett ülő gyerekek közül az egyik a Nagy utazó a másik a Bölcs.

- A Király vagy Királynő feladata: A Nulla Maradék fővárosban élő Király vagy Királynő annak a Nagy utazónak adja fele királyságát és Nulla királynőjét (királyfiát), aki a legtöbb kérdésre tud válaszolni. A kérdések a maradékokkal kapcsolatos műveletekre, az új matematikai környezetre, szabályok megsejtésére vonatkoznak.
- A Nagy utazó feladata: Elutazik a megfelelő Maradék városba és megkéri a városban lakó Bölcsöt, hogy segítsen. A Nagy utazó is tehet fel kérdéseket, ha szeretne.
- A Bölcs feladata: Segít a Nagy utazónak válaszolni.

Egy-egy játékrész után, ami kb. 20–25 percig tart, közösen megbeszéljük a válaszokat és a gyerekek leírják a füzetükbe. Ez utóbbi elemző részhez is szükségünk van kb. 20–25 percre. A 45 perces tanítási óra gyorsan eltelik, ezért az osztályhoz, csoporthoz igazítjuk, hogy meddig jutunk el a feladatokban. A játékot a gyerekek nagyobb iskolai szünet előtt ajándékként kapják (pl. karácsonyi ajándékként).

### c) Az órák elkészítése



1. ábra: Az egymutatós óra

A Maradék városok óráit a gyerekek készítik el. Az óra számlapját a kivágják, és irattűző kapoccsal rögzítik a mutatót (Szendrei, 1987). A számokat ceruzával írjuk rá az óra számlapjára, így könnyen átírhatjuk azokat, ha másik Maradék városba utazunk. Választhatjuk azt is, hogy a kereskedelemben kapható óra számlapját leragasztjuk és az egyik mutatót hagyjuk meg. Mindegyik gyerek kezében van egy óra, amit játék közben használ (lásd 1. Ábra)

### A feladatok

Manipulatív tevékenységgel kezdjük az ismeretszerzést. A *Hármas maradék város* óráit próbáljuk ki. Most nullán áll a mutató.

A Király vagy Királynő kérdései:

Hol áll majd a mutató 1 óra, 2 óra, 3 óra, 18 óra, 22 óra, 59 óra múlva?

*Megoldás: 1 óra múlva az 1-esen, 2 óra múlva a 2-esen, 3 óra múlva a 0-án, 22 óra múlva az 1-esen, 59 óra múlva a 2-esen.*

Hol állt 1 órával, 2 órával, 3 órával, 18 órával, 22 órával, 59 órával ezelőtt?

*Megoldás: 1 órával ezelőtt a 2-esen, 2 órával ezelőtt az 1-esen, 3 órával ezelőtt a 0-án, 18 órával ezelőtt a 0-án, 22 órával ezelőtt a 2-esen, 59 órával ezelőtt az 1-esen.*

Mondjátok meg a mellettetek ülő Bölcsnek, hogy hány óra telt el! (*Most szabadon választanak a gyerekek időpontot.*) Lássuk, hol áll a mutató?

Hány órával ezelőtt történt? (*Most szabadon választanak a gyerekek időpontot.*)

Lássuk, hol áll a mutató?

Fordítsátok meg a szerepeket, és a társatok is mondjon nektek feladatot!

Milyen esetekben állnak együtt a mutatók a párotokéval? (Milyen esetekben áll a mutató például mindkettőtök óráján az 1-esen?)

*Megoldás: A két órán a mutatók akkor mutattak ugyanarra a számra, ha hárommal osztva ugyanazt a maradékot adták a mért idők, vagy a két órán mért idők különbsége osztható hárommal. Például: egyik eltelt idő 4 óra, a másikon 22 óra akkor  $4=1\cdot3+1$  és  $22=7\cdot3+1$ . A +1 mutatja, hogy az 1-esen állnak a mutatók. A különbséggel pedig  $22-4=18$ , létezik a 6, hogy  $18=3\cdot6$ , így 3 osztója a 18-nak, nincs maradék, nulla a maradék.*

Nagyon nagy számoknál hogyan érdemes megvizsgálni, hogy együtt állnak-e a mutatók?

Például 347738 óra után, 347707 óra után?

*Megoldás: Nagyon nagy számoknál inkább a két órán lévő különbség alapján érdemes dönteni.  $347738-347707=31$  a 3 nem osztója a 31-nek, így az órák nem mutatják ugyanazt az időt a Hármas maradék városban.*

Találjunk ki, rögzítsünk le szabályokat, hogy mit lehet, és mit nem lehet itt, a Hármas maradék városban csinálni? Mit gondoltok a Hármas maradék városban lehet-e összeadni, kivonni, szorozni, hatványozni, osztani a mért időket? Milyen műveleteket

és hogyan lehet elvégezni? (*Freud-Gyarmati, 2006; Pintér, 2012.*) Először játszunk el néhány példát, adjunk fel padtársunknak is hasonlót, majd cseréljünk szerepet!

A Király vagy Királynő kérdései lehetnek például:

Hármas maradék városban, ha eltelik 7 óra, akkor az óra mutatója ugyanott áll, mint amikor eltelik 16 óra. Ugyanez a helyzet, ha eltelik 5 óra és eltelik 23 óra. Mit gondoltok az eltelt  $7+5$  óra és eltelt  $16+23$  óra esetén is ugyanazon a számon állnak az óra mutatói? Magyarózzátok meg a válaszokat!

*Megoldás: 7 órakor és 16 órakor mindkét órán az 1-esen állnak a mutatók.  $16-7=9$  és 3 osztója a 9-nek. Az 5-ös és a 23-as esetében mindkét óra a 2-esen áll.  $23-5=18$  és 3 osztója a 18-nak. Az összeadás után  $7+5=12$  és  $16+23=39$ , mindkét óra mutatója 0-án áll, együtt állnak.  $39-12=27$  és 3 osztója a 27-nek, nulla a maradék.*

A Hármas maradék városban az eltelt 11 óra és az eltelt 2 óra után ugyanott állnak a mutatók, és az eltelt 9 óra és az eltelt 6 óra után ugyanez a helyzet, akkor az eltelt  $(11-9)$  óra és a  $(2-6)$  óra után vajon együtt állnak-e a mutatók? Miért?

*Megoldás: 11 órakor és 2 órakor a 2-esen állnak a mutatók. 9 és 6 órakor a nullán. Most a kivonás után  $11-9=2$  és  $2-6=-4$  negatív számot kapunk. Ez csak annyit jelent, hogy ellenkező irányban forgattuk a mutatót 4 órával.  $-4-2=-6$  és 3 osztója a  $-6$ -nak. (Kijöhetnek negatív számok is. Nem baj, megbeszéljük.)*

A Hármas maradék városban az eltelt 7 óra után ugyanott áll a mutató, mint az eltelt 4 óra után. Az eltelt 17 óra és az eltelt 5 óra után is együtt állnak a mutatók, akkor az eltelt  $7-17$  óra és az eltelt  $5-4$  óra után vajon ugyanott állnak-e a mutatók? Miért?

*Megoldás: 7 és 4 óra után az 1-sen, 17 és 5 óra után a 2-esen állnak a mutatók, akkor  $7-17$  és  $5-4$  óra után is ugyanott fognak állni, mert  $119-20=99$  és 3 osztója 99-nek, nulla a maradék.*

A Hármas maradék városban az eltelt 7 óra után ugyanott áll a mutató, mint az eltelt 13 óra után, akkor az eltelt  $(7:2)$  óra után ugyanott áll-e a mutató, mint az eltelt  $(13:2)$  óra után? Miért?

*Megoldás: Az eredmények nem egészek. Az egészek birodalmában vagyunk, ezért itt nincs ilyen idő.*

A Hármas maradék városban a mutató kezdetben a 0-án állt. Ketten figyelik, az eltelt időt Anna azt mondja, hogy 4 óra telt el, Barnabás azt mondja, hogy 7. Nem tudnak megegyezni az óra mutatója az 1-esen áll. Abban biztosak, hogy 4 többszöröse telt el. Vajon mi lehet a megoldás a Hármas maradék városban? Mit gondoltok, a 4-et mely számokkal lehet megszorozni, hogy ugyanott álljanak a mutatók?

Próbálgatással a megoldások: A lehetséges értékek, ha 0-ról indulunk pozitív irányban.

4	7	10	13	16	19	22	25	28	...
---	---	----	----	----	----	----	----	----	-----

A hármas maradék városban tapasztaltak alapján milyen sejtéseink lehetnek?

### A sejtés vizsgálata a feltételek változtatásával

Utazzunk el más Maradék városokba is például az Egyes vagy a Tizenkettes maradék városban! Próbáljuk végig szabályainkat és kérdezzük meg a városban lakó bölcset (pad társunkat), hogy jól következtettünk-e? (Utána közös megbeszélés.) Az Egyes Maradék városban papírszalagot használunk.

Nagy utazónk szerint előfordult az is, hogy a Tizenkettes maradékvárosban a 20 óra és 56 óra elteltével ugyanott állnak a mutatók. Azonban, ha mindkét számot elosztotta 4-gyel, akkor az eredmény már nem volt helyes a Tizenkettes maradékvárosban, ahhoz át kellett utaznia a Hármas maradékvárosba és ott már igaz lett az állítás. Mit gondolsz, ezt a szabályt érvényesíteni lehet az összes maradékvárosra?

## Konklúzió

A gyerekek hozzáállása pozitív a játékhoz. 7. osztályban és felsőbb évfolyamokon továbbfolytathatjuk, fejleszthetjük a játékot (Pappné Kovács, 2012.). A játékban őszintén megnyilatkoznak a tanulók: „Tanár néni mi csak óra végén vettük észre, hogy nem kell egyesével tekerni a mutatót!” A feladatokat végig megoldotta a két gyermek és az óra végére megérett a gondolat, hogy összevonásokat, egyszerűsítéseket lehet tenni. Tehát hasznos tapasztalatokat gyűjthetünk a gyerekek matematikai képességeiről. Ezen tapasztalatok birtokában hatékonyabban tudjuk segíteni őket. A gyerekek figyelmét meg tudjuk ragadni és ébren tudjuk tartani, ami az első és legfontosabb feltétele a tanulásnak.

## Irodalom

- Bruner, J. (1974). *Új utak az oktatás elméletéhez*. Budapest: Gondolat
- Csíkszentmihályi, M. (2000). Budapest: Akadémia.
- Freud R.-Gyarmati E. (2006). *Számelmélet*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Pappné Kovács, K. (2012. december 12). konzultáció; (ELTE).
- Pintér, K. (2012). *Számoljunk a maradékokkal; 0641 modul*. Forrás: [www.sulinet.hu/tanar/.../2.../3.../2.../amat\\_0641\\_\\_tanar.pdf](http://www.sulinet.hu/tanar/.../2.../3.../2.../amat_0641__tanar.pdf)
- Pólya, G. (1966). George Pólya in teaching US a lesson. <http://vimeo.com/48768091>, USA.
- Szendrei Julianna, R. G. (1987). *A játék matematikája*. Budapest: Tankönyv Kiadó.
- Szendrei Julianna, R. G. (1987). *MATEK-JÁTÉK Napköziben és otthon*. Budapest: Tankönyv Kiadó.