SZAKTÁRGYI OKTATÁS:

Mészáros Jenő:

Magasabbrendű számtani sorozatok és hiperharmonikus sorok összegezése

-ed rendő számtani sorozat tagjai alatt az

$$a_n=c_p n^p+c_{p-1}n^{p-1}+c_{p-2}n^{p-2}+ \dots + c_o$$

p-ed fokú polinom által meghatározott numerikus értékeket értjük, ahol p és n természetes számokat, c_i adott konstansokat jelentenek. Ezek összege alatt pedig $s_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ értékét értjük.

Hiperharmonikus sorok alatt pedig az $sn=\sum_{i=1}^{\infty} i^p=1^p+2^p+3^p+\dots+n^p+\dots$ alakú kifejezést értjük, ahol p tetszőleges valós szám.

A

Foglalkozzunk először azzal a speciális esettel, amikor $a_n=n^p$ és keressük $s_n=1^p+2^p+3^p+\dots+n^p$ összeg értékét.

A/a Legyen először p természetes szám. Ha s_n-et úgy tekintjük, mint hiperharmonikus sort, akkor határértéke végtelen. Tekintsük s_n-et számtani sorozat összegének véges n-re, és számítsuk ki az összeg képletét.

Ha $p=o$, akkor az $a_n=n^o$ általános tagú számtani sorozat összegének képlete:

$$s_n=1^o+2^o+3^o+ \dots +n^o=n$$

Ha $p=1$, akkor $a_n=n$ és

$$s_n=1+2+3+ \dots +n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

Ha $p=2$, akkor $a_n=n^2$ és

$$s_n=1^2+2^2+3^2+ \dots +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

mely eseteket középiskolás tankönyvek tárgyalják.

Ha $p=3$, akkor $a_n=n^3$, vagyis

$a_1=1$ $a_2=8$ $a_3=27$ $a_4=64$ $a_5=125$ ....

$s_1=1$ $s_2=9$ $s_3=36$ $s_4=1oo$ $s_5=225$ ....

Itt észrevesszük, hogy

$s_1=1^2$ $s_2=3^2$ $s_3=6^2$ $s_4=1o^2$ $s_5=15^2$ ....

amiből kitalálhatjuk, hogy $s_n=/\frac{n(n+1)}{2}/^2$ és ezt az erdményt teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

Az eddigi képletekből észrevehetjük, hogy a p-ed rendű számtani sorozat összegképletének polinom alakja p+1-ed rendű, és ezen az észrevételen alapszik a tetszőleges fokszámú számtani sorozat összegképletének egyik számítási módja. Ha ez az észrevételünk nem volna helyes, akkor a képleteknek teljes indukcióval való bizonyítása nem sikerülne.

Példaképpen nézzük az

$s_n = 1^3+2^3+3^3+ \ldots +n^3$ esetet,

amikor

$s_n = an^4+bn^3+cn^2+dn+e$ alakban keresendő. Ebben a képletben öt ismeretlen van, ehhez úgy tudunk 5 egyenletet felírni, ha n=o,1,2,3,3 helyettesítéssel az ismert összeg számértékét is helyettesítjük:

$$\left.\begin{array}{r} 0+0+0+0+e=0 \\ a+b+c+d+e=1 \\ 16a+8b+4c+2d+e=9 \\ 81a+27b+9c+3d+e=36 \\ 256a+64b+16c+4d+e=100 \end{array}\right\}$$

Ha ezt az egyenletrendszert megoldjuk (legjobb úgy elvégezni, hogy az n+l-ik sorból kivonjuk a n-iket), akkor eredményül kapjuk:

$a=1/4 \quad b=1/2 \quad c=1/4 \quad d=0 \quad e=0$

vagyis az összegképlet:

$$s_n = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$, amint már láttuk.

<u>A/b</u> Az előbbi eredményeket más módszerrel is megkaphatjuk.

Tételezzük fel, hogy az

$$s_n=an^{p+1}+bn^p+cn^{p-1}+\dots$$

összegképlet n-re is és n+1-re is jó. Ekkor írhatjuk:

$$s_{n+1}=s_n+(n+1)^p$$

Példaképpen nézzük meg

$s_n=1^4+2^4+3^4+\ \dots\ +n^4=an^5+bn^4+cn^3+dn^2+en+f$ képletének kiszámítását:

$$a(n+1)^5+b(n+1)^4+c(n+1)^3+d(n+1)^2+e(n+1)+f=$$

$$=an^5+bn^4+cn^3+dn^2+en+f+(n+1)^4$$

Ha a hatványozásokat elvégezzük, egy oldalra rendezünk, akkor kapjuk:

$$(5a-1)n^4+(10a+4b-1)n^3+(10a+6b+3c-1)n^2+$$

$$(5a+4b+3c+2d-1)n+(a+b+c+d+e-1)=0$$

A kifejezésnek minden n-re 0-nak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha n hatványainak együtthatói mind egyenlőek 0-val:

$$\left.\begin{array}{l} 5a-1=0 \\ 10a+4b-1=0 \\ 10a+6b+3c-1=0 \\ 5a+4b+3c+2d-1=0 \\ a+b+c+d+e-1=0 \end{array}\right\}$$

Ez már gyorsan megoldható és kapjuk:

$a=1/5 \quad b=1/2 \quad c=1/3 \quad d=o \quad e=-1/3o.$

$$s_n=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}+\frac{n}{3o}+f$$

f értéke $n=1$, $s_1=1$ helyettesítéssel kapható, és $f=o$-t kapunk.

A/c Ha az

$$a_n=c_p n^p + c_{p-1}n^{p-1} + c_{p-2}n^{p-2} + \dots + c_o$$

alakú számtani sorozat összegképletét akarjuk kiszámítani, akkor

$$s_n=\sum a_n=c_p\sum n^p + c_{p-1}\sum n^{p-1} + c_{p-2}\sum n^{p-2}+ \dots$$

értelmezés alapján is eljárhatunk, amikor is $\sum n^k$ értékeket már ki tudjuk számítani és az összevonásokat elvégezzük. Legyen adva egy számtani sorozat pl. $a_n=2n^2+3n+4$ képlettel.

Ekkor

$$\sum_1^n n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$\sum_1^n n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$\sum_1^n 1=n$$

tehát

$$s_n=2\cdot\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)+3\cdot\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)+4\cdot n=$$
$$=\frac{4n^3+15n^2+35n}{6}$$

Az ilyen alakú számtani sorozatok összegképletét más módon is megkaphatjuk.

Vizsgáljuk példaképpen az $a_n=2n^3-9n^2+8n+3$ képlet által adott számtani sorozatot.

Az $a_1=4$, $a_2=-1$, $a_3=o$, $a_4=19$, $a_5=68$, $a_6=159\ldots$ értékeket írjuk egymás mellé, számítsuk az egymás után következő tagok különbségeit, a különbségek különbségeit, stb.:

```
4    -1    o    19    68    159 ...
  -5    1    19    49    91 ...
     6    18    3o    42 ...
       12    12    12 ...
          o     o ...
```

Az első sor harmadrendű, a második sor másodrendű, a negyedik sor o-adrendű, azaz konstans tagokat tartalmazó számtani sorozat. Bármilyen rendű számtani sorozat differenciáinak ilyen sorozata előbb-utóbb o-hoz vezet, ami könnyen belátható:

$$P_p(n+1)-P_p(n)= \Delta P_p \quad \text{és} \quad \Delta P_p \quad \text{eggyel alacsonyabb-}$$

rendű mint P_p.

Mivel p természetes szám, azért előbb-utóbb a o-d rendű számtani sorozatot kapunk. A felírt táblázatot tudjuk folytatni a_n képlete nélkül is, sőt ha megkapjuk az első ferde oszlop adatait (4,-5,6,12,o), akkor is ki tudjuk számítani bármelyik számtani sorozat bármelyik tagját, mert minden

$$\begin{array}{ccc} -r- & & -s- \\ & -t- & \end{array}$$ alakban

szereplő három számra érvényes:

$$r + t = s.$$

Legyen tehát adva a_1 , a_2 , a_3...., amikből könnyen ki tudjuk számítani a d_1 , d_2 , d_3 , d_4 .... ferde oszlop differencia értékeit, és számítsunk ki egy képletet a_n-re a differencia értékekből. Legyen $a_1=d_1$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
d_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & \dots & \\
& d_2 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & \dots & & \\
& & d_3 & & c_2 & & c_3 & \dots & & & \\
& & & d_4 & & e_2 & \dots & & & & \\
& & & & d_5 \dots & & & & & & \\
& & & & \vdots & & & & & &
\end{array} \qquad (1)$$

Az előbbi ∇ összefüggés alapján írhatjuk a következő egyenleteket:

$e_2=d_4+d_5$

$c_2=d_3+d_4$

$b_2=d_2+d_3$

$a_2=d_1+d_2$

$c_3=c_2+e_2=d_3+2d_4+d_5$

$b_3=b_2+c_2=d_2+2d_3+d_4$

$a_3=a_2+b_2=d_1+2d_2+d_3$

$b_4=b_3+c_3=d_2+3d_3+3d_4+d_5$

$a_4=a_3+b_3=d_1+3d_2+3d_3+d_4$

$a_5=a_4+b_4=d_1+4d_2+6d_3+4d_4+d_5$

Felismerhetjük a binomiális együtthatókat, azért írjuk ezekkel:

$a_3=\binom{2}{0}d_1+\binom{2}{1}d_2+\binom{2}{2}d_3$

$$a_4=\binom{3}{o}d_1+\binom{3}{1}d_2+\binom{3}{2}d_3+\binom{3}{3}d_4$$

$$a_5=\binom{4}{o}d_1+\binom{4}{1}d_2+\binom{4}{2}d_3+\binom{4}{3}d_4+\binom{4}{4}d_5$$

És így általában írhatjuk:

$$\boxed{a_n=\binom{n-1}{o}d_1+\binom{n-1}{1}d_2+\binom{n-1}{2}d_3+\binom{n-1}{3}d_4+\ \dots} \qquad (2)$$

Ebben a képletben vagy a binomiális együtthatók, vagy d_i értékei előbb-utóbb zérussá válnak, ezért a képlet akármilyen számtani sorozat n-ik tagjának kiszámítására alkalmas.

Előbbi példánkban $d_1=4$, $d_2=-5$, $d_3=6$, $d_4=12$, $d_5=d_6=\dots=o$.

Ezekkel

$$a_n=\binom{n-1}{o}\cdot 4-\binom{n-1}{1}\cdot 5+\binom{n-1}{2}\cdot 6+\binom{n-1}{3}\cdot 12+o+o\ \dots\dots$$

vagy az összevonásokat elvégezve:

$a_n=2n^3-9n^2+8n+3$, amint adva volt.

Számítsuk most az n-ed rendű számtani haladvány összegét:

$$s_n=a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_n$$

A számítás egyszerű lesz az előbbi eljárás és eredmény figyelembevételével.

Irjuk fel a (1) táblázatot és felül egészítsük ki az összeg értékével:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & s_1 & & s_2 & & s_3 & & s_4 \ldots \\ & d_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \ldots & \\ & & d_2 & & b_2 & & b_3 \ldots & & \\ & & & d_3 & & c_2 \ldots & & & \\ & & & & d_4 \ldots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \end{array} \qquad (3)$$

A ∇ alakú összefüggés itt is igaz, mert $s_n = s_{n-1} + a_n$ igaz a táblázatban is és igaz a számtani sorozatok összegezésének értelmezése szerint is.

Alkalmazzuk a (3) táblázat első sorára a (2) képletet:

$$s_{n-1} = \binom{n-1}{o} \cdot o + \binom{n-1}{1} d_1 + \binom{n-1}{2} d_2 + \ldots$$

n-1 helyett n-et írva

$$\boxed{s_n = \binom{n}{1} d_1 + \binom{n}{2} d_2 + \binom{n}{3} d_3 + \ldots} \qquad (4)$$

kapjuk az n-edrendű számtani sorozat összegképletét. /Ezeknek a képleteknek bizonyítása megtalálható: Fekete - Targouszky: Kombinatórika 51. oldal (Tankönyvkiadó 1954) c. könyvben/

Próbáljuk ki a (4) képletet a fentebbi $a_n=2n^3-9n^2+8n+3$ által adott számtani sorozatra:

$$s_n=\binom{n}{1}\cdot 4-\binom{n}{2}\cdot 5+\binom{n}{3}\cdot 6+\binom{n}{4}\cdot 12=$$

$$=4n-\frac{n(n-1)}{2}\cdot 5+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 6+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\cdot 12=$$

$$=\frac{n^4-4n^3+11n}{2}.$$

Ha pl. $n=6$, akkor

$$s_6=4-1+0+19+68+159=\frac{6^4-4\cdot 6^3+11\cdot 6}{2}=249.$$

Következő példa legyen

$s=1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$ képletének számítása.

Itt $a_1=d_1=1$; $a_2=2^4=16$; $a_3=3^4=81$ ...

A táblázat:

1		16		81		256		625		1296 ...
	15		65		175		369		671	
		5o		11o		194		3o2		
			6o		84		1o8			
				24		24				
					o					

Látjuk, hogy $d_1=1$; $d_2=15$; $d_3=50$; $d_4=60$; $d_5=24$; $d_6=0$.
Alkalmazva a (4) képletet:

$$s_n=\binom{n}{1} + 15\cdot\binom{n}{2} + 50\cdot\binom{n}{3} + 60\cdot\binom{n}{4} + 24\cdot\binom{n}{5}$$

Ez már használható képlet. Ha a szorzásokat és összevonásokat elvégezzük, kapjuk:

$$s_n= \frac{6n^5+15n^4+30n^3-n}{30} .$$

Számítás nélkül leírunk még egy-két eredményt:

$$1^5+2^5+3^5+ \dots +n^5= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$1^6+2^6+3^6+ \dots +n^6= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$1^7+2^7+3^7+ \dots + n^7= \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

B

Legyen most $p \leq -2$ negatív egész szám.
Most a $\sum_{1}^{\infty} n^p$ hiperharmonikus sor minden p-re konvergens. Abszolút pontos eredményeket nem lehet számítani, csak tetszőleges pontosságra közelíthető értékeket. Ugyancsak tetszőleges pontosságra ki tudjuk számítani a sor részletösszegeit is. A számításokat nemcsak elméleti úton, hanem gyakorlati úton zsebszámológép segítségével is végezzük.

B/a A Fourier sorok elméleténél megtalálhatjuk, hogy ha az $f(x)=x$; $|x|$; x^2 .... függvényeket

$$f(x)= \frac{a_o}{2} + \sum a_k \cos k_x + \sum b_k \sin k_x$$

alapján sorba fejtjük, majd x helyébe o ; π ; $\frac{\pi}{2}$ ... értékeket helyettesítünk, akkor π hatványaira kapunk hiperharmonikus sorokat.

Legyen pl. $f(x)=x$; ennek sora:

$$x= \pi -2\cdot(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots)$$

Helyettesítsünk $x=\frac{\pi}{2}$-t, ekkor lesz:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

Vagy legyen $f(x)=x^2$. Ennek Fourier sora:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-+\ldots\ldots\right)$$

Helyettesítsünk $x=0$-t, akkor kapjuk:

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\ldots\ldots$$

Ha pedig $x=\pi$ helyettesítést végezzük:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$

Ha az x^2 Fourier sorát integráljuk, lesz:

$$\frac{x^3}{3}=\frac{\pi^2 x}{3}-4\cdot\left(\frac{\sin x}{1^3}-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-+\ldots.\right)+C$$

Helyettesítsünk $x=\frac{\pi}{2}$ -t és kapjuk:

$$\frac{\pi^3}{32} = 1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+-\ldots.$$

(C=o, ami x=o helyettesítésből adódik.)

Sajnos nem lehet minden hiperharmonikus sort Fourier sorokkal kiszámítani; nem lehet pl.

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots.$$

értékét megkapni. Páros kitevőkre van eredmény:

$$\sum\frac{1}{n^4} = 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots = \frac{\pi^4}{90};$$

$$\sum\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}; \qquad \sum\frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450};$$

B/b Más természetű megoldásokat kapunk, ha ezeket a lassan konvergáló hiperharmonikus sorokat maradéktagok keresésével gyorsan konvergáló sorokká alakítjuk. Ha ismerjük a sor határértékét, akkor gyorsabban, ha nem ismerjük, akkor lassabban jutunk eredményhez.

Sokszor gyors eredményeket kapunk zsebszámológép felhasználásával.

B/bl. Számítsuk ki pl.

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$ értékét 9 tizedesjegy pontossággal.

Tudjuk, hogy $s = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ végtelen sor részletsorozatainak értékei korlátosak és a sor határértéke $\pi^2/6$. Használjunk zsebszámológépet.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{R_n} \qquad (5)$$

Az $\frac{1}{R_n} < 1$, tehát $R_n > 1$ és irracionális szám.

Közelítsük R_n-et egy polinommal. (5)-ből:

$$R_n = \frac{1}{\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{n^2}}$$

zsebszámológéppel számíthatjuk a következő értékeket:

R_{1o}=1o,5o79 ...

R_{11}=11,5o72 ...

R_{12}=12,5o66 ...

R_{25}=25,5o32 ...

Láthatóan konvergál a törtrész o,5-höz és a felírt értékek alapján írhatjuk:

$$R_n = n + \frac{1}{2} \qquad \text{azaz} \qquad R_n = \frac{2}{2n+1}$$

(Ha valaki Rn=n-et írna, akkor is javulna a konvergencia, de kisebb mértékben.)

Ezért a maradéktaggal javított képlet:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n+1} \quad \ldots\ldots$$

Próba:	határérték	1,6449....
	első 5 tag összege	1,4636....
	5 tag maradéktaggal	1,6454....

A maradéktagos eredmény a határértéket olyan jól közelíti, mint az eredeti sor 2o2o tagja.

Keressük a következő maradéktagot:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{M_n} \qquad \text{Ebből:}$$

előbbihez hasonlóan a számológép eredménye:

$$\begin{array}{llll}
M_{1o}=13935,41 & & & \\
 & 4363,21 & & \\
M_{11}=18298,62 & & 828 & \\
 & 5191,2o & & 72 \\
M_{12}=23489,82 & & 9oo & \\
 & 6o91,19 & & 72 \\
M_{13}=29581,o1 & & 972 & \\
 & 7o63,18 & & \\
M_{14}=36644,19 & & &
\end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{differenciák}}$$

Harmadrendű számtani sorozatot kaptunk. Ennek felismerése néha nehéz a közelítő adatok miatt, aminek egyik oka a számológép korlátozott (11 számjegyes) pontossága. A harmadrendű számtani sorozat tagjait

$M_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ alakban keressük és az A/a pontban ismertetett módon egyenletrendszereket felírva és megoldva kapjuk:

$M_n = 12n^3 + 18n^2 + 13,2n + 3,4$

és így a legújabb eredményünk:

$$\frac{\pi^2}{6} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{12n^3+18n^2+13,2n+3,4}$$

Legyen most is $n=5$, akkor

$\pi^2/6 = 1,644934066 \ldots$

Képlettel$=1,644934096 \ldots$

Az eredeti számsorból 34 millió tagot kellene összeadni ekkora pontosság eléréséhez elméletileg, de gyakorlatilag mégsem kapnánk meg ezt az eredményt, mert már a 100 000-ik tag után a gép csak 0-kat ad össze. Másrészt minden tagnak van hibája, és ezek is összegződnek.

Legyen $s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ és képletünket átrendezve:

$$s_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{12n^3+18n^2+13,2n+3,4}$$

Számítsuk ki az első száz tag összegét:

$$s_{100} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{201} + \frac{1}{12181323{,}4} = 1{,}63498390o$$

Az első loo ooo tag összege:

$$s_{100\,000} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{200001} + 0 \text{ (számológéppel)} = 1{,}644924066$$

$(\pi^2/6=1{,}644934067)$

Számítsuk ki hasonló módszerrel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$ -hez a maradék tagokat.

Az eredmény lesz:

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp \frac{1}{4n} \pm \frac{1}{16n^3+20n} \quad \ldots$$

Az eredeti sor nagyon lassan konvergál. Pl. $4s_{10}=3{,}041$;

$4s_{12}=3{,}058$; $4s_{14}=3{,}070$

Számítsuk ki, mikor adja a sorozat először a 3,14.. értéket:

$$\frac{\pi}{4} = s_n + \frac{1}{4n} - \dots \text{-ből}$$

$$\pi = 3{,}14 + \frac{1}{n} \qquad \text{ebből} \qquad n=628$$

$s_{628} = 3{,}140000$

$s_{629} = 3{,}143182$

De ha felhasználjuk a két maradéktagot, akkor $n=10$ esetben π közelítésénél a hiba $5{,}17\cdot 10^{-8}$. (Itt általában $\Delta < n^{-7}$.)

<u>B/b2.</u> Számítsuk most

$$s = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$$ határértékét, amit

most nem ismerünk, de használhatjuk a zsebszámológépet.

Adjuk össze az első 10 és 15 tagot:

$s_{10} = 1{,}197532\dots$

$s_{15} = 1{,}199977\dots$

A sorozat monoton növekszik és első közelítésben határértéknek vegyük $s=1{,}2$ értéket.

Irjuk fel a sort maradéktaggal:

$$1,2 \approx 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{R_n}+\left(\frac{1}{M_n}+\ldots\right)$$

Ebből

$$\frac{1}{R_n}\approx 1,2-1-\frac{1}{8}-\frac{1}{27}-\ldots-\frac{1}{n^3}$$

Ez alapján számítsuk a következő értékeket:

R_3=25,o2		
	16,o6	
R_4=41,o8		4,o7
	2o,13	
R_5=61,21		4,o7
	24,2o	
R_6=85,41		

Másodrendű számtani sorozatot feltételezve az $R_n=2n^2+2n$ elég jól adja a felírt értékeket.

Folytassuk ezzel:

$$S = 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2n^2+2n}+\ldots$$

Most már sokkal pontosabban számíthatjuk az S határértéket, ha $n=1o$ és 15 helyettesítést vesszük:

$$S_{(1o)}=1,2o2o774\ldots$$

$$S_{(15)}=1,2o2o612\ldots$$

Monoton csökkenő sorozatot kapunk és most vehetjük a határértéket S=1,2o2o5-nek:

$$1,2o2o5=1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{R_n}+\ldots$$ Ebből

$R_3=24,99$		
	16	
$R_4=41,oo$		4
	2o	
$R_5=61,o2$		

Ebből a maradéktag: $R_n=2n^2+2n+1.$

Igy a legjobb eredményünk számológéppel:

$$S=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2n^2+2n+1}+\ldots$$

Ezzel számítva

$$\left.\begin{array}{l} s_{15}=1{,}2020568996 \\ s_{20}=1{,}2020569019 \end{array}\right\} \rightarrow \quad s=1{,}2020569\ldots$$

Ennél pontosabb eredmény: $s=1{,}2020569031 59\ldots$

További maradéktagot számítani számológéppel nem tudunk, mert nem kapunk pontos adatokat.

B/c Számítással keressük meg

$$S = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{R_n} + \ldots$$

első maradéktagját.

Mivel a sornak van határértéke, azért elég nagy n-re írhatjuk, hogy

$$S_n \approx S_{n+1} \qquad (\text{mert } S_{n+1}-S_n < |\varepsilon| \text{ tetszőleges kicsi szám})$$

Ez alapján

$$1 + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{R_n} \approx 1 + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{R_{n+1}}$$

Ebből

$$\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n+1}} \approx \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1}$$

R_n értékére csak an^2+bn+c másodfokú polinom jöhet számításba:

$$\frac{1}{an^2+bn+c} - \frac{1}{a(n+1)^2+b(n+1)+c} = \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1}$$

Bal oldalon közös nevezőre hozva, összevonva:

$$\frac{2an+(a+b)}{a^2n^4+(2a^2+2ab)n^3+(a^2+3ab+b^2+2ac)n^2+\dots} = \frac{1}{n^3+3n^2+3n+1}$$

Közös nevezőre hozva, nevezővel beszorozva, n hatványai szerint rendezve, kapjuk

$$2an^4+(7a+b)n^3+(9a+3b)n^2+\dots = a^2n^4+(2a^2+2ab)n^3+(a^2+3ab+b^2+2ac)n^2+\dots$$

Mivel n nagy szám, azért n magasabb kitevős együtthatói határozzák meg a,b,c értékét.

Összehasonlítás alapján:

$$\left.\begin{aligned} &2a=a^2 \\ &7a+b=2a^2+2ab \\ &9a+3b=a^2+3ab+b^2+2ac \end{aligned}\right\} \qquad a,b,c \neq 0$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\left.\begin{aligned} a&=2 \\ b&=2 \\ c&=1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad R_n=2n^2+2n+1$$

Igy is megkaptuk az

$$S=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2n^2+2n+1}+\ldots$$

gyorsabban konvergáló sort.

Próbáljuk számítani a következő maradéktagot. $S_n \approx S_{n+1}$ alapján

$$1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2n^2+2n+1}+\frac{1}{M_1}=1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n^3}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{2(n+1)^2+2(n+1)+1}+\frac{1}{M_2}$$ Ebből

$$\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}=\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{2n^2+6n+5}-\frac{1}{2n^2+2n+1}$$

Majd szorgalmas számolás után

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{4n^7+28n^6+84n^5+14on^4+141n^3+87n^2+31n+5}$$

M(n) polinom értéke most csak 6. fokú lehet. M(n) kiszámításánál most nem a számológép kapacitása, hanem türelmünk fogy ki. De ha mégis kiszámítjuk, akkor kapjuk:

$$M_1=24n^6+72n^5+132n^4+144n^3+74,4n^2+14,4n+72$$

Ezzel már olyan jól számolhatunk, hogy pl. n=2 esetben a hiba kisebb mint $6\cdot 1o^{-7}$. A maradéktagok számításából adódik, hogy a hiba itt kisebb, mint n^{-19}.

Ha M(n)-re nem polinomot, hanem csak a polinom első tagját vesszük, a számolás egyszerűsödik, a pontosság csökken. Hibakorlát számítására alkalmas.

C

Végül foglalkozzunk azzal a speciális esettel, mikor

$p=-1$:

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Ezt nevezzük harmonikus sornak és tudjuk róla, hogy divergens.

Tudjuk róla még, hogy

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \ln n + C$$

ahol $C=0{,}577215664901\ldots$ az ún. Euler féle konstans.

Számítsunk most H_n értékére egy jobb közelítőképletet. Vizsgáljuk

$$H_n \approx \ln x + C$$

kifejezésben x értékét számológéppel:

$n=$	6	7	12
$x=$	6,5063	7,5055	12,5033

Látjuk, hogy $x \approx n + \frac{1}{2}$, tehát van egy jobb közelítésünk:

$$H_n \approx \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)+C$$

Javítsuk a képletet egy maradéktaggal, és még mindig zsebszámológép segítségével próbáljuk meghatározni $R(n)$ értékét:

$$H_n \approx \ln(n+\frac{1}{2})+C+1/R(n)$$

$R_{(10)}=2650,19$		
	528	
$R_{(11)}=3178,19$		48
	576	
$R_{(12)}=3754,19$		48
	624	
$R_{(13)}=4378,19$		

Másodrendű számtani sorozatot kaptunk, és ezt kiszámítva $R(n)=24n^2+24n+10,2$ érték áll legközelebb. Igy legújabb közelítőképletünk:

$$H_n \approx \ln(n+\frac{1}{2})+C+\frac{1}{24n^2+24n+10,2} = K_n$$

Próba

$H_6=2,450000000$ $\quad$ $H_{10}=2,928968254$

$K_6=2,449999966$ $\quad$ $K_{10}=2,928968252$

n növekedésével a pontosság is növekszik. Ezért a képlet nemcsak H_n, hanem ennek ismeretében C kiszámítására is alkalmas.
A számítás azt mutatja, hogy ennek a képletnek a hibája:

$$h < \frac{1}{386 \cdot n^6}$$

D

A továbbiakban p értékét terjesszük ki tört számokra is, eljárásunkban pedig most számítást alkalmazzunk.

A végtelen sorokról szóló könyvekben találkozhatunk a Bernoulli számokkal, melyek sok feladatban előfordulnak, és a hiperharmonikus sorok összegezésében is ezek szerepelnek.
A keresett képlet szintén végtelen sor, de nagyon jól konvergál, a tagokban szerepelnek a B számok, melyek első látásra teljesen szabálytalanok és először ezek kiszámításával foglalkozunk:

Ha az $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ függvényt az $x=o$ pont környezetében Taylor sorba fejtve gondoljuk:

$$f(x)=B_o+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\ldots \qquad \text{alakban,}$$

és mivel ismerjük:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

azért

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f(x)=\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)\cdot\left(B_o+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\ldots\right)=1$$

Ha a két konvergens végtelen sor szorzását végezzük és x^n együtthatóját nézzük, akkor kapjuk:

$$\frac{B_n}{n!\,1!}+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!\,2!}+\ldots+\frac{B_o}{(n+1)!}=o$$

Ha a $(n+1)!$-sal beszorzunk, akkor az eredmény felírható

$$(B+1)^{n+1}-B^{n+1}=o \qquad \text{szimbolikus alakban.}$$

Ha a hatványozást elvégezzük, akkor B^k helyébe B_k-t írunk.

Helyettesítsünk ebbe a rekurziós formulába $n=1,2,3,4\ldots$ értékeket, akkor kapjuk a

$$2B_1+1=0$$

$$3B_2+3B_1+1=0$$

$$4B_3+6B_2+4B_1+1=0$$

$$5B_4+10B_3+10B_2+5B_1+1=0$$

egyenleteket, melyekből számíthatjuk:

$$B_1=-\frac{1}{2}\,,\quad B_2=\frac{1}{6}\,,\quad B_3=0\,,\quad B_4=-\frac{1}{3.}\quad \ldots$$

$B_5=B_7=B_9=\ldots=0$; páratlan indexű Bernoulli számok értéke B_1 kivételével mindig 0.

Néhány további számérték:

$$B_6=\frac{1}{42}\,,\quad B_8=-\frac{1}{30}\,,\quad B_{10}=\frac{5}{66}\,,\quad B_{12}=-\frac{691}{2730}\,,$$

$$B_{14}=\frac{7}{6}\quad\ldots$$

Az említett könyvekben megtalálhatjuk a képlet levezetését és az eredményt:

$$1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p=\frac{(n+B)^{p+1}-B^{p+1}}{p+1}\,.$$

Végezzük el a hatványozást, és helyettesítsük be a B számokat:

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1} + \binom{p+1}{1} n^p B_1 + \binom{p+1}{2} n^{p-1} B_2 + \ldots - B_{p+1}}{p+1} =$$

$$= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} \cdot n^p + \frac{p}{12} \cdot n^{p-1} - \frac{p(p-1)(p-2)}{720} \cdot n^{p-3} +$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-4)}{30240} \cdot n^{p-5} - \frac{p(p-1)\ldots(p-6)}{30 \cdot 8!} \cdot n^{p-7} + \tag{6}$$

$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-8)}{13{,}2 \cdot 10!} \cdot n^{p-9} - \ldots - \frac{B_{p+1}}{p+1} + C_p$$

A mi dolgunk az lesz, hogy ezt a képletet alkalmassá tegyük bármely valós p esetében az összeg kiszámítására. Vigyázni kell, hogy a képlet sora konvergens legyen, ugyanis a B számok sorozata divergens.

Továbbá C_p konstans értéke esetenként változik, ennek ismerete nélkül nem ér semmit az eredmény.

D/a Legyen először $p \geq 0$ egész szám. Ebben az esetben $C=0$, az n^{p-k} együtthatói előbb-utóbb 0-ak lesznek és egyszerűen kapjuk az ismert eredményeket. Pl. legyen $p=4$. Ekkor

$$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot n^4 + \frac{4}{12}\cdot n^3 - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{720}\cdot n +$$

$$+ 0 + 0 + \dots - \frac{0}{5} + 0 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

D/b Legyen most $p > -1$ és törtszám. Ebben az esetben B_{p+1}-nek nincs értéke, C_p-t nem ismerjük.

Számítsuk pl. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{10}$ értékét:

Számológéppel: 22,46827818

Képlettel: 22,67616439 + C

Ez az eredmény nem ér sokat. De azt meg tudjuk csinálni, hogy a számológép és képlet eredményeinek különbségét kiszámítjuk, $C=-0{,}20788621\dots$ és ha C állandó, akkor most már jó lesz a képletünk minden n-re, de csak $p=0{,}5$ esetben.

Legyen most $n=20$, és számítsuk $1+ 2 + 3 + \dots + 20 = ?$

Számológéppel: 61,66597778

Képlet - 0,2078: 61,66597779

Először tehát kénytelenek vagyunk a konstansot kiszámítani, és csak utána tudjuk a képletet alkalmazni.

A konstans értéke p-től függ. Pl. p=2,4 esetében C=-0,0077..., p=-0,7 esetében C=-2,7783884... , p=-0,99 esetben C=-99,4235...

D/c Legyen p=-1. Ebben az esetben a képlet

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} = \frac{n^{o}}{o}$$

miatt nem jó. De már tudjuk, hogy ebben az esetben a képlet logaritmussal kezdődik és a konstans C=0,57721566490l... . A képlet többi tagjába pedig már lehet helyettesíteni a p=-1-et. Ezért az eredmény:

$$H_n = 1+\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} +$$

$$+ \frac{1}{12on^4} + \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{24on^3} - \frac{1}{132n^{1o}} + \ldots$$

A sor annál gyorsabban konvergál, minél nagyobb n.

D/d Legyen most $p < -1$ és egész szám.
Vizsgáljuk a (6) képletet p=-2 esetében:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \dots + C$$

$n > 3$ esetben az egyenlőség bal oldala pozitív, az n-et tartalmazó jobb oldal negatív, tehát C konstans ismerete nélkül nem használható az összefüggés. Rendezzük az egyenletet:

$$C = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \dots\right)$$

A bal oldal állandó, a jobb oldalnak is állandónak kell lennie bármely n-re, ami csak úgy lehetséges, ha C értéke éppen a hiperharmonikus sor határértéke. Ugyanis

$1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ sornak van határértéke, mivel $p < 1$,

az $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \dots$ határértéke $n \to \infty$ esetben 0.

Ezért $p = -2$ esetében a határérték számításának képlete:

$$H = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5} + \frac{1}{42n^7} - \dots$$

$n = 10$ esetben $H = 1{,}644934067\dots$

és $\pi^2/6 = 1{,}6449340668\dots$

Irjuk át a (6) képletet $p \rightarrow -p$ helyettesítéssel a H határérték számítására:

$$H = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} - \frac{1}{2n^p} + \frac{p}{12n^{p+1}} - \frac{p(p+1)(p+2)}{30 \cdot 4!\, n^{p+3}} - \frac{p(p+1)\dots(p+4)}{42 \cdot 6!\, n^{p+5}} - \frac{p(p+1)\dots(p+6)}{30 \cdot 8!\, n^{p+7}} + \dots \qquad (7)$$

D/e Ha $p < -1$ és törtszám, a (7) képlet ekkor is alkalmazható. A (6) és (7) képletekre vonatkozóan meg kell jegyezni, hogy a sor pszeudo konvergens. Ez azt jelenti, hogy a képlet bizonyos tagszámig jól konvergál, attól kezdve oszcilláló sorrá alakul, és a számított részletsorozatok eredményei a létező határértéktől tetszőleges nagy pozitív és negatív értékekkel eltérnek. Ennek oka a Bernoulli számok természetében rejlik. B_{16}-tól kezdve az értékek rohamosan növekszenek, pl. $|B_{16}| \approx 7{,}09$; $|B_{18}| \approx 54{,}97$; $|B_{20}| \approx 527$; $|B_{22}| \approx 6169$ .... általában érvényes $B_{2n+2} \approx \left(\frac{n+1}{\pi}\right)^2 \cdot B_{2n}$. Mégis jól használható ez a képlet, és több tizedesre jó eredményt kapunk, ha a Bernoulli számokat tartalmazó tagoknál B_{16}-nál megállunk. Ha mégis növelni akarjuk a pontosságot, akkor válasszuk n értékét nagyobbra. Kiszámítható, hogy ha a képlet sora a B_{2k}-nál kezd oszcillálni, akkor $k \approx \pi \cdot n$. Ha pl. n=lo, akkor B_{62} után kezdődik a baj; innentől kezdve a tagok hányadosa $a_{n+1}/a_n > 1$. B_{30}-nál a hányados kb. 2/9, míg kezdetben kisebb, mint 1/loo.

E

Végezetül állítsunk elő még egy képletet a hiperharmonikus sorok összegezésére.

Irjuk fel n^p-t

$$a\cdot\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p+1}-\left(n-\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right]+b\cdot\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-1}-\left(n-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right]+$$

$$+c\cdot\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-3}-\left(n-\frac{1}{2}\right)^{p-3}\right]+\dots$$

alakban és keressük a,b,c... értékét.

Fejtsük ki a kifejezést binomiális sorba és rendezzük:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot\binom{p+1}{1}n^p + a\binom{p+1}{3}n^{p-2}\cdot\frac{1}{4} + a\binom{p+1}{5}n^{p-4}\cdot\frac{1}{16} \\ \qquad + b\binom{p-1}{1}n^{p-2} \qquad + b\binom{p-1}{3}n^{p-4}\cdot\frac{1}{4} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + c\binom{p-3}{1}n^{p-4} \end{array}\right\} = n^p + 0 + 0$$

Azonos kitevőjű hatványok együtthatóinak egyenlőségéből a,b,c... értéke kiszámítható:

$$a = \frac{1}{p+1} \qquad b = -\frac{p}{24} \qquad c = \frac{7}{960}\binom{p}{3}$$

Vezessük be a következő rövidítést:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^s - \left(n-\frac{1}{2}\right)^s = N^{(s)}$$ és ekkor írhatjuk:

$$n^p = \frac{1}{p+1}\cdot N^{(p+1)} - \frac{1}{24}\binom{p}{1}N^{(p-1)} + \frac{7}{960}\binom{p}{3}N^{(p-3)} -$$

$$-D\binom{p}{5}N^{(p-5)} + E\binom{p}{7}N^{(p-7)} - \dots$$

D, E,... értékeit az előbbi binomiális sorfejtés folytatásával számíthatjuk, de sokkal egyszerűbb módon is megkaphatjuk.

A képletnek jónak kell lenni minden n-re és p-re, D, E... értékei függetlenek n-től és p-től. Ha p egész szám, a képlet véges hosszú lesz, mert a többi tagból 0 lesz.

Legyen $n=1/2$ és $p=7$:

$$\frac{1}{128}=\frac{1}{8}\cdot(1^8-0^8)-\frac{7}{24}(1^6-0^6)+\frac{7.35}{960}\cdot 1-D\cdot 21$$

Ebből $D=\frac{31}{8064}$. Tovább folytatva $n=\frac{1}{2}$ és $p=9$ ...

kapjuk: $E=\frac{127}{30720}$, $F=\frac{511}{67584}$ ...

Most végezzük el az összegezést. A fenti képlet alapján:

$$\left.\begin{aligned}
1^p &= \frac{1}{p+1}(1{,}5^{p+1}-0{,}5^{p+1})-\frac{1}{24}\binom{p}{1}(1{,}5^{p-1}-0{,}5^{p-1})+\dots\\
2^p &= \frac{1}{p+1}(2{,}5^{p+1}-1{,}5^{p+1})-\frac{1}{24}\binom{p}{1}(2{,}5^{p-1}-1{,}5^{p-1})+\dots\\
3^p &= \frac{1}{p+1}(3{,}5^{p+1}-2{,}5^{p+1})-\dots\dots\dots\dots\\
&\text{-----------------------------------}\\
n^p &= \frac{1}{p+1}/(n+\tfrac{1}{2})^{p+1}-(n-\tfrac{1}{2})^{p+1}-\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}+$$

Összeadás után

$$1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p= \tag{8}$$

$$= \frac{1}{p+1}\left[(n+\frac{1}{2})^{p+1}-0,5^{p+1}\right] - \frac{1}{24}\binom{p}{1}\left[(n+\frac{1}{2})^{p-1}-0,5^{p-1}\right]+\ldots$$

Ha p természetes szám, akkor ez a képlet jó. Ha p törtszám vagy negatív egész, akkor a sor $0,5^s$ miatt divergens. Át kell alakítani a képletet, hogy csak $(n+1)^p+(n+2)^p+\ldots+m^p$-re számítjuk az összeget, az előtte lévő tagokat képlet nélkül összeadjuk:

$$1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p+(n+1)^p+\ldots+m^p= \tag{9}$$

$$1^p+2^p+\ldots+n^p+\frac{1}{p+1}\left[(m+\frac{1}{2})^{p+1}-(n+\frac{1}{2})^{p+1}\right] - \frac{1}{24}\binom{p}{1}\left[(m+\frac{1}{2})^{p-1}-(n+\frac{1}{2})^{p-1}\right] +$$

$$+ \frac{7}{960}\binom{p}{3}\left[(m+\frac{1}{2})^{p-3}-(n+\frac{1}{2})^{p-3}\right] - \ldots\ldots$$

Ez a képlet most már jó p=1 kivételével minden p-re, és nagy előnye a (6) képlettel szemben, hogy nincs benne előre kiszámítandó C állandó.

Ha $p \to -p$, és $m \to \infty$, akkor H határértékre:

$$H = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots = 1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} +$$

$$+ \frac{1}{p-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{p-1} - \frac{1}{24}\binom{p}{1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-p-1} + \frac{7}{96o}\binom{p+2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-p-3} -$$

$$-\frac{31}{8o64}\binom{p+4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-p-5} + \ldots \qquad \text{ahol } p > 1.$$

Legyen most $p = -1$. Ekkor keressük

$$\frac{1}{p+1}\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^{p+1} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{p+1}\right]$$ kifejezés határértékét, ha

$p \to -1$. Ekkor kapjuk a harmonikus sor összegezésének képletét:

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ln\frac{2m+1}{2n+1} - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{(n+o,5)^2} - \frac{1}{(m+o,5)^2}\right) +$$

$$+ \frac{7}{96o}\left(\frac{1}{(n+o,5)^4} - \frac{1}{(m+o,5)^4}\right) - \frac{31}{8o64}\cdot\left(\frac{1}{(..)^6} - \frac{1}{(..)^6}\right) + \ldots\ldots$$

Itt sem szerepel az Euler féle C állandó.

Végül megemlítjük, hogy a (9)-ik képlet k-ik tagjának általános alakja:

$$a_k = -\frac{(2^{2k-1}-1)}{k\cdot 2^{2k}} \cdot B_{2k}\binom{p}{2k-1} \cdot \left[(m+\frac{1}{2})^{p-2k+1} - (n+\frac{1}{2})^{p-2k+1}\right]$$

ahol az első tag $-\frac{1}{24}\cdot\binom{p}{1}\cdot\left[\ldots\ldots\right]$.