

ÉRTESÍTŐ

AZ ERDÉLYI MÚZEUM-EGYLET ORVOS-TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAKOSZTÁLYÁBÓL.

II. TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAK.

XXI. kötet.

1899.

II.—III. füzet.

Vector-tan és az egyszerű inaequatiók tana.

Mathematikai bevezetés az elméleti physikába.

Dr. FARKAS GYULA egyet. ny. r. tanártól.

Vector-tan.

I. A meghatározó rendszer megválasztása.

Tengelyen mindig szabott irányú és helyű egyenest értsünk.

Közönségesen derékszögű tengely-rendszert használunk helyhatározásra; és pedig jobbra fordulót. Ha tehát egy órát úgy helyezünk el, hogy a harmadik tengely a számlapjára merőlegesen álljon és a számlapnál az óraszerkezet belseje felé mutasson, akkor az óramutatók járásával egyező értelemben kell fordítanunk az első tengelyt a harmadik körül, hogy egy derékszög leírása után iránya a második tengely irányába essék.

Bármely tengely körül ebben az értelemben történő fordulást nevezünk mindig pozitívus fordulásnak, már t. i. arra a tengelyre vonatkozólag. Az ellenes értelemben valót negatívus fordulásnak nevezük az illető tengelyre nézve. Világos, hogy amely fordulás egy tengelyre nézve pozitívus, az ellenes irányú, de azonos helyű tengelyre vonatkozólag negatívus.

A pozitívus fordulással származó szögeket pozitívusoknak, a negatívus fordulással származókat negatívusoknak számítjuk.

II. A vector alap-fogalma.

Válasszunk a térben egy egyenes vonal-darabot. Egyik határpontját jelöljük A -val, a másikat B -vel. Végtelen sok hosszúságot tartalmaz. Mindazt, amely kisebb az AB hosszúságnál, és magát az AB hosszúságot. Továbbá két irányt tartalmaz. Az $A-B$ irányt és a $B-A$ irányt.

Midőn a hosszúságok közül csupán a teljes AB hosszúságot, és a kétféle irány közül is csupán az egyiket vesszük tekintetbe, vector-nak nevezük az egyenes vonal-darabot. Ha az $A-B$ irányt tulajdonítjuk

19 152 1944 19-2

neki, akkor határpontjainak a betűivel AB alakban jelöljük, és A pontját az elejének vagy kezdetének, B pontját a végének nevezzük.

Az AB vektort a B pont A ponti vectorának is nevezzük. Így például egy helyhatározó rendszer origójából egy pontba húzott vector ennek a pontnak az origói vectora. Ha valamely vector eleje egy I nevű tengelyben van, s a vector merőleges erre a tengelyre, a vége pedig C nevű pontban van, akkor a vektort a C pont I tengelyű vectorának is nevezzük.

A vectorok hosszúságát és irányát illetőleg hasznos mennyiségi vonatkozásokat veszünk számba és definiálunk, amelyek rendén a vector mint mennyiségi műveletek tárgya, mint mennyiség jelentkezik. Ez által válik teljessé a vector-fogalom definitiója az elméleti physika szolgálatában.

III. A vectorok egyenlősége és határozói.

A már előre bocsájtott alap-definiciónak megfelelően:

ha két vector AB, CD , egyenlő hosszú és egyező irányú, akkor, és csak akkor, egyenlőknek mondjuk azokat, s ezt röviden a szokásos egyenlőségi jellel írjuk:

$$AB = CD;$$

ha azonban két vector hosszúsága, vagy iránya, vagy hosszúsága is, iránya is különböző, akkor, és csak akkor mondjuk különbözőknek a vectorokat.

Bármely pontba helyezzük tehát egy vector elejét, ha hosszúságát és irányát nem változtatjuk meg, a vector is változatlan marad. És valahányszor egy vector hely-változtatásáról beszélünk, különös kijelentés hiányában, mindig hosszúságának s irányának meghagyásával értjük azt.

Mindebben egyező irányokon ugyanazon végtelen távoli pont felé mutató irányok értendők, mint rendesen.

Ha egy vector elejét az origóba helyezzük, akkor végének a helye teljesen meghatározza a vektort, mert hosszát is, irányát is meghatározza. Ekkor tehát végének a koordinatái teljesen meghatározzák. Ezeket a vector-határozókat a vector componenseinek nevezzük. Ha ξ, η, ζ a három componens, úgy ezekkel a (ξ, η, ζ) alakban jelöljük a vektort.

Bárhol legyen egy vector eleje, ha elejének a koordinatáit rendre kivonjuk végének a koordinatáiból, componenseit nyerjük. Mert, ha elejének a koordinatái x, y, z , úgy végének a koordinatái algebrailag ezekkel az értékekkel nagyobbak, mint mikor eleje az origóban van. Midőn eleje az x, y, z pontban van, akkor végének a koordinatáit x', y', z' jelölvén: $\xi = x' - x$, stb.

Egy vector componenseit viszont teljesen meghatározza a vector; mert eleje az origóba helyezettvén, a vége meghatározza a maga koordinatáit.

Amely mennyiségek valami módon meghatározzák a vector componenseit, azok nyilvánképen meghatározzák a vectort.

Ilyetén vector-határozók a vector hossza és az irányát határozó u. n. iránycosinusai, vagyis azoknak a szögeknek a cosinusai, amelyek alatt a vector iránya rendre a coordinata-tengelyek irányába fordítható. Ha ugyanis r a vector hossza és α, β, γ az irány-cosinusai, akkor a vector componensei:

$$\xi = r\alpha, \quad \eta = r\beta, \quad \zeta = r\gamma.$$

Oly határozók ezek is, amelyeket viszont, a vector teljesen meghatároz, mert a componensei teljesen meghatározzák azokat: az r hosszúság oly derékszögű hasáb átmérőinek a hosszúsága, amelynek az éleit a componensek szolgáltatják, tehát

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

és ebből folyólag

$$\alpha = \xi : \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \text{ stb.},$$

ahol a gyök-kifejezés mindig positivusnak számítandó, mivel pusztá hosszúságot jelent.

A három iránycosinus kifejezéséből a három componens egy módon kiküszöbölhető, minélfogva a három iránycosinus egy szabott relatióknak tesz eleget, és pedig

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Ennek következtében a vector meghatározására a hosszúság mellett elég két iránycosinus és a harmadiknak az előjele.

Többnyire a három componens vagy a hosszúságot és a három irány-cosinust használjuk vector-határozásra. De azért legyen itt szó két más meghatározási módról is. Olyanokról, amelyekben más jelentősége van az x , más az y és más a z tengelynek. Egyik, mint forgási tengely, egy másik, mint olyan tengely szerepel, amelynek irányától a forgás-szögeket számítjuk, s a harmadik nem szerepel.

Válasszuk a z -tengelyt forgási tengely gyanánt és számítsuk az x -tengely irányától a forgás-szögeket. A vector elejét az origóba tévén, a vector meghatározására szolgálhatnak: a vector-vég z -tengelyű vectorának hossza ρ , e vector elfordulásának a szöge ϵ , és a vector harmadik componense ζ . Ugyanis ρ és ϵ meghatározza a ξ és η componenseket:

$$\xi = \rho \cos \epsilon, \quad \eta = \rho \sin \epsilon.$$

Ezt a meghatározási módot cylindricusnak nevezzük.

Ha a z -tengely és a vector közti szöget a fentebbi szög-definitio értelmében θ jelöli, akkor

$$\zeta = r \cos \theta, \quad \rho = r \sin \theta,$$

miáltal egy negyedik meghatározási mód áll elé. Ebben r , ε , θ a határozók:

$$\xi = r \sin \theta \cos \varepsilon, \quad \eta = r \sin \theta \sin \varepsilon, \quad \zeta = r \cos \theta.$$

Az ε és θ határozók egyszerűen fejezik ki a három iránycosinust:

$$\alpha = \sin \theta \cos \varepsilon, \quad \beta = \sin \theta \sin \varepsilon, \quad \gamma = \cos \theta.$$

Hogy valamiféle adatok meghatározzák a vektort, ez mindig azt jelenti, hogy meghatározzák a vector hosszát és irányát. Következésképp amely vectorok megfelelő határozói egyenlők, azok a vectorok mindig maguk is egyenlők. De az egyenlő vectorok némely határozói nem szükségképpen egyenlők, mint pl. a cylindricus rendszerben használt ε szög, mert ezt még megszorítás alá kell vetni, hogy a vector teljesen meghatározza őt. Ilyen megszorítás:

$$\pi \geq \varepsilon > -\pi.$$

IV. Vectorok külömbisége.

Ha két vector elejét egy pontba helyezzük, akkor aszerint, amint a két vector egyenlő, vagy nem, végük összeesik, vagy nem; viszont, aszerint, amint a végük összeesik vagy nem, egyenlők vagy nem: egy pontba helyezvén két vector elejét, az egyiknek a végéből a másiknak a végébe nyúló vektort a két vector külömbiségének nevezzük.

Ilyen kettő lehetséges: egyenlő hosszúak, de ellenkező irányúak. De a következő megkülömböztetéssel élünk: AB és AC vector külömbiségén az utóbbinak a végéből az előbbeninek a végébe nyúló vektort értjük, vagyis a CB vektort.

A közöségi kivonási jegy segítségével képletezzük a külömbiséget a következő értelemben: AB és AC külömbisége

$$AB - AC = CB,$$

AC és AB külömbisége

$$AC - AB = BC.$$

Azt a műveletet, a melylyel két vectorhoz azok egyik vagy másik külömbiségét meghatározzuk, kivonásnak nevezzük és az $A'B' - AB$ külömbiségben az AB vektort kivonandónak, az $A'B'$ vektort kisebbítendőnek mondjuk. Ehez képest: miután a két vector elejét egy pontba helyeztük, a kivonandónak a végéből a kisebbítendőnek a végébe huzott vector a megfelelő külömbiség, a külömbégi vector.

Úgy, mint az algebrában, egyenlők külömbiségéről is beszélünk. Ezt, a külömbiség általános fogalmában, oly vectornak tekintjük, amely-

nek az eleje és vége összeesik. Zérus-vectornak nevezzük és egyszerűen a 0 jegygyel jelöljük:

$$AB - AB = 0.$$

Ha a kivonandó vector componenseit a kisebbítendő vector componenseiből rendre kivonjuk, a különbségi vector componenseit kapjuk. Ugyanis, a kivonandó és a kisebbítendő vector elejét x_0, y_0, z_0 koordinátás pontba helyezvén, jelöljék most már a kivonandó vector végének a koordinátáit x', y', z' , a kisebbítendő vector végének a koordinátáit x'', y'', z'' : a componenseik rendre

$$\begin{aligned} \xi' &= x' - x_0, & \eta' &= y' - y_0, & \zeta' &= z' - z_0, \\ \xi'' &= x'' - x_0, & \eta'' &= y'' - y_0, & \zeta'' &= z'' - z_0; \end{aligned}$$

a különbségi vector componensei pedig

$$\xi = x'' - x', \quad \eta = y'' - y', \quad \zeta = z'' - z'.$$

A jobboldalok elárulják, hogy

$$\begin{aligned} \xi &= \xi'' - \xi', & \eta &= \eta'' - \eta', & \zeta &= \zeta'' - \zeta'; \\ (\xi'', \eta'', \zeta'') &- (\xi', \eta', \zeta') &= &(\xi'' - \xi', \eta'' - \eta', \zeta'' - \zeta') \end{aligned}$$

Fordítva, ha egy vector componensei $\xi'' - \xi', \eta'' - \eta', \zeta'' - \zeta'$, akkor ez a vector a (ξ'', η'', ζ'') és (ξ', η', ζ') vector különbsége.

Egyenleteinkből az is kitűnik, hogy a kisebbítendő vectornak és a különbségi vectornak a különbsége a kivonandó vector. Ha tehát a kisebbítendő vector és különbségi vector elejét egy pontba helyezzük, az utóbbi vector végéből az előbbinek a végébe huzott vector a kivonandó. Geometriai szemlélettel is könnyen fölismerhető.

V. Vectorok összege.

A kisebbítendő vectort a kivonandó vector és a különbségi vector összegének is nevezzük. A kivonás geometriai képéről közbötlően leolvasható, hogy, ha a különbség elejét a kivonandó végébe, vagy végét a kivonandó elejébe helyezzük, mindig a szabadon maradt kezdetből a szabadon maradt végbe nyúló vector a kisebbítendő. Nem tekintve tehát a kivonás műveletét: egy vector elejét egy másiknak a végébe helyezvén, a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vectort nevezzük a két vector összegének. Vector-jegyekben a közönséges összeadási jel segélyével írjuk az összeget:

$$AB + BC = AC.$$

Azt a műveletet, a melylyel két vectorhoz azok összegét képezzük, összeadásnak s a két vectort összeadandónak nevezzük.

Az összeg componensei rendre az összeadandók componenseinek az összegei. Ez az összegre mint kisebbítendőre, az összeadandókra mint kivonandóra és különbségre nézve már a különbségi componens-egyenletekből kitűnik. De tényleg, ha az A és B és C pont koordinátái x_0, y_0, z_0 és x', y', z' és x'', y'', z'' , úgy az AB és BC és AC vectorok componensei $\xi' = x' - x_0$, stb., $\xi = x'' - x'$, stb., $\xi'' = x'' - x_0$, stb. következőleg $\xi' + \xi = \xi''$, stb.:

$$(\xi', \eta', \zeta') + (\xi, \eta, \zeta) = (\xi'' + \xi, \eta' + \eta, \zeta' + \zeta).$$

Három vector összegén két vector összegének és a harmadik vectornak az összegét értjük. Hogyha tehát egy vector végébe egy másiknak az elejét és ennek a végébe egy harmadiknak az elejét helyezzük, úgy a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vector a három vector összege. Ugyanis a definitio szerint AB, BC, CD vectorok összege ez:

$$(AB+BC)+CD = AC+CD = AD.$$

Rövidebb írásmóddal

$$AB+BC+CD = AD.$$

Négy vector összegén három vector összegének és a negyedik vectornak az összegét értjük. Hogyha tehát egy vector végébe egy másiknak az elejét, ennek a végébe egy harmadiknak az elejét és ennek a végébe egy negyediknek az elejét helyezzük: akkor a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vector a négy vector összege. Ugyanis a definitio szerint AB, BC, CD, DE vectorok összege ez:

$$(AB+BC+CD)+DE = AD+DE = AE.$$

Rövidebb írásmódban

$$AB+BC+CD+DE = AE.$$

stb. stb.

Bárhány vector összegének a componensei rendre egyenlők az egyes vectorok componenseinek az összegével és pedig függetlenül a vectorok sorrendjétől. Bizonyítás: Tetszésre választott sorrendben legyenek

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$$

az összeadandó vectorok. A másodiknak az elejét helyezzük az elsőnek a végébe, a harmadiknak az elejét a másodiknak a végébe, sít. Ekkor aztán vectoraink rendre legyenek $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$. Ha az A_0 pont coordinátái x_0, y_0, z_0 , stb., akkor

$$\xi_1 = x_1 - x_0, \xi_2 = x_2 - x_1, \xi_3 = x_3 - x_2, \dots, \xi_n = x_n - x_{n-1}$$

stb. stb. Az összeg, vagyis A, A_n componensei pedig $\xi = x_n - x_0$, stb. A jobb oldalak elárulják, hogy

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n, \\ \zeta &= \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n.\end{aligned}$$

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) + \dots + (\xi_n, \eta_n, \zeta_n) = (\xi_1 + \dots + \xi_n, \eta_1 + \dots + \eta_n, \zeta_1 + \dots + \zeta_n).$$

A jobb-oldal független az összeadás sorrendjétől, tehát a bal-oldal is: vectorok definiált összeadása commutativus művelet; adott vectorokat bármely rendben sorozunk lánczba, ha a láncz első pontja mindig ugyanaz a pont, utolsó pontja is mindig ugyanaz.

Fordítva: ha egy vector componensei $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, stb., akkor ez a vector a $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$ vectorok összege.

VI. Vectorok többszöröse.

Legyen a k egy közönséges realis mennyiség, vagyis csak nagyság és előjel tartozzék hozzája. Szóval, u. n. scalaris legyen.

Az AB vectornak és a k scalarisnak a szorzatán, vagy más szóval az AB vector k -szorosán azt a vectort értjük, amelynek a hossza az AB vector hosszának és a k scalaris számértékének a szorozata, az iránya pedig, aszerint, amint a k pozitívus vagy negatívus, egyező vagy ellenkező az AB vector irányával.

A szorzat meghatározását szorzásnak, az AB vectort szorzandónak, a k scalarist szorzónak nevezzük. Képletileg a szorzást is az algebrában szokásos módon követeljük; így, ha AB és k szorzata AB' :

$$k \cdot AB = AB \cdot k = AB'.$$

Ha a szorzandó vector hossza r , és iránycosinusai α, β, γ , úgy a definitio értelmében a szorzati vector hossza $|k|r$ és iránycosinusai, aszerint, amint a k pozitívus vagy negatívus, α, β, γ , vagy $-\alpha, -\beta, -\gamma$.

A szorzat componensei a szorzandó vector componenseinek k -szorosai. Legyenek ugyanis a szorzandó vector componensei ξ, η, ζ . Akkor

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

tehát a szorzati vector hossza

$$r' = |k|r = \sqrt{(k\xi)^2 + (k\eta)^2 + (k\zeta)^2}.$$

Iránycosinusai pedig, ha k pozitívus,

$$\alpha' = \alpha = \xi : \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = k\xi : r' \text{ stb.}$$

ha k negatívus,

$$\alpha' = -\alpha = -\xi : \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = k\xi : r', \text{ stb.}$$

Következéleg a szorzat componensei

$$\xi' = r'\alpha' = k\xi, \quad \eta' = r'\beta' = k\eta, \quad \zeta' = r'\gamma' = k\zeta$$

úgy az egyik, mint a másik esetben. Mindkét esetben

$$(\xi, \eta, \zeta) \cdot k = (k\xi, k\eta, k\zeta).$$

Fordítva, hogyha egy vector componensei $k\xi, k\eta, k\zeta$, akkor ez a vector a (ξ, η, ζ) vectornak és a k scalarisnak a szorzata.

Egy vectornak az $(1:k)$ -szorosát a vector k -ad részének is mondjuk. Meghatározását a vector k -val való osztásának is nevezzük s élünk az összes megfelelő algebrai szólás- és írás-módokkal. Így AB vectornak, mint osztandónak, és k scalarisnak, mint osztónak, a hányadosa

$$AB : k = \frac{AB}{k} = AB \cdot \frac{1}{k}.$$

Ezek szerint

$$(\xi, \eta, \zeta) : k = \frac{(\xi, \eta, \zeta)}{k} = \left(\frac{\xi}{k}, \frac{\eta}{k}, \frac{\zeta}{k} \right),$$

s a hányados vector hossza az osztandó vector hosszának osztata az osztó scalarisnak a számértékével, iránya pedig aszerint, amint az osztó positivus vagy negatívus, egyező vagy ellenkező az osztandó vector irányával.

Egy összeg k -szorosa az egyes összeadandók k -szorosának az összege. Mert, ha a (ξ, η, ζ) vector a $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \text{ stb.}$ vectorok összege, úgy

$$(k\xi, k\eta, k\zeta) = (k\xi_1 + k\xi_2 + \dots, k\eta_1 + k\eta_2 + \dots, k\zeta_1 + k\zeta_2 + \dots) = \\ (k\xi_1, k\eta_1, k\zeta_1) + (k\xi_2 + k\eta_2 + k\zeta_2) + \dots$$

Hasonlókép, egy összeg k -ad része az egyes összeadandók k -ad részének az összege, mert ez a szorzatos egyenlőség akkor is helyes lesz, ha abban k helyett $1:k$ íratik: vectornak scalarissal való szorzása és osztása distributivus művelet.

VII. Vectorok szöge.

Két vectornak a szögén azt a homorú szöget értjük, amely alatt egyik vector iránya a másikéba fordítható.

Mint hogy a vectorok meghatározzák ezt a szöget, kifejezhető az a vector-határozókkal; sőt, mivel már a két vector iránya meghatá-

rozza ezt a szöveget, kifejezhető az a vectorok irány-határozóival, melyeknek az irány-cosinusok.

Jelölje θ két vectornak a szögét. Az egyik vector elejét helyezzük a másiknak a végébe, mint összeadáskor. Most AB és BC legyenek a vectorok. AC azoknak az összege. Hosszúságukat rendre jelöljük r_1, r_2, r . A három vector egy három-szöveget alkot, amelynek a B csúcsnál lévő szöge $\pi - \theta$. Eszerint

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\pi - \theta)$$

De, ha a vectorok componensei rendre ξ_1, η_1, ζ_1 és ξ_2, η_2, ζ_2 és ξ, η, ζ , úgy

$$r_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad r_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

Beírván ezeket az egyenletbe és tekintetbe vévén, hogy $\cos \pi - \theta = -\cos \theta$, meg, hogy $\xi = \xi_1 + \xi_2$, stb. találjuk:

$$r_1 r_2 \cos \theta = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2$$

És, ha a két vector iránycosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ illetőleg $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, úgy amiatt, hogy $\xi_1 = r_1 \alpha_1$, $\xi_2 = r_2 \alpha_2$, stb.:

$$\cos \theta = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2.$$

A vector-szög e cosinusos kifejezésének van a leggyakoribb alkalmazása. Nem ritkán hasznos azonban egy sinusos kifejezése is. Világos, hogy

$$\sin^2 \theta = 1 - (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2)^2.$$

Írjuk itt a jobb oldal első tagja helyett

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2),$$

azután végezzük el a követelt szorzást és hatványozást. Az eredményen azonnal fölismerhető, hogy

$$\sin^2 \theta = (\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2)^2 + (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2)^2 + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2.$$

Mivel $0 \leq \theta \leq \pi$, így a $\sin \theta$ mindig positivus.

Ha a két vector merőleges egymásra, akkor $\theta = \pi : 2$, tehát

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

Viszont, ha áll ez az egyenlet, akkor, a két vector merőleges egymásra, mert $\theta = \pi : 2$. Szorozzuk meg az egyenletet r_1 -el. Azután szorozzuk még meg r_2 -vel is. Nyomban látjuk, hogy a merőlegesség szükséges és elégséges föltétele külön-külön a következő két egyenlet is:

$$\begin{aligned} \xi_1 \alpha_2 + \eta_1 \beta_2 + \zeta_1 \gamma_2 &= 0. \\ \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ha $\theta = \pi : 2$, akkor $\sin \theta = 1$ és viszont. Következésképp nem különben szükséges és elégséges föltétele a merőlegességnek ez az egyenlet:

$$(\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2)^2 + (\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2)^2 + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 = 1. \quad -$$

Sokszor czélszerű bizonyos parameteres alakokban használni ezeket az egyenleteket. Induljunk ki ebből:

$$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 = 0.$$

Ha egy vector tényleg létezik, úgy legalább egy componense nem zérus. Legyen, hogy ζ_1 nem zérus. Akkor kétségtelenül meghatározhatók úgy az l és m scalarisok, hogy

$$\xi_2 = m \zeta_1 - n \eta_1, \quad \eta_2 = n \xi_1 - l \zeta_1$$

legyen, bármi értékű scalaris az n . De behelyetteszván ezeket az egyenletbe, azt találjuk, hogy, mivel a ζ_1 nem zérus,

$$\zeta_2 = l \eta_1 - m \xi_1.$$

Világos, hogy nem különben következnek ily kifejezések abban a bizonyosságban, hogy η_1 , vagy, hogy ξ_1 nem zérus, és a három paraméter közül az egyik mindig tetszőleges. Ez a három kifejezés is szükséges és elégséges föltétele a merőlegességnek; szükséges föltétele, mert szükségképpen következtek abból az egyenletből, amelyből kiindultunk; elégséges föltétele, mert viszont belőlük az az egyenlet következik. A megfelelő alakokhoz jutunk az irány-cosinusok számára, ha ezeket az alakokat r_2 -vel elosztjuk. Irván pedig

$$\frac{r_1}{r_2} l = a, \quad \frac{r_1}{r_2} m = b, \quad \frac{r_1}{r_2} n = c,$$

az iránycosinusok parameteres vonatkozásai a föltételezett merőlegességben ezek:

$$\alpha_2 = b \gamma_1 - c \beta_1, \quad \beta_2 = c \alpha_1 - a \gamma_1, \quad \gamma_2 = a \beta_1 - b \alpha_1.$$

Ha a két vector egyező irányú, akkor $\cos \theta = 1$, tehát

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 1.$$

Viszont, ha áll ez az egyenlet, akkor a két vector egyező irányú, mert akkor $\cos \theta = 1$, tehát $\theta = 0$. Tényileg, ha ennek az egyenletnek a jobb-oldala helyett az

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2$$

kifejezés felét írjuk, azonnal láthatjuk, hogy

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 = 0 \quad \text{tehát} \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

VIII. Vectorok tengelye.

Egy vector kezdő pontján a vectorra merőleges tengelyt a vector tengelyének nevezzük. Ha a vector iránycosinusi α' , β' , γ' úgy valamennyi tengelyének az iránycosinusi bent foglaltnak a következő alakokban:

$$\alpha = b\gamma' - c\beta', \quad \beta = c\alpha' - a\gamma', \quad \gamma = a\beta' - b\alpha',$$

mint az épen elébb nyert kifejezések tanúsítják; mert a vector bármely tengelyéhez tartoznak olyan a , b , c értékek, hogy α , β , γ a tengely iránycosinusi.

Két vector tengelyéről is beszélünk. Elejüket egy pontba helyezvén, közös tengelyeiket nevezzük így. Ha sem nem egyező, sem nem ellenkező a vectorok iránya, akkor csak egy tengelyvonaluk, azaz csak két tengelyük van, amelyek egymás ellentétesei. De a következő megkülönböztetéssel élünk: AB és AC vector tengelyén azt értjük, amely körül az AC vector iránya pozitívus fordulással jut az AB vector irányába a két vector szöge alatt; AC és AB vector tengelyén az ellentétes tengelyt értjük. Ugyanebben az értelemben beszélünk két iránynak a tengelyéről.

Világos, hogy a tengely-irányt meghatározza a két vector iránya, tehát meghatározzák a két vector irány-cosinusi. Az AC és AB vector tengelyének az iránycosinusi legyenek α , β , γ , az AC és AB vector iránycosinusi pedig α_2 , β_2 , γ_2 , illetőleg α_1 , β_1 , γ_1 . Az α , β , γ cosinusok egyenletei ezek:

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= 0, \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 &= 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1. \end{aligned}$$

A két elsőből

$$\alpha : \beta : \gamma = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) : (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) : (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2),$$

tehát létezik olyan scalaris, λ , hogy

$$\begin{aligned} \alpha &= (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) : \lambda, \\ \beta &= (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) : \lambda, \\ \gamma &= (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) : \lambda. \end{aligned}$$

Most már a hátra lévő egyenletből

$$\lambda^2 = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)^2,$$

tehát, ha a két vector szöge θ , úgy a λ divisor számértéke $\sin\theta$. Előjelének a megállapítása végett célszerű egy másik meghatározó rendszerhez is folyamodni. Az origója legyen az A pontban és a ten-

gelyei eleve egyirányúak legyenek a régi tengelyekkel. Ekkor az új rendszerben ugyanazok az összes irány-cosinusok, mint a régiiben, következésképpen a λ is ugyanaz, nemcsak számértékre, de előjelre nézve is. Azonban forgassuk el az új tengelyrendszert az A pont körül úgy, hogy az o x tengelyének az iránya a vectorok tengelyének az irányába essék, y tengelyének az iránya pedig az AC vector irányába essék. Most az új rendszerben $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=1$, $\gamma_2=0$, és az AB vector iránya szükségképpen hegyes szöget képez az x tengely irányával. Továbbá, mivel a fordítás alatt az irány-cosinusok mind folytonosan változtak, a θ szög pedig változatlan maradt, így az λ divisor előjele szükségképpen változatlan maradt, nem csapathott át egyszer sem egyik féleségből a másikba. De a γ irány-cosinus egyenletéből folyólag az új rendszerben, ennek új helyzetében

$$1 = (\alpha_1 \cdot 1 - \beta_1 \cdot 0) : \lambda = \frac{\alpha_1}{\lambda}$$

Mint hogy az AB vector iránya az új x tengely irányával jelenleg hegyes szöget képez, így az α_1 pozitívus, tehát λ is pozitívus, $\lambda = +\sin\theta$. Szükségképpen ugyanaz lévén a λ , a mi eredetileg volt, az eredeti rendszerben is pozitívus előjellel illeti meg a $\sin\theta$ érték: a (ξ_2, η_2, ζ_2) és (ξ_1, η_1, ζ_1) vector tengelyének az irány-cosinusait

$$\alpha = \frac{\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2}{\sin\theta} \quad \beta = \frac{\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2}{\sin\theta} \quad \gamma = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}{\sin\theta}$$

kifejezések határozzák meg, a melyekben θ a két vector szöge.

Ha merőleges egymásra a két vector, úgy

$$\alpha = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, \quad \beta = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, \quad \gamma = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2.$$

Az AB és AC vector tengelyének az irány-cosinusai nyilvánképen

$$\frac{\beta_2 \gamma_1 - \gamma_2 \beta_1}{\sin\theta} \quad \frac{\gamma_2 \alpha_1 - \alpha_2 \gamma_1}{\sin\theta} \quad \frac{\alpha_2 \beta_1 - \beta_2 \alpha_1}{\sin\theta}$$

és, ha merőlegesek egymásra, úgy

$$\beta_2 \gamma_1 - \gamma_2 \beta_1, \quad \gamma_2 \alpha_1 - \alpha_2 \gamma_1, \quad \alpha_2 \beta_1 - \beta_2 \alpha_1.$$

IX. Vectorok értékei

Egy vector hosszának az értékét a vector nagyságának vagy abszolútus értékének is nevezzük; s ebben az értelemben beszélünk kisebb és nagyobb vectorokról.

Egy vector értéke alatt, így pusztán, minden jelző nélkül mondván,

a vector nagyságának és irányának együttesét értjük. Ehhez képest egyenlő vectorok egyenlő értékűek, nem egyenlő vectorok különböző értékűek.

Az absolutus vector érték fogalmát, mint specialist, tartalmazza egy igen hasznos relativus érték-fogalom, a mely a vectornak egy tengelyhez, vagy általánosabban egy irányhoz bizonyos módon megszabott viszonyát jellemzi. — Legyen adva egy tengely I . AB vector elejének a merőleges vetülete ezen az I tengelyen legyen A' , végének a merőleges vetülete B' . Az $A'B'$ vector iránya vagy egyező, vagy ellenkező az I tengely irányával. A szerint, a mint egyező, vagy ellenkező, az $A'B'$ vector nagyságát positivus, vagy negativus előjellel az AB vector I tengelyen számított, vagy I tengelyre tartozó értékének nevezzük.

Jelölje ι . Ha az AB vector nagysága r , és ha e vector iránya, meg a tengely iránya ω szöget képez, úgy

$$\iota = r \cos \omega,$$

akár egyezik, akár ellenkezik az $A'B'$ vetületi vector iránya az I tengely irányával. Abban a különös esetben, hogy az I tengely iránya magának az AB vectornak az irányával egyezik, $\omega = 0$, tehát $\iota = r$, vagyis ebben a különös esetben a vectornak az I tengelyen számított értéke összeesik az ω absolutus értékével.

Ha a vector irány-cosinusai α , β , γ ; akkor a coordinata-tengelyekre tartozó értékei rendre $r\alpha$, $r\beta$, $r\gamma$, azaz a componensei. Ezért, bármely tengelyre tartozó értékét e tengelyre tartozó componensének is nevezzük.

Legyenek az I tengely irány-cosinusai l , m , n . Akkor

$$\cos \omega = \alpha l + \beta m + \gamma n,$$

tehát a vector I tengelyen számított értéke, I tengelyre tartozó componense

$$\iota = r(\alpha l + \beta m + \gamma n).$$

Nem különben, ha ξ , η , ζ a vectornak a coordinata-tengelyekre tartozó componensei:

$$\iota = \xi l + \eta m + \zeta n.$$

Világos, hogy a vectorok egyező irányú tengelyeken számított értékei egyenlők.

A természet-tanban az összes alapvető fogalmak mennyiségi tartalmát vagy egy scalaris, vagy egy számérték és egy irány tölti ki. Magától szembeötlök, hogy az utóbbi esetben a fogalom mennyiségi foglalatát vectorral ábrázolható. Csakhogy a vector-képben a hosszúság számértéke helyett esetenként más és más határozomány számértéke gondolandó, mint pld. egy pont „sebességének“, „gyorsulásának“, a

„szögsebességnek“, „szöggyorsulásnak“, az „erőnek“, a „forgató hatásnak“, az „elektromos-“ és a „mágneses momentumnak“, a „tömegáramlásnak“, az „elektromos-áramlásnak“ stb. fogalmában. Mégis a „vector“ nevet általánosabban mindazokra a fogalmakra alkalmazzuk, amelyek mennyiségi alkotó részét egy számérték és egy irány képezi. Ebben az általánosabb értelemben gondolva a „vector“ szót: amelyek egyenlő mennyiségi tartalom mellett is különböznek, azokat különböző dimenziójúaknak vagy jellegűeknek mondjuk és mennyiségi határozóikat rendszerint föltűnően különböző betű-jegyekkel jelöljük, melyeknek pld., mint componensek jelvényei, $\xi, \eta, \zeta; f, g, h; u, v, w; X, Y, Z; P, G, H; U, V, W$; stb. Különböző jellegű vectorok határozóinak a megkülönböztetésére alsó indexek használatához nem szoktunk folyamodni; alsó indexekkel közönségesen csak egy jellegű vectorok határozóit különböztetjük meg. A mennyiben különböző jellegű vectorok határozóit is indexekkel akarjuk megkülönböztetni, rendszerint felső indexeket használunk, pld. ha (ξ, η, ζ) egy pont u. n. elmozdulása, u. n. sebességének a jelölésére $(\check{\xi}, \check{\eta}, \check{\zeta})$ u. n. gyorsulásának a jelölésére $(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta})$ alakot vezetünk be stb.

X. Vector-határozók átszámítása.

Egy coordinata rendszerben egy vector meghatározására szolgáló componensek legyenek ξ, η, ζ . Egy más coordinata rendszerben ugyanazt a vectort ξ', η', ζ' határozzák meg, mint componensek. Nem egyebek ezek, mint a vectornak a coordinata-tengelyeken számított értékei. Amazok az első, emezek a második rendszer tengelyein számított vector-értékek. Ha tehát az első rendszerben a második rendszer tengelyeinek az irány-cosinusai rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ és $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, úgy

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \\ \eta' &= \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \\ \zeta' &= \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta.\end{aligned}$$

A második rendszerben az első rendszer tengelyeinek az iránycosinusai rendre $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ és $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ és $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, tehát egyszersmind

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha_1 \xi' + \alpha_2 \eta' + \alpha_3 \zeta', \\ \eta &= \beta_1 \xi' + \beta_2 \eta' + \beta_3 \zeta', \\ \zeta &= \gamma_1 \xi' + \gamma_2 \eta' + \gamma_3 \zeta' .\end{aligned}$$

Tényleg, ha a három első egyenletet sorban $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ cosinusokkal szorozva összeadjuk, azután ugyanazokat az egyenleteket sorban $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat az egyenleteket sorban $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ cosinusokkal szorozva adjuk össze, a második egyenlet-csoportot kapjuk, mert amiatt, hogy ezek a szorzók egy-egy iránynak az iránycosinusai a második rendszerben:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1,\end{aligned}$$

és amiatt, hogy három egymásra merőleges iránynak az iránycosinusai,

$$\begin{aligned}\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0, \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0.\end{aligned}$$

Nem különben, ha a második három egyenletet sorban $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat az $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ cosinusokkal szorozva összeadjuk, az első egyenlet-csoportot kapjuk, mert amiatt, hogy ezek a szorzók egy-egy iránynak az iránycosinusai az első rendszerben:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1,\end{aligned}$$

és amiatt, hogy három egymásra merőleges iránynak az iránycosinusai,

$$\begin{aligned}\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 &= 0, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 &= 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0.\end{aligned}$$

Az első rendszerben számított (ξ, η, ζ) vector és a másodikban számított (ξ', η', ζ') vector nagysága egyenlő, mert a kettő ugyanaz a vector. Tényileg, ha a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

kifejezésben a második egyenlet-csoportból a jobb oldalakat írjuk, vagy, ha a

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

kifejezésben az első egyenlet-csoportból a jobb oldalakat írjuk, úgy az iránycosinusok relációi alapján azonnal fölismerhetjük, hogy a két kifejezés egyenlő.

A vectornak a két rendszerbe tartozó iránycosinusai azonban általában mind különbözők és csak akkor egyenlők mind, mikor a két rendszer megfelelő tengelyei egyező irányúak. Ez az iránycosinusok fogalma alapján közbötlenül belátható. Még pedig, ha a vector iránycosinusai az első rendszeren α, β, γ , a másodikban α', β', γ' , akkor

$$\alpha' = \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma, \text{ stb.}$$

$$\alpha = \alpha_1\alpha' + \alpha_2\beta' + \alpha_3\gamma' \text{ stb.}$$

Készen kerülnek elő ezek az egyenletek a componens-egyenletekből a a vector nagyságával végzett osztás által, vagy az előbbi cikkben $\cos \bar{\omega}$ számára jegyzett kifejezésből az l, m, n iránycosinusok megfelelő helyettesítése által.

Fordítva, ha egy vector componensei az első rendszerben ξ, η, ζ , a másodikban ξ_0, η_0, ζ_0 , és, ha

$$\xi_0 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \text{ stb.},$$

akkor a két vector egyenlő, mert

$$\xi_0 = \xi', \quad \eta_0 = \eta', \quad \zeta_0 = \zeta'.$$

Ha egy vector iránycosinusai az első rendszerben α, β, γ , a másodikban $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ és, ha

$$\alpha_0 = \alpha_1 \alpha + \beta_1 \beta + \gamma_1 \gamma, \text{ stb.},$$

akkor a két vector iránya egyezik, mert

$$\alpha_0 = \alpha', \quad \beta_0 = \beta', \quad \gamma_0 = \gamma'.$$

Miután egy vector componenseit át tudjuk számítani egy másik coordinata-rendszerbe, könnyű szerrel megformulázhatjuk egy pont koordinátáinak az átszámítását is. Egy pont koordinátái a pont origói vectorának a componensei. Jelölje az első rendszer origóját O , a második rendszerét O' , a pontot P . A pont két origói vectora OP és $O'P$ a következő viszonyban vannak: az $O'P$ vector az OP vectornak és az OO' vectornak a különbsége:

$$O'P = OP - OO'.$$

A P pont koordinátái az első rendszerben legyenek x, y, z . Akkor x, y, z az OP vector componensei az első rendszerben, tehát $x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1$ stb. a másodikban. Az O' pont koordinátái az első rendszerben legyenek a, b, c . Akkor a, b, c az OO' vector componensei az első rendszerben, tehát $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1$ a másodikban. A P pont koordinátái a második rendszerben legyenek x', y', z' . Ezek az $O'P$ vector componensei a második rendszerben. Így

$$(x', y', z') = (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1, \dots) - (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1, \dots).$$

Mínt hogy ez egyenletben mindhárom vector componensei ugyanabba a rendszerbe tartoznak, t. i. a másodikba, ennélfogva

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\alpha_1 + (y-b)\beta_1 + (z-c)\gamma_1, \\ y' &= (x-a)\alpha_2 + (y-b)\beta_2 + (z-c)\gamma_2, \\ z' &= (x-a)\alpha_3 + (y-b)\beta_3 + (z-c)\gamma_3. \end{aligned}$$

Legyen még fölemlítve, hogy, ismervén azt az összefüggést, amely

két derékszögű vector iránycosinusi és bármelyik tengelyük iránycosinusi közt létezik, ismerjük azt az összefüggést is, amely három, egymásra merőleges tengely iránycosinusi közt létezik; úgy, hogy egyenesen fölírhatjuk azokat a relatiókat, amelyek egy coordinata-rendszer három tengelyének egy másik rendszerbe tartozó iránycosinusi közt fenállanak. Ha $O'B$ vector egyező irányú az O' rendszer második tengelyével, és $O'C$ vector egyező irányú az O' rendszer harmadik tengelyével, akkor az O' rendszer első tengelye az $O'C$ és $O'B$ vector tengelye, föltétvén t. i., hogy ez is jobbra forduló rendszer, tehát

$$\alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta_3, \quad \beta_1 = \gamma_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_3, \quad \gamma_1 = \alpha_2 \gamma_3 - \gamma_2 \alpha_3.$$

Hasonló módon találhatjuk, hogy

$$\alpha_2 = \beta_3 \gamma_1 - \gamma_3 \beta_1, \quad \beta_2 = \gamma_3 \alpha_1 - \alpha_3 \gamma_1, \quad \gamma_2 = \alpha_3 \beta_1 - \beta_3 \alpha_1, \\ \alpha_3 = \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, \quad \beta_3 = \gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2, \quad \gamma_3 = \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2.$$

XI. Vectorok változása.

Mindig a ma általánosan szokott értelemben fogom azt mondani egy scalarisról, hogy más scalarisokkal folytonosan változik, avagy hogy folytonos függvényük, t. i. a CAUCHY-tól, illetőleg BOLZANOTól definiált értelemben. Ha tehát f scalarisról azt mondom, hogy u, v, \dots scalarisokkal ezek u_0, v_0, \dots értékénél folytonosan változik, állításomat úgy értem, hogy először mielőtt $u - u_0, v - v_0, \dots$ számértéke bizonyos pozitív számnál kisebb, már $f(u, v, \dots)$ teljesen meghatározott értékkel bír; másodszer pedig bármely kis pozitív számot jelentsen λ , létezik akkora pozitív szám, ν , hogy mielőtt $u - u_0, v - v_0, \dots$ számértékre kisebbek, mint ν , már a

$$f(u, v, \dots) - f(u_0, v_0, \dots)$$

külömbőség számértéke kisebb, mint λ .

De nem ritkán előfordúl, hogy egy függvénynek bizonyos föltételekhez kötött folytonosságát kell csak szem előtt tartanunk. Ennek a definitiója abban különbözik az előbbitől, hogy bizonyos egyenlőtlenségi vagy egyenlőségi relatiók kielégítését követeli az u, v, \dots változóktól.

A physikában különös jelentőséggel bír az időtől és helytől való függés. Az időtartamot attól az időponttól kezdve szoktuk számítani, amelytől kezdve valamely természeti folyamatot vizsgálat tárgyává teszünk. Ha ettől az időponttól egy tetszés szerinti későbbi időpontig t mekkoraságú idő mult el, úgy az időtől való függést a t mennyiségtől való függés képezi. Egy vagy több pont coordinatáitól való függés teszi a helytől való függést.

A zérus-vector fogalma lehetővé teszi, hogy bármely physikai tárgyalásban minden időpont számára ugyanannyi vectort vegyünk

tekintetbe, még pedig olyképen, hogy jelleg szerint is minden időpontban ugyanannyi vectorunk legyen.

E mellett célszerű úgy osztályozni a vectorokat, hogy egyjellegű vectorok, amelyek mindegyike más időpontba tartozik, s amelyek közül minden időpontra jut egy, egy osztályt alkossanak. Ebben az osztályozásban mindig oly módon járhatunk el, hogy az egy osztályt alkotó vectorok componensei három scalarisnak a folytonos változtatásával, még pedig időrend szerint legyenek előállíthatók. Mindig már előzetesen föltehetjük ennek az előállításnak a lehetőségét, mert föltevésünk soha semmiféle tapasztalással össze nem ütközik, sőt igen hasznos elméleti hypothesist foglal magában.

Legfőbb látszólag ellenkezik a tapasztalással. Ez a látszólagos ellenkezés mindig annak tulajdonítható, hogy egyes igen rövid időtartamokban aránylag igen nagy mértékben kell megváltoztatni a scalarisokat, legalább egyet, hogy a jellemzett előállítás megvalósulhasson.

Föltevésünk jogos és célszerű lévén, reá támaszkodva, egyszerűsmind individualis vectorok képzetét alkotjuk: az egy osztályba sorozott vectorok sokaságát egyetlen vector fogalmába foglaljuk, az idővel folytonosan változó vector fogalmába, amelynek a componenseit t. i. három, az idővel folytonosan változó scalaris képezi.

Ha egy ilyen vector componensei t időpontban — vagyis a t időtartam végén — ξ , η , ζ , úgy a nagysága ebben az időpontban

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

tehát ez is folytonosan változik az idővel. Ha az irány-cosinusai, α , β , γ és a nagysága r a t időpontban, úgy

$$r\alpha = \xi, \quad r\beta = \eta, \quad r\gamma = \zeta.$$

A míg tehát a nagysága nagyobb, mint bármi kis határozott positivus mennyiség, az iránycosinusai is folytonosan változnak az idővel, másképp mondva, az iránya is folytonosan változik az idővel. De amely időpontban a vector nagysága eltűnik, és így ξ , η , ζ zérussá válnak, abban az időpontban az iránycosinusok folytonosság-szakadást szenvedhetnek, a vector iránya másba csaphat át, mint amibe a vectornak az eltűnése előtt convergált.

Miután, az időbeli folytonosság alapján osztályozván a vectorokat, a vector-egyen fogalmát megalkottuk, most ezeket a vector-egyéneket osztályozzuk. Osztályozásuk egy szükséges módját jelleg szerint való különbözésük szolgáltatja. De midőn egyjellegű vectoregyének végtelen nagy számmal fordulnak elő, akkor szükséges ezek analyticus osztályozása is.

Ez az osztályozás mindig hely szerint valóra vezethető vissza és szintén folytonossági hypothesisre támaszkodik, t. i. a helylyel járó folytonosság hypothesisére. Mindig föltehetjük, hogy egyjellegű vector-egyének egy osztályához jutunk, ha három scalarist az időnek és egy, vagy több hely coordinatáinak bizonyos folytonos függvényévé teszünk

azzal a rendeléssel, hogy ezek a helyek egyes vonalak, fölületek, tér-részek egy-egy tetszés szerinti pontja lehessenek, midőn aztán a scalarisoknak a vonalak, fölületek, térrészek különböző pontjaihoz tartozó értékei szolgáltatják egy osztály számára a vector-egyének componenseit, s ilyenképen az osztályozás teljesen kimeríthető.

Ez a föltevés ép oly fontos elméleti hypothesis képez, mint az előbbeni. A tapasztalás előtt mutatkozó kivételek ebben is látszólagosaknak tekinthetők. De ennek a követésében már csak külső forma szerint egyénítünk, amennyiben a hely szerint egy osztályba sorozott vector-egyénekről esetleg úgy beszélünk, mint egyetlen vectorról, amely az idővel és a helylyel vagy helyekkel folytonosan változik, ezek folytonos függvénye, amivel azonban nem akarjuk azt mondani, hogy egy időben létező vectorokat egynek tekintünk, s csupán analyticus szempontból beszélünk így, hogy a vectorok egyidejű sokaságának hely szerint gondolt folytonosságát egyszerűbb külső formában tárgyalhassuk. Pld. ebben az értelemben itt hasonló módon következik, mint az elébb az idővel való változáskor, hogy a helylyel vagy helyekkel folytonosan változó vector nagysága is folytonosan változik, s a míg a nagysága zéruson fölül van, iránya is folytonosan változik a helylyel vagy helyekkel.

Physikai fogalmak, amelyek mennyiségileg scalarisok, szintén követik az idő és hely szerint való folytonosság elvét.

Physikai fogalmak mennyiségi tartalmát képező egyjellegű vectoroknak, valamint scalarisoknak ez a kétféle analyticus osztályozása együtt véve, vagyis a folytonosság elvén idő és egy vagy több hely szerint való osztályozásuk mindig teljes analyticus összefoglalást és szétválasztást képezhet, t. i. összefoglalást az egyes folytonossági osztályokba és szétválást az egyes folytonossági osztályok szerint.

Azokban alakra nézve tényileg nem mindig különböten az. Nem ritkán előfordúl, hogy physikai fogalmak mennyiségi tartalmát képező vectorok, vagy scalarisok, illetőleg az előbbieik componensei, különbötenül úgy tekinthetők, mint más scalarisoknak, más vectorok componenseinek a függvényei, vagy ezeknek és az időnek és egy vagy több helynek a függvényei, s annyiban tekinthetők mégis csupán az idő és egy, vagy több hely függvényének, amennyiben ezek az utóbbi scalarisok és vectorok az idő és egy vagy több hely függvényei. Egy vector componenseitől vagy bármely határozóitól való függést röviden a vector-tól való függésnek mondjuk. Ebben az értelemben scalarisok, vectorok, amelyektől mások függenek, szintén függhetnek scalarisoktól, vectoroktól, amelyek az idő és egy vagy több hely függvényei sít. A függések lefelé követése mindig az időre és egy vagy több helyre szorítóköző függésig juttat.

Legyen fölemlítve itt, hogy ezt a szót: értéktartomány, ugyanabban az értelemben használjuk a vectorokra vonatkozólag, mint a scalarisokra vonatkozólag.

Végre: egy vectornak egy értékből egy másikba változásán nem-

csak a változás tényét értjük, hanem így nevezzük a vector új értékének és előbbi értékének a különbségét is. Hogy mikor értjük a változás tényét, mikor ezt a különbséget, állításaink formájából mindig kitűnik. Mennyiségi értelemben egy vectornak AB értékből AC értékbe változása BC vector; (ξ, η, ζ) értékből (ξ', η', ζ') értékbe változása $(\xi' - \xi, \eta' - \eta, \zeta' - \zeta)$ vector: ha AB vector megváltozása BP, akkor új értéke AP, ha (ξ, η, ζ) vector megváltozása (ξ_1, η_1, ζ_1) , akkor új értéke $(\xi + \xi_1, \eta + \eta_1, \zeta + \zeta_1)$. Megfelelő mennyiségi értelmet tulajdonítunk egy scalaris megváltozásának.

XII. Végtelen kis változók.

A physikában nagyon megkönnyíti a tárgyalásokat a végtelen kicsinyek fogalma. Voltaképen két különböző fogalom ez: a végtelen kis változók és a végtelen kis részek fogalma. Ezúttal az elsőnek oly általános meghatározását fogjuk látni, amely a physikában szoros szükségletet szolgál. A másíkról a geometriai integralisok tanában leszen szó.

Legyenek ebben az identitásban:

$$F \equiv \psi : \varphi$$

F, ψ, φ scalarisok vagy vectorok az u, v, \dots scalaris változók függvényei és folytonosak az u, v, \dots változók zérus értéke mellett

Tegyük föl, hogy mihelyt u, v, \dots számértéke kisebb, mint μ , már φ érték-tartománya igen kicsi ψ érték-tartományához képest. Akkor F érték-tartományának a nagysága aránylag igen kicsit különbözik ψ -ének a nagyságától. Azonban a két érték-tartomány maga általában nem igen kicsit különbözik egymástól, teljesen egymáson kívül is fekehetnek, és ha van közös részük, ez általában épen nem megfelelően közös. De ha φ nagyságának felső számhatára igen kicsiny, akkor a két érték-tartomány nem csak nagyságra, hanem tartalomra nézve is igen kicsit különbözik.

Tegyük föl már most, hogy bármi kis számérték legyen ν , létezik akkora számérték, ρ , hogy mihelyt u, v, \dots felső számhatára kisebb mint ρ , már φ nagyságának felső számhatára kisebb, mint ν és a φ értéktartomány kisebb, mint a ψ értéktartománynak a ν -szöröse.

Gyakran beosztható egy F függvény oly módon egy, vagy többféle képen két, ψ és φ , részre, hogy ez a föltétel teljesül, és ha mennyiségi vonatkozásokban — egyenletekben, egyenlőtlenségekben — az F függvény helyett az egyik vagy másik ψ függvényt használjuk, úgy e föltételből folyólag u, v, \dots felső számhatára megszabható oly kicsinyre, hogy azok a vonatkozások, valamint a belőlük vonandó következtetések egészen tetszésre meghatározott kicsinél kisebb mértékben térnek el az F függvényhez tartozóktól.

Ilyenkor rendszerint czélszerű is valami okból ez a helyettesítés. Pld. analysisbeli nehézségek elkerülésére szolgál, termékeny fölfogások-

hoz segít el. Vagy az F függvényt nem is ismerjük és nem tudjuk meghatározni, ellenben megfelelő ψ -féle határalakját valami módon föl tudjuk ismerni. Ez esetekben tényileg használatba vesszük.

De egyszersmind az u, v, \dots változóknak csakis arra a rendeltetésre tulajdonítunk felső számhatárt, hogy az összes előforduló mennyiségi vonatkozásokat bármi tetszésre megszabható kicsinynél kisebb eltéréssel elégsétek ki. Ebben a kikötésben már végtelen kicsinyeknek nevezzük az u, v, \dots változókat.

Ha a végtelen kis változók más változók megváltozásai, akkor differentialéknak, az illető változók differentialéinak nevezzük azokat. Definiójukból folyólag a differentialis számítás szabályai alá esnek.

Ha egy vector componensei végtelen kis változók, akkor a vector nagysága is végtelen kis változó, s a vectort végtelen kis vectornak mondjuk.

Az a vector, a melynek a componensei egy más vector componenseinek a differentialéi, ennek a vectornak a megváltozása, tehát e vector végtelen kis megváltozásának, vagy differentialéjának nevezzük.

A „végtelen kis“ jelző helyett egyszerűség kedvéért közönségesen az „elemi“ jelzőt használjuk a leírt értelemben.

Mellesleg tegyük azt az észrevételt, hogy midőn az F, φ, ψ függvények vectorok és nagyság tekintetében határföltételünknek eleget tesznek, csupán e végből nem szükségképen való, hogy mindhárom componensük eleget tegyen határföltételünknek, és pedig egy vagy két componensük az érték tartományok terjedelmi viszonyát illetőleg ellent is mondhat annak.

Legyenek ugyanis az F, ψ, φ vectorok componensei rendre

$$\begin{aligned} F_1, F_2, F_3, \\ \psi_1, \psi_2, \psi_3, \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3. \end{aligned}$$

Mint hogy

$$F \equiv \psi + \varphi$$

emél fogva

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \psi_1 + \varphi_1, \\ F_2 &\equiv \psi_2 + \varphi_2, \\ F_3 &\equiv \psi_3 + \varphi_3. \end{aligned}$$

Ha meg is engedjük, hogy ez identitásokban egy vagy két φ -componens csak a felső számhatárra nézve teljesíti határföltételünket, azért a vectorok nagyság tekintetében mégis egészen teljesíthetők. A vectorok identitásában, t. i.

$$(F_1, F_2, F_3) \equiv (\psi_1, \psi_2, \psi_3) + (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

a jobb oldal második tagja nemcsak nagyságának felső számhatárával felel meg határföltételünknek, de azzal a számaránynyal is megfelelhet

neki, amelyben absolutus értéktartományának a terjedelme van az első tagénak a terjedelméhez. Mert még akkor is, midőn két φ -componens ellenkezik határ-föltételünkkel értéktartomány tekintetében, a φ -vector nagyságának, t. i. a

$$\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$$

függvénynek és a ψ vector nagyságának, t. i. a

$$\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}$$

függvénynek az értéktartománya kielégítheti azt terjedelmének a hányadosával a harmadik componens révén.

Legyen még fölemlítve, hogy az F és ψ függvény rendszerint a következő alaki viszonyban van egymáshoz :

$$\begin{aligned} F &\equiv F(u, u, v, v, \dots), \\ \psi &\equiv F(u, 0, v, 0, \dots). \end{aligned}$$

XIII. Vectorok elemi megváltozása.

1. Ha egy vector componensei ξ , η , ζ , és ezek elemi megváltozása $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, úgy a vector elemi megváltozása

$$d(\xi, \eta, \zeta) = (d\xi, d\eta, d\zeta).$$

Jelölje α , β , γ a vector iránycosinusait, r a vector nagyságát. Akkor

$$\xi = r\alpha, \quad \eta = r\beta, \quad \zeta = r\gamma.$$

Ha tehát a vector elemi megváltozásában a vector nagyságának az elemi megváltozása dr és iránycosinusainak az elemi megváltozása $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, úgy

$$\begin{aligned} d\xi &= \alpha dr + r d\alpha, \\ d\eta &= \beta dr + r d\beta, \\ d\zeta &= \gamma dr + r d\gamma. \end{aligned}$$

Eszerint a vector elemi megváltozása ennek a két elemi vector-nak az összege :

$$\begin{pmatrix} \alpha dr, & \beta dr, & \gamma dr, \\ r d\alpha, & r d\beta, & r d\gamma, \end{pmatrix}$$

amelyek elseje a vector nagyságának, másika a vector irányának a megváltozásából ered : az első független a vector irányváltozásától, a másik független a vector nagyságváltozásától és ha csak a vector nagysága változik meg, akkor csak az első létezik, ha csak a vector iránya változik meg, akkor csak a második létezik. Az első a vector elemi növe-

kedésének, a másodikat a vector elemi elfordulásának nevezzük: egy vector elemi megváltozása elemi növekedésének és elemi elfordulásának az összege. Czélszerű mindkettőt kifejezni a vector határozói és a vector elemi megváltozásának componensei által.

Az elemi növekedés nagysága dr vagy $-dr$, aszerint, amint dr positivus vagy negativus, tehát aszerint, amint a vector nagyobbodott vagy kisebbedett. Ennek a meghatározása végett szorozzuk meg három kifejezésünket rendre α , β , γ iránycosinusokkal, azután adjuk össze őket. Minthogy

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

s így

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$

ennélfogva a következő eredményhez jutunk:

$$dr = \alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta,$$

tehát dr a vector elemi megváltozásának a vector irányán számított értéke. Ennek az absolutus értéke az elemi növekedés nagysága. Aszerint pedig, amint positivus vagy negativus, az elemi növekedés iránya egyező vagy ellenkező a vector irányával, iránycosinusai α , β , γ vagy $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Componensei ezek:

$$\begin{aligned} \alpha dr &= (\alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta)\alpha \\ \beta dr &= (\alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta)\beta \\ \gamma dr &= (\alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta)\gamma. \end{aligned}$$

Már most egyenesen fölírhatjuk az elemi elfordulás componenseinek a kivánt kifejezéseit is:

$$\begin{aligned} rd\alpha &= d\xi - (\alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta)\alpha, \\ rd\beta &= d\eta - (\alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta)\beta, \\ rd\gamma &= d\zeta - (\alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta)\gamma. \end{aligned}$$

Más hasznos alakokban kapjuk ezeket, ha a három jobb-oldali első tagot megszorozzuk az egység $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ alakjával. Élünk a következő rövidítésekkel:

$$\begin{aligned} \beta d\zeta - \gamma d\eta &\equiv rdu, \\ \gamma d\xi - \alpha d\zeta &\equiv rdv, \\ \alpha d\eta - \beta d\xi &\equiv rdw. \end{aligned}$$

Akkor a jelzett alakok a következők:

$$\begin{aligned} rd\alpha &= \zeta dv - \eta dw, \\ rd\beta &= \xi dw - \zeta du, \\ rd\gamma &= \eta du - \xi dv. \end{aligned}$$

2. A vector elemi elfordulásának szögéről és tengelyéről is beszélünk. Szögén az új és a régi vector szögét, tengelyén az új és a régi vector tengelyét értjük. Jelölje a szöget $d\theta$. Ennek a sinusát kifejezi (VII)

$$\sin^2 d\theta = [(\beta + d\beta)\gamma - (\gamma + d\gamma)\beta]^2 + \dots,$$

honnan

$$(d\theta)^2 = (\gamma d\beta - \beta d\gamma)^2 + \dots$$

Béírva ide $d\alpha$ helyett $(d\xi - \alpha dr) : r$ stb., találjuk azt is, hogy

$$(d\theta)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2.$$

Az elemi elfordulás tengelyének az iránycosinusai (VII)

$$\frac{(\beta + d\beta)\gamma - (\gamma + d\gamma)\beta}{\sin d\theta}, \text{ stb.}$$

azaz

$$\frac{\gamma d\beta - \beta d\gamma}{d\theta}, \text{ stb.}$$

Ugyanúgy járván el, mint épen az imént, leljük, hogy e tengely iránycosinusai

$$\frac{du}{d\theta}, \quad \frac{dv}{d\theta}, \quad \frac{dw}{d\theta}.$$

A du, dv, dw elemi változóknak egyszerű önálló jelentményük van. A (ξ, η, ζ) vector geometriai képének az elejét tegyük az origóba. Azután végének az x tengelyű vectorát (II) fordítsuk el az x tengely körül du szög alatt (I), y -tengelyű vectorát az y tengely körül dv szög alatt, z -tengelyű vectorát a z tengely körül dw szög alatt. A három elemi elfordulás összege a (ξ, η, ζ) vector elemi elfordulása.

Legyen ugyanis az x tengelyű vector (ξ', η', ζ') . Akkor elemi elfordulásának componensei, megfelelő jelölések szerint ezek :

$$\begin{aligned} r' d\alpha' &= \zeta' dv' - \eta' dw' \\ r' d\beta' &= \xi' dw' - \zeta' du', \\ r' d\gamma' &= \eta' du' - \xi' dv'. \end{aligned}$$

Ennek az elemi elfordulásnak a szöge a föltevés szerint $|du|$ nagyságú és positivus elfordulás tengelyének az iránycosinusai, aszerint, amint du positivus vagy negativus, $1, 0, 0$, vagy $-1, 0, 0$. Így

$$d\theta' = |du|$$

$$\frac{du'}{d\theta'} = \frac{du}{|du|}, \quad \frac{dv'}{d\theta'} = 0, \quad \frac{dw'}{d\theta'} = 0,$$

és következőleg

$$du' = du, \quad dv' = 0, \quad dw' = 0.$$

Másfelől a (ξ', η', ζ') vectorkép elejének a coordinatái $\xi, 0, 0$; végének a coordinatái ξ, η, ζ ; tehát a componensei

$$\xi' = 0, \quad \eta' = \eta, \quad \zeta' = \zeta.$$

Ezek szerint az x -tengelyű vector elemi elfordulása, ha du szög alatt történik, ezekkel a componensekkel bír:

$$r'd\alpha' = 0, \quad r'd\beta' = -\zeta du, \quad r'd\gamma' = \eta du.$$

Hasonlólag találjuk, hogy az y tengelyű vector elemi elfordulása, ha dv szög alatt történik,

$$r''d\alpha'' = \zeta dv, \quad r''d\beta'' = 0, \quad r''d\gamma'' = -\xi dv$$

componensekkel bír, és a z -tengelyű vector elemi elfordulása, ha dw szög alatt történik,

$$r'''d\alpha''' = -\eta dw, \quad r'''d\beta''' = \xi dw, \quad r'''d\gamma''' = 0$$

componensekkel bír. A három elemi elfordulás összegének a componensei tehát:

$$r'd\alpha' + r''d\alpha'' + r'''d\alpha''' = \zeta dv - \eta dw = r d\alpha, \text{ stb.}$$

XIV. Vectorok deriváltjai.

Legyen egy vector egy scalaris folytonos függvénye ennek t_1 és t_2 értéke között. E két érték között foglaltassék a scalarisnak a t és $t+h$ értéke és a vector megfelelő értékei legyenek (ξ, η, ζ) és (ξ', η', ζ') .

Vegyük tekintetbe a következő hányadost (VI):

$$\frac{(\xi', \eta', \zeta') - (\xi, \eta, \zeta)}{h} \equiv \frac{(\xi' - \xi, \eta' - \eta, \zeta' - \zeta)}{h}.$$

Akár positivus, akár negativus a h , és bármely szabály szerint változtassuk zérus felé, legyen, hogy a hányados szabott határértéke convergál, amely mindig egy és ugyanaz a vector. Akkor azt mondjuk a vectorról, mint t függvényéről, hogy a t értéknél deriválható, és ezt a határértéket deriváltjának nevezzük.

A hányados így is írható:

$$\left(\frac{\xi' - \xi}{h}, \frac{\eta' - \eta}{h}, \frac{\zeta' - \zeta}{h} \right).$$

Ennélfogva, ha a vector componensei deriválhatók, a vector is deriválható, s megfordítva, és a vector deriváltja az a vector, amelynek componensei rendre az ő három componensének a deriváltja.

Symbolicus jelölésekben

$$\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt} \equiv \frac{(d\xi, d\eta, d\zeta)}{dt} \equiv \left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} \right)$$

a vectornak, mint t függvényének a deriváltja a t értéknél. Amennyiben úgy jelentkezik, mint a vector elemi megváltozásának, differentialéjának, a scalariséval képezett hányadosa, a vector differentialis hányadosának is nevezzük. Ugyanazért differentiálhatónak is mondjuk a vectort egyértelemben deriválhatóságával.

Scaláris függvények magasabb rendű deriváltjainak az analogiájára definiáljuk vectorok magasabb rendű deriváltjait is, valamint ezek jelölési módját: ha a t értéknél deriválható vector deriváltja is deriválható a t értéknél, úgy ennek a deriváltját nevezzük az eredeti vector másodrendű, vagy második deriváltjának sít. és írjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} &\equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} \right) \equiv \\ &\equiv \left(d \frac{d\xi}{dt}, d \frac{d\eta}{dt}, d \frac{d\zeta}{dt} \right) : dt \equiv \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2} \right) \text{ sít.} \end{aligned}$$

Midőn több scalarisnak a függvénye egy vector, megfelelő módon definiáljuk és jelöljük partialis deriváltjait a scalaris függvények partialis deriváltjainak hasonlatára. Tekintettel arra, hogy mindig a componensek deriváltjaival van meghatározva, mint componensekkel a derivált vector, könnyű belátni, hogy, ha többféle sorrendben deriválható egy vector bizonyos scalarisok szerint s egyik sorrendben ugyanannyiszor, mint a másikban, mindegyik sorrend ugyanazt a derivált vectort szolgáltatja. Legyenek a scalarisok egy sorrendben p_1, p_2, \dots, p_n , úgy, hogy a különböző számjelű p változók közt azonosok is lehessenek. Ugyanazok a változók más sorrendben q_1, q_2, \dots, q_n legyenek, és tegyük fel, hogy létezik a

$$\frac{\partial^n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial p_n \dots \partial p_2 \partial p_1} \text{ és a } \frac{\partial^n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial q_n \dots \partial q_2 \partial q_1}$$

derivált. Akkor létezik a componensek két megfelelő deriváltja is, és a kettő egyenlő, tehát ez a kettő is egyenlő.

Mivel a derivált vectorok a derivált vector componensei, ennél fogva mindazok az algebrai tételek, amelyek megilletik a scalarisok deriváltjait, megilletik a vectorok deriváltjait is, természetesen a vectorokra nézve definiált algebrai műveletek körében. Pld. vectorok összegének a deriváltja s a derivált vectorok összege egyenlő, scalaris és vector szorzatának a deriváltja annyi, mint az az összeg, amelynek tagjai: a vector deriváltjával szorzott scalaris és a scalaris deriváltjával szorzott vector sít. Ugyanaz áll a differentialékról.

Továbbá egy vector, mint függvénynek a függvénye nemkülömben a scalarisok deriválásának alaki szabályait követi. Nevezetesen, ha a p scalaris t scalaris függvénye és mint ilyen deriválható a t értéknél, a (ξ, η, ζ) vector pedig p függvénye és mint ilyen, deriválható annál a p értéknél, amely a t értéknek felel meg, akkor

$$\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt} = \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dp} \frac{dp}{dt},$$

mert

$$\begin{aligned} \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt} &= \left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} \right) = \left(\frac{d\xi}{dp} \frac{dp}{dt}, \frac{d\eta}{dp} \frac{dp}{dt}, \frac{d\zeta}{dp} \frac{dp}{dt} \right) = \\ &= \left(\frac{d\xi}{dp}, \frac{d\eta}{dp}, \frac{d\zeta}{dp} \right) \cdot \frac{dp}{dt}. \end{aligned}$$

Stb. stb.

XV. A hely függvényei.

Azt a scalarist és vectort, amely egy pont koordinátáinak a függvénye, elneveztük a hely függvényének (XI) s azt a scalarist és vectort, amely egy vector componenseinek a függvénye, elneveztük a vector függvényének (XI).

Vectort ponttal és pontot vectorral lehet meghatározni. Vectort czélszerűen határozunk meg ponttal oly módon, hogy a vectorkép kezdetét az origóba, vagy más megszabott ponthelybe tesszük, és bármiként változzék a vector, képének kezdetét ott tartjuk. Ekkor meghatározza a vectort az a pont, amelyben képének a vége vagyon. Pontot czélszerűen határozunk meg oly vectorral, amelynek a képe az origóban, vagy más megszabott ponthelyben kezdődik és a meghatározandó pontban végződik, bármiként változzék is ennek a pontnak a helye.

Ebből folyólag a hely függvényeinek és egy vector függvényeinek a tana közt analyticus tartalomra nézve nincs különbség. Azonban mégsem csupán tárgyalásuk nyelvében különböznek, hanem abban is, hogy az alkalmazások végett szerzendő analysisbeli ismeretek között vannak olyanok, amelyek, legalább ma még, csupán a hely függvényeit illetőleg szükségesek. Ezért, de azért is, mert a hely függvényeiről beszélő nyelvkészlet gazdagabb, közbötenül a hely függvényeivel foglalkozunk. A róluk szólóknak egy vector függvényére illő értelmezése magától adódik.

Továbbá, ha egy vector a hely függvénye, úgy componensei is a hely függvényei; következésképp elégséges a hely scalaris függvényeinek analyticus tárgyalására szorítkozni.

Bizonyos szólásformákkal élünk, amelyek a fogalmazások hasznos

egyszerűsítésére szolgálnak. Ezek jellemzésére elegendők lesznek az itt következő megállapítások.

A függvény értéke, folytonossága, deriválhatósága egy pontban úgy értendő, hogy a pont helyét meghatározó koordinata-értékekénél.

A függvény értékei, értéktartománya egy vonalon, fölületen, egy térrészben, annyi, mint a vonal, fölület, térrész pontjaiba tartozó függvény-értékek és ezek tartománya.

A függvény változása egy vonalon, egy fölületen, egy térrészben, a koordinaták oly változására vonatkozik, amelynek folyamán a pont a vonalon, a fölületen, a térrészben tartózkodik. Ehhez képest, ha ki van kötve, hogy csakis egy fölületen, vagy csakis egy vonalon változhassék a függvény, akkor úgy jelentkezik, mint két, illetőleg egy változó-nak a függvénye, mert a koordinaták mint két, illetőleg egy változó függvényei fejezhetők ki.

A függvény folytonossága, deriválhatósága egy vonalon, fölületen, egy térrészben, korlátlan folytonossága, deriválhatósága a vonal, fölület, térrész pontjaiban.

A függvény folytonossága, deriválhatósága egy vonalban, fölületben, kizárólag azon a vonalon, fölületen változó függvény folytonosságát, deriválhatóságát jelenti a vonalnak, fölületnek a pontjaiban, mihez képest egy, illetőleg két független változó szerint gondolt korlátlan folytonosság és deriválhatóság az, legalább bizonyos értékhatárok között.

Midőn egy határolt vonal, vagy egy határolt fölület, vagy egy térrész belsejét említjük, akkor a határokat nem számítjuk: vonal határpontját, illetőleg határpontjait, ha több van, fölület határvonalát, illetőleg határvonalait, térrész határ-fölületét, illetőleg határfölületeit állításainkból kizárjuk.

Midőn azt mondjuk egy függvényről, hogy általában folytonos egy vonalon, egy vonalban, egy fölületen, egy fölületben, egy térrészben, azt úgy ért-jük, hogy egyes pontok, illetőleg egyes pontok, vonalak, illetőleg egyes pontok, vonalak, fölületek kivételével folytonos, és mindig ugyanabban az értelemben mondjuk egy függvényről, hogy általában deriválható. Emellett megjegyzendő, hogy egyes pontokon, vonalokon, fölületeken mindig olyanokat gondolunk, amelyek bármely véges térben véges számúak.

XVI. A helytől függés különösségei.

Hasznát veszi a physika a hely oly függvényeinek is, amelyek egyes pontokban nem folytonosak, nem folytonosak egyes vonalak, fölületek egyetlen pontjában sem, egyes határolt vonalak, határolt fölületek belsejének egy pontjában sem folytonosok, és hasznát veszi oly függvényeknek is, amelyek bizonyos vonalak körül az alább meghatározandó értelemben több értékűek, mely vonalak száma végtelen nagy is lehet,

és összességük folytonos geometriai alakzatokat, fölületeket vagy téreket alkotó vonalsereg is lehet.

Az ily függvények vagy csak segédeszközök physikai fogalmak analyticus meghatározásában; vagy egyenesen ők maguk szolgálnak ugyan physikai fogalmak mennyiségi meghatározására, de nem mint a hely függvényei, hanem, mint coordinaták közbenjárásával az idő függvényei, és e minőségükben alkalmazásuk korlátai között teljesen követik a folytonosság elvét (XI); vagy a következő rendeltetéssel bírnak: Majdnem minden függvény, amely physikai jelentésmennyel bír, bizonyos térrészekben köröztül, amelyek egy, vagy két, vagy három dimensio szerint igen kicsinyek, igen rohamosan változik, jóllehet ezekben is folytonosan változik a helylyel és egyébűtt oly függvénynyel azonos, amely ezekben a térrészekben foglalt fölületen, vonalon, pontban nem folytonos, máshol folytonos. Ezeknek a térrészeknek a belsőjére nézve az igazi függvények változásáról közönségesen semmi ősmerethez sem tudunk eljutni, vagy csak igen hiányosokra tudunk szert tenni. Ilyenkor az igazi függvények helyett a folytonosság-szakadásos függvényeket használjuk ezekben a térrészekben is, minek megfelelően e térrészek helyett fölületeket, vonalokat, pontokat tartunk számon, mint különös geometriai alakzatokat és helyeket, t. i. a substituált függvények folytonosságát szakító fölületeket, vonalokat, pontokat. Természetesen, azok az analysisbeli eredmények, amelyekhez e függvények alkalmazása elvezet, physikai tekintetben csak az ily fölületeket, vonalokat, pontokat tartalmazó igen kis térrészekben kívül érvényesek. Mégis hasznos lehet a helyettesítés, mert némely következőkben a tárgyalás egyszerűsítésére szolgálhat amiatt, hogy különös térrészek helyett különös fölületeket, vonalokat, pontokat kell csak szem előtt tartanunk.

Physikai alkalmazások szempontjából a folytonosság-szakadás némely fajai kiváló érdekekkel bírnak. Ezek jellemzését adják a következő megkülönböztetések:

1. A függvény a változó helyből egy állandó helybe mutató vector iránycosinusainak és a változó hely coordinatáinak mindenütt folytonos függvénye.

2. A változó pontból egy adott vonal legközelebbi pontjába mutató vector iránycosinusainak és a változó pont coordinatáinak mindenütt folytonos függvénye. Általában csak a vonal vonjaiban szakad meg a függvény folytonossága. Ha olyan ez a vonal, hogy bizonyos ponthelyekhez egynél több legközelebbi pontja tartozik, úgy ezek a ponthelyek is folytonosság-szakadás helyei.

3. Egy vagy több fölülettel részekre osztott tér minden egyes osztási részében folytonos a függvény (XV), de aszerint, amint két vagy több térrész közös pontjába az egyik, vagy másik térrész belsejéből érkezik meg a változó ponthely, általában más a függvény értéke a közös pontban, tehát a határfölületeken általában kétféle értékei vannak a függvényeknek, az egyik

vagy másik félék aszerint, amint két határos térrész egyikéhez vagy másikához számíttatik a közös határfölület. A függvény illetén folytonosság-szakadásának határozott mennyiségi jelentményt is tulajdonítunk és, ha egy határfölület egy pontjában, mint T' tér pontjában a függvény értéke f' , mint T'' tér pontjában pedig f'' , úgy azt mondjuk, hogy abban a pontban a T' térből a T'' térbe $f'' - f'$ a függvény folytonosság-szakadása, s ha csakis T' és T'' tér közös pontja ez a pont, azt is mondjuk, hogy benne a fölület (') oldaláról (") oldalára $f'' - f'$ a függvény folytonosság-szakadása.

4. Egy pontban, egy vonalnak, egy fölületnek pontjaiban, egy határolt vonalnak, fölületnek belső pontjaiban végtelen nagy a függvény. Ekkor további megkülömböztetés végett vegyük számba a változó ponthelynek attól a ponttól, illetőleg annak a vonalnak, fölületnek a legközelebbi pontjától való távolságát és szorozzuk meg a függvényt a távolság valamely hatványával. Ennek a hatványnak a kitevőjét jelölje n . A függvények egy neménél a ponthoz, illetőleg a vonal, a fölület minden pontjához, a határolt vonal, fölület belsejének minden pontjához rendelhető oly határozott n érték, hogy a szorzat nem végtelen nagy és nem is zérus bennük. Az ilyenmű függvény beszédmódkban algebrai végtelen nagy a pontban, a vonalon, a fölületen, a vonalnak, a fölületnek belsején és részletesebb elnevezéssel annyiad rendű végtelen nagy a különböző pontokban, ahányadfokú az a hatvány, a melylyel szorozva nem végtelen nagy és nem zérus. Ha nem algebrai a végtelenné válás, úgy transcendensnek nevezzük. Algebrai végtelen esetében ezt a további megkülömböztetést tesszük: az a hatványos szorzat, a mely nem végtelen nagy és nem is zérus a különös helyeken, vagy folytonos ezeken a helyeken is, tehát határozott értékkel bír, vagy nem, és ehhez képest határozottnak vagy határozatlanak nevezzük a függvény végtelen nagy értékét is. A transcendens végtelen nagy függvényértéket határozottnak mondjuk, ha zérusnál nagyobb bármi kis n mellett zérus, vagy ha bármi nagy n mellett végtelen nagy a hatványos szorzatunk; és pedig az első esetben logaritmusunak, a másodikban exponentialisnak nevezzük. Végül tegyük azt az észrevételt, hogy, ahol végtelen nagy a függvény, ott nem lehet folytonos: ez egyenesen következik a folytonosság difinitiójából. (XI.)

A bevezetőben jelentett többértékűség jellemzésére szolgál, ami itt következik.

1. T tér minden pontjában, vagy egyes pontok, vonalak, fölületek kivételével minden pontjában több értéke van a függvénynek, és oly különös egyszeresen összefüggő vonal húzódik át rajta, vagy oly különös többszörösen összefüggő vonalat tartalmaz az a tér, amely ezekkel a sajátosságokkal bír: A T tér bármely egyszeresen összefüggő részét szemeljük ki, ha belsejének a különös vonallal nincs közös pontsora, akkor és csak akkor, a függvény a maga különböző

értékei szerint T e részében különböző függvények foglalatata, amelyek egyenkint egyetlen értékkel bírnak és folytonosak a térrész minden pontjában. De a T tér egy többszörösen összefüggő részéről csak akkor áll ez, ha vagy nem övedzi körül a különös vonalat, vagy nem lényegesen övedzi, azaz, többszörös összefüggésének megőrzése mellett úgy deformálható, hogy a deformálás után nem övedzi, jóllehet a deformálás folyamán sohasem metsződött a különös vonallal. Válaszszunk ugyanis tetszés szerint oly pontot a T térben, a különös vonalon kívül, amely pontban egynél több értéke van a függvénynek, azután ebből a pontból indulva, írassunk le a változó ponthelylyel egy kétszeresen összefüggő vonalat a T térben, amely a különös vonalat lényegesen körülövedze. Bármely értékből változzék folytonosan a függvény a leírt vonalon, más értékkel érkezik meg a kiindulás helyén, mint amelylyel kiindult. Továbbá vegyünk föl tetszésre egy oly fölületdarabot a T térben, amelyet e tér fölülete és az egész különös vonal, vagy, ha lehetséges, csak az utóbbi határol. Akkor a függvény a maga különböző értékei szerint oly különböző függvények foglalatának tekinthető, amelyek a fölvett fölületen kívül mindenütt egyetlen értékkel bírnak és folytonosak a T -ben, de a fölvett fölületen nem. Az ily fölületet reducáló vagy rekesztő fölületnek, diaphragmának, s az ily függvényt a különös vonal körül a T térben folytonos többértékű függvénynek nevezzük. Nagy fontosságúak azok a specialis eféle függvények, amelyek végtelen sokértékűek és kivált amelyek olyképen azok, hogy bármely értékükből az által származtathatók a többiek minden pont számára, hogy ehhez az értékhez bizonyos mennyiség j pozitívus vagy negatívus egész számú többszörösét adjuk, amely j mennyiség független a helytől. Az eféle függvény bizonyos harmonicus függvényei a különös vonalon kívüli pontokon egyértékű folytonos függvények. Nevezetesen, ha a hely egy ilyetén többértékű függvénye f , úgy

$$\varphi = \sin\left(2\pi\frac{f}{j}\right)$$

egyértékű folytonos a különös vonalán kívül, mert reducáló fölület fölvételével, nemcsak a fölületen kívül, de e fölület belső pontjaiban is mindenesetre folytonos. Így ebben az alakban fejezhető ki az f függvény:

$$f = \frac{j}{2\pi} \text{arc. sin. } \varphi,$$

ahol a φ függvény a különös vonalon kívüli helyeken mindenütt egyértékű és folytonos, a j mennyiség pedig nem függ a helytől. Továbbá, akármely ponthelyet választunk, vagy nem deriválható abban az eféle függvény a koordinaták szerint, vagy koordinata deriváltjai egyértékűek abban a pontban, mert, a függvény értékkülömbözetei függetlenek lévén a helytől, e külömbözetek koordinataderiváltjai zérusok.

2. A physikai alkalmazások czéljaira még kiválóan figyelembe veendő többértékűség abból áll, hogy a függvény oly függvények összege, amelyek egyenkint az imént leírt módon többértékűek, mindegyik más vonal körül. Az összeadandó függvények száma pedig végtelen nagy is lehet, midőn aztán összegük egyszeres, vagy kétszeres határozott integralist képez. Ugyanis, egy illetén összegtag egy vagy két parametrum folytonos függvénye és a parametrum, illetőleg a két parametrum elemi megváltozását mint szorzót tartalmazza, a parametrumok pedig egyszerismind arra valók, hogy az σ változásukkal változik összegtagról összegtagra az összeadandók, integrálandók különös vonala. Aszerint, amint egy, vagy két változó parametrum szerepel, egyszeres vagy kétszeres integrálás szolgáltatja a teljes többértékű függvényt, és a kivételes vonalok összessége fölületet vagy tért alkot, úgy, hogy a kivételes geometriai alakzat fölület vagy tér. Az előbbieken az egyetlen vonal körül többértékű függvényről szóló leírások, fogalmazásuk némi módosításával kivételes fölületek és terek esetére is kiterjeszkednek. Ezek a módosítások könnyen kitalálhatók.

3. Amily értelemben többértékű egy függvény egy vagy több vonal körül, midőn térben változhatik, ugyanoly értelemben lehetséges, hogy egy fölületre rendelt függvény egy vagy több fölületi pont körül több értékű. Ha egy függvényt, amely T térben egy vonal körül több értékű, oly fölületre rendelünk, amely a T térben van és amelyet ez a vonal egy vagy több pontban átdőf már a függvény nyilvánképen, többértékű a fölületen az átdőfési pontok körül.

4. Végre, ha a függvény egy többszörösen összefüggő vonalon a tulajdonsággal bír, mikép, folytonosan változván a vonalon, más értékkel érkezik meg a kiindulás helyén, vagy legalább lehet olyan az útja a vonalon, hogy más értékkel érkezik meg, mint amelylyel kiindúlt, akkor a vonalon többértékűnek nevezzük a függvényt.

XVII. A hely függvényének deriváltjai.

Jelölje Φ a hely egy függvényét, és ez a függvény x, y, z helyen mindhárom coordinata szerint deriválható legyen. Akkor a hely elemi megváltozásával járó elemi megváltozása így írható:

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z,$$

ha t. i. a coordinaták elemi megváltozása rendre $\delta x, \delta y, \delta z$. Ezek egyszerismind az x, y, z helyből az $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$ helybé nyúló elemi vector componentsei.

Ennek az elemi vectornak az irányát i , a hosszát $\delta\epsilon$ jelölje. Akkor a Φ elemi megváltozását az σ i irányú elleni megváltozásának mondjuk és a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta \zeta},$$

hányadost i irányú deriváltjának nevezzük. Amennyiben az i irány ki van szabva, teljesen határozott határérték felel meg ennek a hányadosnak, mert, ha az i irány iránycosinusai α , β , γ , úgy

$$\frac{\delta x}{\delta \zeta} = \alpha, \quad \frac{\delta y}{\delta \zeta} = \beta, \quad \frac{\delta z}{\delta \zeta} = \gamma,$$

a koordinata-deriváltak pedig határozott értékkel bírnak.

Eszerint, ha az x' , y' , z' koordinaták csak oly pontot jelenthetnek, amelybe az x , y , z pontból egy adott i irány mutat, és ha a két pont kölcsönös távolsága ζ , úgy, végtelenül közelítettetvén az előbbi pont az utóbbihoz,

$$\frac{\Phi(x', y', z') - \Phi(x, y, z)}{\zeta}$$

határértéke az i irányú derivált az x , y , z pontban, mert

$$x' - x = \zeta \alpha, \quad y' - y = \zeta \beta, \quad z' - z = \zeta \gamma,$$

és, végtelenül kisebbítettetvén a ζ , nyilvánképen

$$\frac{\Phi(x + \zeta \alpha, y + \zeta \beta, z + \zeta \gamma) - \Phi(x, y, z)}{\zeta}$$

határértéke az i irányú derivált az x , y , z helyen.

Jelölésére közönségesen a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i}$$

symbolumot használjuk:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} \equiv \frac{\delta \Phi}{\delta \zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\delta x}{\delta \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\delta z}{\delta \zeta} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \gamma.$$

Amennyiben az i irány nincs határozottan kiszabva, kiváltképen ezek az esetek bírnak fontossággal: 1. Derivált egy vonalban. Ez derivált azzal a kikötéssel, hogy a függvény csak a vonalon változzék, tehát érintő irányú derivált, s a vonal minden egyes pontjában annyi irány szerint képezhető, ahány irányban a pontból a vonalhoz érintő húzható. 2. Derivált egy fölületben. Ez derivált azzal a kirovással, hogy a függvény csak a fölületen változzék, tehát érintő irányú derivált és a fölület minden egyes pontjában annyi irány szerint képezhető, ahány irányban a pontból a fölülethez érintő egyenes húzható. 3. Korlátlan derivált. Ez minden irányban megengedett derivált.

Föl volt tételezve, hogy a függvény mindhárom coordinata szerint deriválható. De előfordulhat, hogy csak egy vagy két coordinata szerint deriválható, vagy egyik szerint sem. Még pedig megeshetik, hogy nemcsak egyes pontokban ilyen a függvény, de vonalakon, fölülleteken, sőt térrészekben, sőt az egész térben. Most tegyük föl, hogy egy térrészben egyik coordinata szerint sem deriválható a függvény sehol sem. Emellett lehetséges, hogy bizonyos α, β, γ , irányok szerint, ez a különbségi hányados:

$$\frac{\Phi(x+\zeta\alpha, y+\zeta\beta, z+\zeta\gamma) - \Phi(x, y, z)}{\zeta}$$

határozott határértékkel bír a ζ távolság végtelen kisebbitésének megfelelően. Azért általánosabban ezt használjuk az irányos deriváltak definiójára.

E definitio értelmében beszélve: mihelyt Φ függvény x, y, z helyen mindhárom coordinatára deriválható, már szükségképen minden irányra deriválható. Ugyanis bármely irányt jelentsenek α, β, γ cosinusok, határozott értékkel bír a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\gamma$$

kifejezés, és egyuttal egyezik az α, β, γ irányú deriváltat általánosan definiáló határkifejezéssel. Ha csak két coordinatára deriválható a függvény, akkor az egyik coordinata-síkkal párhuzamos síkban deriválható, de ebben minden irányban. Ha csak egy coordinatára deriválható, akkor csak az egyik coordinata tengelyvel párhuzamos egyenesben deriválható, ennek két irányában. Ha egyik coordinatára sem deriválható az x, y, z helyen, amellett még lehetséges, hogy valamely síkban vagy valamely egyenesben deriválható. Az első esetben csak két független változóra deriválható szükségképen, t. i. két olyanra, u, v , amelyek az x, y, z coordinatákat, mint függvényeiket a síkba tartozó pontok coordinatáivá teszik, mert az ily független változók változásával jár a függvénynek fölületen változása. A második esetben csak egy független változóra deriválható szükségképen a függvény, t. i. olyanra, w , amely az x, y, z coordinatákat, mint függvényeit, az egyenesbe tartozó pontok coordinatáivá teszi, mert az ily független változó változásával jár a függvénynek vonalon változása. Első esetben a létező deriváltak kifejezése

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = \frac{\partial\Phi}{\partial u} \frac{\delta u}{\delta\zeta} + \frac{\partial\Phi}{\partial v} \frac{\delta v}{\delta\zeta}$$

másodikban

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = \frac{\partial\Phi}{\partial w} \frac{\delta w}{\delta\zeta}$$

és világos, hogy viszont, ha csak két független változóra deriválható valamely helyen szükségképen a függvény, úgy egy síkban deriválható, és ha csak egyre deriválható szükségképen, úgy egy vonalban deriválható, t. i. azon a helyen.

Ezek teljes térfogati, illetőleg fölületi, illetőleg vonalas lehetőségek. Hozzájuk részleges lehetőségek sorakoznak, amelyek miben létét könnyű kitalálni.

Természetesen a mennyiség szerint való deriválhatóságot mindig a mennyiség illető értékének mindkét oldalára értettük és értjük ezentúl is és úgy a mennyiség megkisebbitéséből, mint megnagyobbításából származtathatónak gondoljuk a deriváltat, még pedig azzal a megszorítással, hogy az egyik és másik módon származott derivált egyenlő egymással; mert ez az értelmezés felel meg az általános szokásnak. Ha valamikor csak az egyik oldalra akarnók érteni, vagy ha két oldalra különböző értékkel akarnók gondolni a deriválhatóságot, ezt különösen felemlítenők. De tegyük itt most azt az észrevélelt, hogy két ellentétes irányú deriválnak a viszonya általában más, mint egy mennyiség szerint az egyik és másik oldalról képezett deriválnak a viszonya. Ugyanis az α , β , γ irányra képezett derivált a

$$\frac{\Phi(x+\zeta\alpha, y+\zeta\beta, z+\zeta\gamma) - \Phi(x, y, z)}{\zeta}$$

hányados határértéke, és a $-\alpha, -\beta, -\gamma$ irányra képezett derivált a

$$\frac{\Phi(x-\zeta\alpha, y-\zeta\beta, z-\zeta\gamma) - \Phi(x, y, z)}{\zeta}$$

hányados határértéke. Ha pedig írjuk:

$$x = a + q\alpha, \quad y = b + q\beta, \quad z = c + q\gamma,$$

úgy a q mennyiség szerint az egyik oldalról képezett derivált a

$$\frac{\Phi[a+(q+\zeta)\alpha, b+(q+\zeta)\beta, c+(q+\zeta)\gamma] - \Phi(a+q\alpha, b+q\beta, c+q\gamma)}{\zeta}$$

hányados határértéke, a másik oldalról képezett a

$$\frac{\Phi[a+(q-\zeta)\alpha, b+(q-\zeta)\beta, c+(q-\zeta)\gamma] - \Phi(a+q\alpha, b+q\beta, c+q\gamma)}{-\zeta}$$

hányados határértéke. Az első és a harmadik határérték egyenlő, a második és negyedik ellentétesen egyenlő, ha nem zérus.

Végül vegyük figyelembe, hogy, ha q szerint a közönséges értelemben deriválható a függvény az x, y, z értéknél, akkor a négy határérték közül három egyenlő egymással, t. i. az első, harmadik és

negyedik, a második pedig ezekkel ellentétesen egyenlő. Azaz i -vel jelölvé az α , β , γ , irányt és i' -vel az ellentétes irányt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial i'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q},$$

bármelyik oldalról származzék a q szerint képzett derivált. Ebből az is kitűnik, hogy az i irányú derivált egyszersmind oly coordinatára képezett derivált, amely i irányú tengelyre tartozik. Jelöljék ugyanis épen a , b , c a tengely origójának coordinatait. Akkor az x , y , z pontnak ezen a tengelyen lévő coordinatája (X.)

$$(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma.$$

De

$$x-a = q\alpha, \quad y-b = q\beta, \quad z-c = q\gamma,$$

tehát q ez a coordinata. Különösen pedig, ha az i irány egymásután az x , y , z tengely irányát jelenti, úgy az i irányú derivált egymásután az x , y , z coordinatákra képezett deriválttal egyezik, akár az egyik, akár a másik oldalról képezzük a coordinata-deriváltakat, hacsak a közönséges értelemben deriválható a coordinaták szerint a függvény.

XVIII. Egy térben deriválható függvény integrálhatósága.

Ha Φ mindhárom coordinata szerint deriválható a T térben, akkor létezik oly ψ függvény ebben a térben, mely általában (XV.) mindhárom coordinata szerint folytonos és deriválható, hogy:

$$\Phi = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Ugyanis gondoljunk egy hasábot a T térben (h), amely párhuzamos az x tengelyvel. Végein a T tér fölülete határolhatja. Azután válaszszunk oly síkot, amely merőleges a hasábra és teljes vastagságában átszeli a hasábot. Ha ennek a síknak az egyenlete $x = x_h$, úgy írván

$$\psi_h = \int_{x_h}^x \Phi(\xi, y, z) d\xi,$$

ez a hasáb térfogatában mindhárom coordinata folytonos, sőt deriválható függvénye mindenütt, mert akármely pont legyen a hasábban x , y , z , már ξ , y , z a hasábra tartozó egyenes pontsereget jelent az integrálásban. Márpedig

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial x} = \Phi(x, y, z).$$

Az egész T tért ily hasábszerű részekből állónak tekinthetjük, még pedig végtelen sokféle módon. Ha egy választásban az egyes részeknek megfelelően rendre a

$$\psi = \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$$

integralisokat képezzük, úgy mindegyik részben

$$\Phi = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

A ψ függvény két szomszédos rész határ-fölületének közös pontjaiban általában folytonosság-szakadásos, és így általánosan csak annyi mondható, hogy a ψ függvény általában (XV.) folytonos és általában deriválható függvénye a három koordinatának a T térben.

Világos, hogy, ha a Φ csak általában deriválható a T térben a három koordinatára, akkor is létezik ilyen ψ függvény, mert oly részekre osztható a T tér, amelyek belsejében mindenütt deriválható a Φ a három koordinatára, és e térrészek belsejére nézve épúgy következtethető az állítás, mint az előbb a T térre nézve következett. Ebből pedig továbbá belátható, hogy bármely adott egész számok legyenek l, m, n , létezik oly függvény is a T térben Ω , hogy általában

$$\frac{\partial^{l+m+n} \Omega}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n} = \Phi.$$

XIX. A koordinata-deriváltak némely geometriai jelentményei.

1. Egy fölület egyenlete legyen

$$F(x, y, z) = \text{constans},$$

és az F függvény egyszer korlátlanul deriválható legyen a fölület x, y, z pontjában. A fölületen állandó lévén az F függvény értéke, a fölületben képezett deriváltjai eltűnnek. Ha tehát α, β, γ érintői irány-cosinusokat jelentenek az x, y, z helyen, úgy

$$\frac{\partial F}{\partial x} \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \gamma = 0.$$

Ebből folyólag, föltéve, hogy a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

vector nem tűnik el, az x, y, z helyen a fölület minden vonal-elemével derékszöget alkot az. Következésképpen az x, y, z pontban a fölületnek

határozott és egyetlen érintő síkja van, amelyre a vector merőleges: a fölület határozott és egyetlen normalissal bír az x , y , z helyen, amelyek egyik iránya a vector irányával egyezik.

Legyenek a normalis valamelyik irányának iránycosinusai λ , μ , ν , és jelölje a vector nagyságát N . Akkor

$$\lambda = \pm \frac{\partial F}{\partial x} : N, \quad \mu = \pm \frac{\partial F}{\partial y} : N, \quad \nu = \pm \frac{\partial F}{\partial z} : N,$$

$$N^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Ha a λ , μ , ν normális irányt n jelöli, úgy

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} \lambda + \frac{\partial F}{\partial y} \mu + \frac{\partial F}{\partial z} \nu,$$

tehát

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \pm N$$

s következéskéleg

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \nu = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial n}.$$

Abban az esetben, hogy az n irány egyezik a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector irányával:

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial x} : N, \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial y} : N, \quad \nu = \frac{\partial F}{\partial z} : N,$$

tehát

$$\frac{\partial F}{\partial n} = N,$$

s következéskéleg $\partial F : \partial n$ pozitívus. Továbbá, ha i irány irány-cosinusai λ' , μ' , ν' , és ez az irány hegyes-szöveget alkot az n iránynyal, akkor $\partial F : \partial i$ is pozitívus, mert

$$\frac{\partial F}{\partial i} = \frac{\partial F}{\partial x} \lambda' + \frac{\partial F}{\partial y} \mu' + \frac{\partial F}{\partial z} \nu' = (\lambda \lambda' + \mu \mu' + \nu \nu') N.$$

Igy az F függvény ama fölületi oldal felé, amely felé a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector mutat, növekedőleg változik az x, y, z pontból. Az ellenkező oldal felé nyilvánképen fogyólag változik.

2. Egy második fölület egyenlete legyen

$$G(x, y, z) = \text{constans},$$

és a két fölület metsződjék egy vonalban, amelynek egy pontja épen x, y, z pont legyen. Úgy az F , mint a G függvényről tegyük föl, hogy egyszer korlátlanul deriválhatók e pontban, és hogy a deriváltjaikból képzett vectorok, u. m.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \text{ és } \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$$

nem tűnnek el. Akkor a metszési vonalnak határozott és egyetlen érintő egyenese van az x, y, z helyen, t. i. a két fölület érintő síkjának a metszési vonala. Mivel pedig mindkét vectorral derékszöget alkot, emélfogva a két vector tengelyvonala az (VIII), minek alapján a két fölület metszési vonalának érintői iránycosinusai a két függvény deriváltjaival közbötllenül kifejezhetők (VIII).

3. Egy fölület-sereg egyenlete legyen

$$F(x, y, z, p) = 0,$$

amely aszerint jelent más és más F_p fölületet, amint a p parametrum értéke más és más: különböző p értékekhez általában különböző F fölületek tartoznak. Lehetnek azonban valamennyi fölületnek közös pontjai és vonalai, mert lehet olyan az F függvény, hogy egyes pontoknak és egyes vonalok pontjainak a koordinatái mellett a p parametrum kiesik belőle, már pedig ezek a koordinaták valamennyi fölületben bent lévő pontokat határoznak meg.

Az F függvény a koordinaták és a parametrum deriválható függvénye legyen e változók oly x, y, z, p értékénél, amelynél az egyenlet teljesül, vagyis oly x, y, z, p értéknél, amely az F_p fölülethez tartozik. Azonkívül tegyük föl, hogy a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector nem tűnik el ezeknél az értékeknél. Végül tegyük föl még, hogy $\partial F : \partial p$ sem tűnik el ez értékeknél. Ez utóbbi föltevés miatt az F_p fölület x, y, z pontja nem lehet a fölület-sereg közös pontja.

Ha $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi vector nem tangentialis az F_p fölülethez az x, y, z helyen, akkor létezik oly zérustól különböző δp elemi megváltozás, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p = 0.$$

Ugyanis az elemi vector hosszát $\delta\zeta$, iránycosinusait λ' , μ' , ν' jelölvén, a három első tag összege annyi mint

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\lambda' + \frac{\partial F}{\partial y}\mu' + \frac{\partial F}{\partial z}\nu'\right)\delta\zeta \equiv N\delta\zeta\cos\varepsilon$$

ahol N a fentebbi vector nagysága és ε ennek a vectornak és az elemi vectornak a szöge. Minthogy a föltevések értelmében sem N , sem $\cos\varepsilon$ nem zérus, az állítás helyes. De, ha variációs egyenletünkhöz hozzáadjuk a fölület egyenletét, látjuk, hogy

$$F(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, p+\delta p) = 0.$$

Eszert az $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ pont az $F_{p+\delta p}$ fölület egy pontja. Ha tehát az F_p fölületet x, y, z helyen átdöfjük egy egyenessel, ez az egyenes az $F_{p+\delta p}$ fölületet is átdöfi, még pedig végtelen közel az x, y, z helyhez,

$$\delta\zeta = -\left(\frac{\partial F}{\partial p} : N\cos\varepsilon\right)\delta p$$

végtelen kis távolságban. Ha az átdöfés iránya normalis a fölülethez, úgy $\delta\zeta$ az F_p és $F_{p+\delta p}$ fölület térközének a vastagsága az x, y, z helyen, amit δn jelöljön. Eszerint

$$\delta n = \mp\left(\frac{\partial F}{\partial p} : N\right)\delta p$$

aszerint, amint ε értéke 0 vagy π .

Ha specialisan

$$F(x, y, z, p) \equiv F(x, y, z) - p,$$

úgy

$$\delta n = \pm \frac{\delta p}{N}$$

XX. Vectorok potentialisai.

Legyen (ξ, η, ζ) vector a hely függvénye.

1a) Ha a T térben létezik a helynek oly scalaris függvénye Φ , általában (XV) deriválható mindhárom coordinátára, mikép

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

akkor azt mondjuk a vectorról, hogy van a T térben potentialisa, és a

Φ függvényt potentialisának nevezzük. Némelyek a Φ ellentétesét, $-\Phi$, nevezik így.

1b) Ha pedig a T térben léteznek olyan helynek oly vector függvénye (U, V, W), általában deriválható mindhárom coordinatára, mikép

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

akkor azt mondjuk a vectorról, hogy van vector-potentialisa, és az (U, V, W) vectort vector-potentialisának nevezzük.

2. Amely vectornak egy helyhatározó rendszerben van a T térben potentialisa, annak minden más helyhatározó rendszerben van a T térben potentialisa, és pedig ugyanaz.

Amely vectornak pedig egy helyhatározó rendszerben van a T térben vector-potentialisa, annak minden más helyhatározó rendszerben van a T térben vector-potentialisa, és pedig congruens rendszerekben ugyanaz a vector, nem congruensekben az ellentétes vector, mindig az illető rendszerbe tartozó componensek szerint.

Legyen ugyanis egy második helyhatározó rendszerben x', y', z' a három coordinata, és a rendszer tengelyeinek az iránycosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ és $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legyenek. Akkor az új rendszerben a (ξ, η, ζ) vector componensei ezek:

$$\begin{aligned} \xi' &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \\ \eta' &= \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \\ \zeta' &= \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta. \end{aligned}$$

2a) Ha tehát T térben van a (ξ, η, ζ) vectornak potentialisa Φ , úgy a T térben

$$\xi' = \alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \text{ stb.}$$

Itt a ξ' kifejezése nem más, mint a Φ függvénynek az új első tengely irányában képezett deriváltja stb.

2b) Ha pedig a T térben vector-potentialisa van a (ξ, η, ζ) vectornak, u. m. (U, V, W), úgy

$$\xi' = \alpha_1 \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \beta_1 \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \gamma_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right), \text{ stb.}$$

Míntogy U, V, W általában mindhárom régi coordinatára deriválhatók az előzetes föltevés szerint, így általában mindhárom új coordinatára is deriválhatók, mert általában minden irányban deriválhatók. Mivel pedig az új rendszerben a régi tengelyek irány-cosinusai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ és $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ és $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, így

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial x'}\beta_1 + \frac{\partial U}{\partial y'}\beta_2 + \frac{\partial U}{\partial z'}\beta_3, \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial x'}\gamma_1 + \frac{\partial U}{\partial y'}\gamma_2 + \frac{\partial U}{\partial z'}\gamma_3, \quad \text{stb.}\end{aligned}$$

Helyettesítsük be ezeket ξ' kifejezésébe. Azután vegyük számba a X. cikk végén jegyzett kifejezéseket, amelyek akkor érvényesek az iránycosinusok között, midőn a két helyhatározó rendszer congruens. Találjuk:

$$\xi' = \frac{\partial}{\partial y'}(U\alpha_3 + V\beta_3 + W\gamma_3) - \frac{\partial}{\partial z'}(U\alpha_2 + V\beta_2 + W\gamma_2).$$

Ámde, ha az (U, V, W) vector componensei az új rendszerben U', V', W' , úgy

$$\begin{aligned}U' &= \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W, \\ V' &= \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 W, \\ W' &= \alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3 W.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\xi' = \frac{\partial W'}{\partial y'} - \frac{\partial V'}{\partial z'}, \quad \text{stb.}$$

Ha azonban a két helyhatározó rendszer nem congruens, akkor a X. cikk végén jegyzett cosinus-relatiók a cosinusok ellentétes értékeivel helyesek, miből folyólag akkor

$$\xi' = \frac{\partial}{\partial z'}(U\alpha_2 + V\beta_2 + W\gamma_2) - \frac{\partial}{\partial y'}(U\alpha_3 + V\beta_3 + W\gamma_3),$$

vagyis

$$\xi' = \frac{\partial V'}{\partial z'} - \frac{\partial W'}{\partial y'}, \quad \text{stb.}$$

3a.) A 2a.) alattiakból az is kitűnik, hogy, ha (ξ, η, ζ) vektornak van a T térben potentialisa Φ , akkor a T térben i irányon számított vector érték $\partial\Phi : \partial i$.

3b.) A 2b. alattiakból pedig kitűnik, hogy ha (ξ, η, ζ) vektornak van a T térben vectorpotentialisa, és ha egy q és p irányú derékszögű vectorpár tengelyén a (ξ, η, ζ) vector értéke λ , az (U, V, W) vector értéke pedig p irányon P , és q irányon Q , akkor a T térben

$$\lambda = \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}.$$

4. Midőn egy vektornak van potentialisa, akkor oly specialis

vector az, amelyet egyetlen parametrummal, t. i. a potentialissal lehet kifejezni.

Midőn azonban egy vectornak vector-potentialisa van, akkor a definitio szerint összesen három parametrum fejezi ki a vector három componensét, t. i. a vector-potentialis három componense. Ámde ez a három parametrum kettőre reducálható. Legyen ugyanis (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector-potentialisa (U, V, W) . Minthogy az U, V, W componensek általában mindhárom coordinata szerint deriválhatók a T térben, úgy léteznek a hely oly függvényei a T térben, f, g, h , általában mindhárom coordinata szerint deriválhatók, mikép (XVIII):

$$U = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial h}{\partial z},$$

és következőleg az f olykép, általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló x , a g olykép általában kétszer is, hogy az egyik deriváló y , a h olykép általában kétszer is, hogy az egyik deriváló z , és e kétszeres deriválások sorrendje fölcserélhető:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2(h-g)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2(h-g)}{\partial z \partial y}, \text{ stb.} \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial^2(h-g)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2(h-g)}{\partial z \partial y} \\ \eta &= \frac{\partial^2(f-h)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2(f-h)}{\partial x \partial z} \\ \zeta &= \frac{\partial^2(g-f)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2(g-f)}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Az itt szereplő három függvény-külömbségnek az összege zérus, tehát két függvénynyel fejezhetők ki. Még pedig írván

$$h-g = -\lambda, \quad f-h = \mu$$

ered a harmadik különbség számára

$$g-f = \lambda - \mu.$$

Csakhogy e helyettesítések után ζ kifejezésében a kétszeres deriválás és a kivonás sorrendjét általában nem szabad fölcserélni, mert λ és μ tartalmazza a h függvényt, amely kétszer általában csak úgy deriválható, ha az egyik deriváló a z coordinata.

Azokban tegyük föl, hogy a (ξ, η, ζ) vector általában deriválható T -ben a három coordinatára, és most járjunk el így: írjuk csupán

$$W = \frac{\partial h}{\partial z},$$

ahol is a h általában mindhárom coordinatára deriválható, és oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló a z . Ekkor

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial z} \left(V - \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad \eta = \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

és ezekből világos, hogy a h függvény lehet olyan, hogy általában mindenkép deriválható kétszer T -ben a coordinaták szerint és nem csupán úgy, ha az egyik deriváló coordinata a z . Következésképp ζ kifejezése így is írható:

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial x} \left(V - \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

mert a h csak látszólagosan fordul elő benne. Ezek reudén, ha

$$U - \frac{\partial h}{\partial x} = u, \quad V - \frac{\partial h}{\partial y} = v$$

rövidítő jelölést használjuk:

$$\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

vagyis, ha (ξ, η, ζ) általában deriválható a coordinatákra a T -ben, és van e térben vector-potentialisa, akkor utóbbi mindig olyanra reducálható, amelynek egyik componense zérus.

XXI. A potentialis egyenletek

1a) Ha (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa a T térben, Φ , mihez képest

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

és ha általában deriválható ez a vector a három coordinata szerint abban a térben, akkor a potentialisa általában mindenkép kétszer deriválható. Következésképp a vector componensei kielégítik a T térben a következő egyenleteket:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

2a) Fordítva, ha (ξ, η, ζ) deriválható a T térben a három koordinátára és érvényes T -ben ez a három differentialis egyenlet, akkor (ξ, η, ζ) vektornak van potentialisa a T térben.

Létezik ugyanis a T térben olyan függvény, φ , általában deriválható mindhárom koordinátára, hogy

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

és φ olyképp általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló az x , s a deriválások sorrendje közömbös. Irjuk már most

$$\eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + p.$$

Nyilvánvaló, hogy p általában deriválható x -re. Ennélfogva azonban a harmadik differentialis egyenletből

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

tehát p csak y és z függvénye. Mivel továbbá

$$p = \eta - \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

úgy létezik olyan függvény a T térben, ψ , általában deriválható mindhárom koordinátára, hogy

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

és tekintettel arra, hogy p csak y és z függvénye, megválasztható úgy a ψ , hogy maga is csak y és z függvénye legyen. Ezek alapján írhatjuk

$$\xi = \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial y},$$

ahol $\varphi + \psi$ nyilvánképen mindhárom koordinátára deriválható általában a T -ben és olymódon kétszer is, hogy az egyik deriváló x vagy y . Végül tegyük

$$\zeta = \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial z} + q.$$

Az itt írt q függvény általában szükségkép deriválható x -re és y -ra. De ennek kapcsán az első és második differentialis egyenletből

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

tehát q csak z függvénye lehet. Mivel pedig

$$q = \zeta - \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial z},$$

úgy létezik a T -ben a koordinátáknak oly általában deriválható függvénye χ , hogy

$$q = \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

és q csak z függvénye lévén, megválasztható a χ függvény úgy, hogy ő maga is csak z függvénye. Következésképp van olyan függvény a T térben, $\varphi + \psi + \chi$, általában deriválható mindhárom koordinátára, — mégpedig kétszer is — hogy

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi + \psi + \chi), \quad \eta = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi + \psi + \chi), \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + \psi + \chi),$$

vagyis van a (ξ, η, ζ) vektornak potentialisa a T térben.

1b.) Most legyen, hogy (ξ, η, ζ) vektornak a T térben vector potentialisa van: (U, V, W) . Ha (ξ, η, ζ) általában deriválható a három koordinátára a T -ben, úgy

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Ez a vector-potentialis általános (U, V, W) alakja után, vagyis a

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

kifejezések után nem tűnik ki, mert nem állítható, hogy U, V, W egyenkint másodszor is deriválhatók. Azonban egyenesen következtethető a vector-potentialisnak az előbbi cikik végén megállapított specialis alakjából (u, v, o) , amely szükségkép lehetséges alak, ha (ξ, η, ζ) deriválható a három koordinátára. Induljunk ki tehát a

$$\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

kifejezésekből. Az első kettő szerint u és v mindhárom koordinátára olyképp általában kétszer is deriválhatók, hogy az egyik deriváló

coordinata a z , és pedig bármelyik egymásutánban. Ebből folyólag ζ kifejezésének mindegyik tagja deriválható általában z -re és pedig akár az ott irt deriválás előtt, akár az után. Így a bebizonyítandó egyenlet tényileg érvényes a T térben.

2b.) Fordítva, ha (ξ, η, ζ) általában deriválható T -ben a három koordinatára, és e térben

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

akkor (ξ, η, ζ) vektornak forma szerint van vector-potentialisa a T térben az az van, eltekintve attól a követeléstől, hogy általában mindhárom koordinata szerint deriválható legyen T -ben.

Ugyanis létezik olyan φ és ψ függvény T -ben, általában deriválhatók mindhárom koordinatára, hogy

$$\xi = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

még pedig úgy φ , mint ψ oly módon általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló a z . Helyettesítsük be ezeket a differentialis egyenletbe és látjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0.$$

következésképp $\tilde{\omega}$ -val esupán x és y függvényét jelölvén,

$$\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \tilde{\omega}.$$

De mivel φ és ψ általában mindhárom koordinatára deriválhatók, létezik két olyan függvény, f' g' , a T térben, általában deriválhatók mindhárom koordinatára, hogy

$$\varphi = \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad \psi = \frac{\partial g'}{\partial y},$$

és f' oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló az x , és g' oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló az y , s a deriválások sorrendje tetszés szerinti. Eként

$$\zeta + \frac{\partial^2 (f' - g')}{\partial x \partial y} = \tilde{\omega}.$$

Ebből folyólag (XVIII) létezik a T -ben oly függvény, μ , általában deriválható egymásután x -re és y -ra, valamint y -ra és x -re, hogy

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y}.$$

Mivel pedig $\bar{\omega}$ csak x és y függvénye, megválasztható a μ úgy, hogy az is csak x és y függvénye. Így aztán

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\psi + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi + \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

vagy, ha a záró-jel tartalmát v , és a φ mennyiséget u jelöli:

$$\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Tényleg forma szerint van tehát a (ξ, η, ζ) vektornak a T térben vector-potentialisa. A $\partial \mu : \partial y$ derivált mindhárom coordinata szerint általában sem szükségképen deriválható és így v sem. Ha azonban η általában kétszer deriválható mindhárom coordinata szerint, akkor a definitio teljes tartalmával létezik a vector-potentialis. A vector-potentialis általánosabb alakjához is juthatunk, mivelgéből csak irunk kell

$$u = U - \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = V - \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = W,$$

azzal a rendeléssel, hogy a T térben h deriválható legyen kétszer a koordinátákra.

XXII. Geometriai integrálisok.

Egy véges kiterjedésű geometriai alakzatot ($\bar{\omega}$), ú. m. vonalat, fölületet, tért, vagy ilyenek rendszerét, igen kis részekre osztva gondolunk, vonalat igen kis vonalrészekre, fölületet két dimensio szerint igen kis fölület-részekre, tért három dimensio szerint igen kis tér-részekre. Megjegyzendő, hogy mindig oly vonalokat és fölületeket értünk, amelyek általában mindenütt határozott sőt folytonos irányú normalis, illetőleg érintő síkkal bírnak.

Jelöljön ($D\bar{\omega}$) valamely osztásrészt, ú. m. vonalnak, fölületnek, vagy térnek igen kis részét, és ennek a nagysága $D\bar{\omega}$ legyen, tehát igen kis vonalrész hossza, vagy igen kis fölület-rész területe vagy igen kis térrész térfogata.

Adva van az alakzatban, mint a hely függvénye Φ , amelynek általában az alakzat minden pontjában egyetlen határozott véges értéke van, vonalon legfeljebb egyes pontokban, fölületen legfeljebb egyes pontokban és vonalokon, térben legfeljebb egyes pontokban, vonalokon és fölületeken nem.

A ($D\bar{\omega}$) részben tetszésre választunk oly pontot, amelyben a Φ függvény határozott véges értékkel bír. Minden osztás-rész nagyságából és ily pontjába tartozó Φ értékből $\Phi D\bar{\omega}$ szorzatot képezünk, azután valamennyi szorzatot összeadjuk. $\Sigma \Phi D\bar{\omega}$ jelentse az összeget. Nyilvánvaló, hogy teljesen határozott értéke van, amely azonban függ attól, hogy milyen a részekre osztás, vagyis, hogy mikép választvák meg a ($D\bar{\omega}$) részek, és, hogy ezek mely pontját választottuk függvényhely

gyanánt, azaz, hogy a függvény szorzóul használt értéke mely pontjukhoz tartozik.

Minél kisebbek az osztás-részek, annál nagyobb a sokaságuk, s ennek megfelelően beszélünk a részekre osztás, a fölosztás sűrűségéről s azt a kérdést vetjük föl, hogy, ha a fölosztás sűrűségét az egész alakzatban határtalanul növeljük, miként viselkedik a szorzatok összege, $\Sigma\Phi D\omega$?

A legközelebbi cikkekben látni fogjuk, hogy, ha Φ függvény folytonos az alakzatban, vagy ha legalább általában folytonos (XV) és a folytonosság-szakadás helyein is véges mindenütt, akkor a $\Sigma\Phi D\omega$ összeg a fölosztás sűrűségének végtelen növelésével határozott véges értékbe convergál, a fölosztások és függvényhelyek bármely megválasztásában ugyanabba. Ha pedig az általában folytonos függvény végtelen is lehet az alakzatban, akkor a végtelenné válás módjának bizonyos eseteiben a végtelenné válás vidékébe úgy választhatók meg a függvényhelyek az osztásrészek számára, és pedig igen általános rendelkezéssel, hogy a $\Sigma\Phi D\omega$ összeg ekkor is határozott véges értékbe convergál, a fölosztások és a többi függvény-helyek bármely megválasztásában ugyanabba. Erről is meggyőződést fogunk majd szerezni. Megjegyzendő azonban, hogy ezek csak elégséges föltételei annak, hogy az összeg a részekre osztás módjától és legalább általában a függvényhelyek megválasztásának a módjától is független határértékkel bírjon.

Minden ily esetben azt mondjuk a Φ függvényről, hogy van integralisa az alakzatban, és a határ-összeget az alakzatban képezett integralisának nevezzük. Jelölésére az összegezés eddigi jelét S jellel, vagy a közönséges integrálási jellel váltjuk fel:

$$\text{Lim}\Sigma\Phi D\omega \equiv S\Phi D\omega \equiv \int\Phi D\omega.$$

Néha czélszerű azt is föltüntetni a jelölésen, hogy mely geometriai alakzatra vonatkozik. Ezt úgy szoktuk tenni, hogy a geometriai alakzat jegyét az összegelési jel lábához írjuk index gyanánt:

$$\text{Lim}\Sigma_{(\omega)}\Phi D\omega \equiv S_{(\omega)}\Phi D\omega \equiv \int_{(\omega)}\Phi D\omega$$

vagy rövidebben

$$\text{Lim}\Sigma_{\omega}\Phi D\omega \equiv S_{\omega}\Phi D\omega \equiv \int_{\omega}\Phi D\omega.$$

Az (ω) alakzat egy része legyen (ω_1) . Ennek a határa általában átszeli a $(D\omega)$ osztás-részek egy sokaságát. Most az átszelt $(D\omega)$ részek helyett ezek szeleteit vegyük tekintetbe, mindegyiknek a nagyságát az illető egész $D\omega$ -nak a függvény-szorójával szorozva. Ebben az értelemben beszélünk az (ω_1) alakzat-részre tartozó összeg-részről, amelyet ω_1 indexes összegelési jellel jegyezzünk. Mihez képest, ha az (ω_1) , (ω_2) , . . . , (ω_n) alakzat-részek együtt épen az egész (ω) alakzatot képezik, és ha általánosan $(D\omega)$ -val jelöljük a szeleteket is:

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{\omega}} \Phi D\tilde{\omega} &= \sum_{\tilde{\omega}_1} \Phi D\tilde{\omega} + \sum_{\tilde{\omega}_2} \Phi D\tilde{\omega} + \dots + \sum_{\tilde{\omega}_n} \Phi D\tilde{\omega}, \\ \int_{\tilde{\omega}} \Phi D\tilde{\omega} &= \int_{\tilde{\omega}_1} \Phi D\tilde{\omega} + \int_{\tilde{\omega}_2} \Phi D\tilde{\omega} + \dots + \int_{\tilde{\omega}_n} \Phi D\tilde{\omega}.\end{aligned}$$

Amennyiben az alakzat különböző fajú részekből áll, vonalokból, fölületekből, térekből, közönségesen czélszerű a megfelelő integralis-részeket elkülönítve jegyezni. Ha tehát a geometriai alakzat vonalas részét (ζ), fölületi részét (σ), térfogati részét (τ) jelöli eképen:

$$\int_{\zeta} \Phi D\tilde{\omega} + \int_{\sigma} \Phi D\tilde{\omega} + \int_{\tau} \Phi D\tilde{\omega}.$$

ahol Φ a három különböző részben különböző jellegű valamint $D\tilde{\omega}$ is.

Az integralisba, vagyis a határ-összegbe tartozó ($D\tilde{\omega}$) alakzat-részeket az alakzat végtelen kis részeinek, vagy elemi részeinek nevezzük. Emellett egy vonal-elemen, fölület-elemen, tér-elemen nem csupán az alakzat egy végtelen kis részét értjük, de így nevezzük annak a nagyságát $D\tilde{\omega}$ -t is, végtelen kis hosszát, két dimensio szerint végtelen kis területét, három dimensio szerint végtelen kis térfogatát. Hogy mikor gondoljuk magát az alakzat-részt, mikor annak a nagyságát, mindig kiténik a fogalmazások értelméből. Vonal-elem jelölésére itt rendszerint ($D\zeta$) illetőleg $D\zeta$, fölület-elem jelölésére ($D\sigma$) illetőleg $D\sigma$, tér-elem jelölésére ($D\tau$) illetőleg $D\tau$ fog szolgálni és közös jegyül ($D\tilde{\omega}$) illetőleg $D\tilde{\omega}$, szükség esetén indexes megkülönböztetésekkel. Az indexeket a D jelző betűn vagy a főbetűn, vagy mindkettőn alkalmazzuk, szükség, vagy valamely czélszerűség szerint.

Mielőtt most az előbbieken foglalt három állítás igazolásához fognánk, vegyünk figyelembe egy általános tételt, amely föltétlenül megilleti a definiált összeg-kifejezést.

Az ($\tilde{\omega}$) alakzatban a Φ függvény legszélsőbb értékei Φ_1 és Φ_2 legyenek még pedig Φ_1 legyen a legalsó, Φ_2 a legfelső értékhatára. Az alakzat teljes mekkoróságát pedig $\tilde{\omega}$ jelölje, vagyis ez legyen az alakzatot tevő vonalak hossz-tartalmának, fölületek terület-tartalmának, térek köb-tartalmának az összes számértéke. Akkor a $\sum \Phi D\tilde{\omega}$ összeg értéke minden esetre abban az érték-tartományban van, amelyet $\Phi_1 \tilde{\omega}$ és $\Phi_2 \tilde{\omega}$ határol, mert, ha minden Φ érték helyett Φ_1 értéket írunk az összegben, úgy semmi esetre sem nagyobbítjuk, és ha minden Φ érték helyett Φ_2 értéket írunk benne, semmi esetre sem kisebbítjük. Így a szélső Φ értékektől, Φ_1 és Φ_2 -től határolt teljes értéktartományban bizonyosan létezik oly érték Φ_0 , hogy

$$\sum \Phi D\tilde{\omega} = \Phi_0 \tilde{\omega}.$$

Ezt a tételt közbülső érték tételének nevezzük.

XXIII. A folytonos függvény geometriai integrálisa.

Midőn folytonos a Φ függvény a geometriai alakzatban, vagyis az alakzatot alkotó vonalakban, fölületekben, térekben, akkor véges is abban mindenütt, tehát a közbülső érték tételéből folyólag a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összeg véges értékű marad, illetőleg véges értékbe convergál a fölosztás sűrűségének határtalan növelése mellett. Azonkívül határértéke független a részekre osztások módjának és a függvényhelyeknek a megválasztásától. Ugyanis, bármi kis számérték legyen p , létezik akkora pozitívus szám Dq , hogy, mihelyt minden osztás-rész számértéke kisebb, mint Dq , már bármely két összeg különbségének a számértéke kisebb, mint p . Ennek a belátása végett válasszunk tetszésre két összeget, természetesen mindegyiket ugyanarra a geometriai alakzatra terjesztve ki:

$$\begin{aligned}\Sigma\Phi'D'\tilde{\omega} &= \Sigma' \\ \Sigma\Phi''D''\tilde{\omega} &= \Sigma'',\end{aligned}$$

Egy harmadik összegben, u. m.

$$\Sigma\Phi D\tilde{\omega} = \Sigma,$$

amely ugyanarra az alakzatra terjed ki, a $(D\tilde{\omega})$ osztásrészek az előbbi-félék, $(D'\tilde{\omega})$ és $(D''\tilde{\omega})$, közös részei legyenek. Még pedig jelöljük

$$(D_1'\tilde{\omega}), (D_2'\tilde{\omega}), \dots$$

azokat a közös részeket, amelyek együtt a $(D'\tilde{\omega})$ részt képezik, és jelöljük

$$(D_1''\tilde{\omega}), (D_2''\tilde{\omega}), \dots$$

azokat a közös részeket, amelyek együtt a $(D''\tilde{\omega})$ részt képezik. Így:

$$\begin{aligned}\Sigma' &= \Sigma\Phi'(D_1'\tilde{\omega} + D_2'\tilde{\omega} + \dots) \\ \Sigma'' &= \Sigma\Phi''(D_1''\tilde{\omega} + D_2''\tilde{\omega} + \dots) \\ \Sigma &= \Sigma(\Phi_1'D_1'\tilde{\omega} + \Phi_2'D_2'\tilde{\omega} + \dots) \\ \Sigma &= \Sigma(\Phi_1''D_1''\tilde{\omega} + \Phi_2''D_2''\tilde{\omega} + \dots).\end{aligned}$$

Eszерint

$$\begin{aligned}\Sigma' - \Sigma &= \Sigma[(\Phi' - \Phi_1')D_1'\tilde{\omega} + (\Phi' - \Phi_2')D_2'\tilde{\omega} + \dots] \\ \Sigma'' - \Sigma &= \Sigma[(\Phi'' - \Phi_1'')D_1''\tilde{\omega} + (\Phi'' - \Phi_2'')D_2''\tilde{\omega} + \dots].\end{aligned}$$

Az alakzat teljes nagyságának a számértéke legyen $\tilde{\omega}$. Mivel a Φ függvény folytonos az alakzatban, így bármi kis számérték legyen p , létezik akkora pozitívus szám, Dq , hogy mihelyt minden $D'\tilde{\omega}$ és $D''\tilde{\omega}$ számértéke kisebb, mint Dq , már az itteni függvény-különbségek számértékekre kisebbek, mint $p : 2\tilde{\omega}$, és így

$$|\Sigma' - \Sigma| < \frac{1}{2}p, \quad |\Sigma'' - \Sigma| < \frac{1}{2}p.$$

Eszerint, ha ϵ' és ϵ'' számértéke kisebb az egységénél,

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\epsilon'}{2}p, \quad \Sigma'' - \Sigma = \frac{\epsilon''}{2}p.$$

Következésképpen

$$\Sigma'' - \Sigma' = \frac{\epsilon'' - \epsilon'}{2}p,$$

ámde

$$|\epsilon'' - \epsilon'| < 2.$$

Egyúttal tegyük itt azt az észrevételt az előbbi cikkben definiált

$$\int_{\tilde{\omega}} \Phi D\tilde{\omega} = \int_{\tilde{\omega}_1} \Phi D\tilde{\omega} + \int_{\tilde{\omega}_2} \Phi D\tilde{\omega} + \dots + \int_{\tilde{\omega}_n} \Phi D\tilde{\omega}$$

kifejezésre nézve, hogy az $(\tilde{\omega}_1)$ stb. alakzat-részek határán átszelt osztásrészecskék most mind beléjük tartozó Φ szorzóval vehetők számba, t. i. azért, mert a Φ függvény mindenütt folytonos az alakzatban, tehát az átszelt osztásrészecskékben is folytonos.

XXIV. A véges és általában folytonos függvény geometriai integrálisa.

Ha csak általában folytonos a Φ függvény a geometriai alakzatban (XV), de a folytonosság-szakadás helyein is mindenütt véges: akkor is véges és egyetlen határ érték felel meg a $\Sigma \Phi D\tilde{\omega}$ összegnek. Kiténik ez a következő megállapításból.

Legyen $(\tilde{\omega}_0)$ az $(\tilde{\omega})$ geometriai alakzat oly igen kis része, amely az összes különös helyeket magában foglalja, úgy, hogy az alakzat másik részében nem foglaltatnak különös helyek, u. m. folytonosság-szakadási pontok, vonalok, fölületek, e másik rész határain sem. Az alakzat e túlnyomólag nagyobb részét $(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0)$ jelentse.

Most az $(\tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre alkalmazzuk a közbülső érték tételét. Ebből folyólag lehet ez az alakzat-rész oly kicsi, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb és így az $(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre tartozó összeg-rész a teljes összegtől tetszés szerint adott kicsinél kisebbet különbözik.

Azomban bármilyen kicsiny legyen az $(\tilde{\omega}_0)$ alakzat-rész, hacsak a másik részszel határos pontjainak és az esetleg átszelt osztásrészecskék minden pontjának minden különös helytől való távolsága nagyobb, mint egy még oly kis adható távolság, akkor az $(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre tartozó összeg-résznek véges és egyetlen határ-érték felel meg, mert

ebben az alakzat-részben, és még az esetleg átszelt osztás-részekben is mindenütt folytonos a Φ függvény.

XXV. Az általában folytonos függvény geometriai integrálisa.

Ha a függvény végtelen is lehet a geometriai alakzatban, akkor némi tekintetben különösebb módon képezendő az összeg avégből, hogy legalább a végtelenné válás bizonyos föltételei alatt véges és egyetlen határérték feleljen meg neki.

A $(D\tilde{\omega})$ osztás részben lévő O ponthely a végtelenségnek hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől ρ távolságban legyen. Ugyancsak a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részben lévő O' ponthely a végtelenségnek σ hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől ρ' távolságban legyen. Már most oly hely legyen az O a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részben, hogy bármely más hely is az O' ebben az osztás-részben, a ρ távolság nem kisebb, mint a ρ' távolság. Az ilyen O helyet a $(D\tilde{\omega})$ osztás-rész fő-pontjának nevezzük el.

Azt a távolságot, amelyben a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részbe tartozó függvényhely van a végtelenségnek σ hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől, jelölje r .

Azzal a követeléssel korlátozzuk a függvény-helyek kitűzését, hogy a fölosztás minden sűrűségének adható legyen akkora határozott és véges számérték, amelynél a $\rho : r$ hányados minden osztás-részben kisebb. A függvényhelyek ily megválasztását arányos megválasztásnak nevezzük el.

Könnyű fölismerni, hogy a függvényhelyek arányos megválasztásának a követelése azokra az osztás-részekre nézve nem ró ki semmi megszorítást, amelyeknek minden pontja kívül esik oly határozott sugarú gömbökön, amely gömbök centrumai a végtelenné válás ponthelyei, bármi kicsinyek legyenek is különben a gömbsugarak. Mindezekben az osztás-részekben egészen tetszésre tűzhető ki a függvény-hely, mert ezek számára csakis arányos megválasztása lehetséges. Bármi kis adható terjedelme legyen az alakzat oly részének, hogy a másik rész nem tartalmaz végtelenségi pontokat, vonalokat, fölületeket a határán sem, ebben a másik, túlnyomó részben egészen szabad a függvény-helyek megválasztása is. A $(D\tilde{\omega})$ osztás-részek megválasztása mindenütt egészen tetszés szerinti.

A függvény-helyek arányos megválasztásában az összeg a fölosztás sűrűségének végtelen növekedésével a következő föltételek alatt minden esetre véges és egyetlen értékbe convergál.

1. Összegelési vonalon egy pontban, vagy egyes pontokban első-nél alacsonyabb rendű végtelen a függvény.

2. Összegelési fölületen egy pontban vagy egyes pontokban másodiknál alacsonyabb rendű végtelen.

3. Összegelési térben egy pontban vagy egyes pontokban harmadiknál alacsonyabb rendű végtelen.

4. Összegelési fölületen egy vonalon vagy egyes vonalokon elsőnél alacsonyabb rendű végtelen.

5. Összegelési térben egy vonalon vagy egyes vonalokon másodiknál alacsonyabb rendű végtelen.

6. Összegelési térben egy fölületen vagy egyes fölületeken elsőnél alacsonyabb rendű végtelen.

Ezeknek az állításoknak a bebizonyítására szükséges és elégséges kimutatni, hogy egy igen kis alakzat-rész, amely a végtelenségi helyeket magában foglalja, mint az előbbi czikk tárgyalásában is a különös helyeket az $(\bar{\omega}_0)$ rész, lehet oly kicsi, hogy, mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész határ-értéke tetszésre adott kicsinél kisebb. Ugyanis e föltétel alatt épen úgy következik, mint az előbbi czikk tárgyalásában, hogy véges és egyetlen határ-érték felel meg a teljes összegnek. Hogy pedig ez a föltétel az elősorolt esetekben tényleg teljesül, annak a fölismerése egy algebrai határ-egyenletre alapítható, nevezetesen a következőre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^\mu + \left(\frac{1}{3}\right)^\mu + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{n^{1-\mu}} = \frac{1}{1-\mu}, \quad (0 < \mu < 1).$$

Ennek az egyenletnek a belátása végett gondoljunk arra, hogy ha $k > 1$, úgy

$$k^{1-\mu} - (k-1)^{1-\mu} = \frac{1-\mu}{k^\mu} \left(1 + \frac{\mu}{2} \frac{1}{k} + \frac{\mu}{2} \frac{\mu+1}{3} \frac{1}{k^2} + \dots \right),$$

továbbá

$$(k+1)^{1-\mu} - k^{1-\mu}$$

$$= \frac{1-\mu}{k^\mu} \left[1 - \frac{\mu}{2} \left(k - \frac{1+\mu}{3} \right) \frac{1}{k^2} - \frac{\mu}{2} \frac{1+\mu}{3} \frac{2+\mu}{4} \left(k - \frac{3+\mu}{5} \right) \frac{1}{k^4} - \dots \right],$$

tehát a μ mennyiség kiszabott értéktartományában

$$k^{1-\mu} - (k-1)^{1-\mu} > \frac{1-\mu}{k^\mu} > (k+1)^{1-\mu} - k^{1-\mu}.$$

Ebből folyólag, miután k helyett rendre a 2, 3, .. n sor-számokat iktattuk,

$$n^{1-\mu} - 1 > (1-\mu) \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k}\right)^\mu > (n+1)^{1-\mu} - 2^{1-\mu}.$$

Innen pedig kiviláglik már, hogy a fönt jegyzett határ-egyenlet helyes.

Egyelőre hat specialis eset tárgyalására szorítkozunk. Ezek elintézése után könnyű szerrel kideríthető lesz majd, hogy a kimondott tételek a maguk általánosságában is helyesek.

1. Végtelenség összegelési egyenes határpontjában.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(s)} |\Phi| Ds \equiv P_s,$$

ahol (s) az egyenes oly részét jelenti, amely a végtelenség helyében kezdődik.

Ha a végtelenség rend-száma μ , vagy kisebb mint μ , írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu}$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének a kölcsönös távolsága. Már most

$$P_s = \sum_{(s)} \psi \frac{Ds}{r^\mu},$$

Minden osztás-résznek a végtelenség helyétől legmesszebb eső pontja vagyis főpontja a végpontja. A (Ds) osztás-rész végpontja a végtelenség helyétől ρ távolságban legyen, és vegyük számba, hogy

$$P_s = \sum_{(s)} \psi \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \frac{Ds}{\rho^\mu}$$

A fölöstások sűrűségének határtalan növelésében is: az összeg minden tagjában véges marad ψ és $\rho : r$. Az első azért, mert μ akkora, vagy nagyobb, mint a végtelenség rendszáma, a második azért, mert a függvény-helyek arányosan vannak megválasztva. Jelentsen K nagyobb véges értéket, mint amekkorát a

$$\psi \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu$$

kifejezés a vonalon egyáltalán fölvehet. Úgy

$$P_s < K \sum_{(s)} \frac{Ds}{\rho^\mu}$$

és egyszersmind a fölosztás sűrűségének végtelen növelésében

$$\text{Lim } P_s < K \text{ Lim } \sum_{(s)} \frac{Ds}{\rho^\mu}$$

Most az itt előforduló összeget összehasonlítjuk egy más összeggel,

$$\sum_{(s)} \frac{D's}{s^\mu},$$

amelyet a következőleg képezünk. Az (s) egyenes-részt $D's$ egyenlő hosszúságú részekre osztjuk. De a $D's$ hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a végtelenség helyében kezdődő (Ds) osztás-rész hosszúsága. Az s vonalhosszat az első $(D's')$ osztás-részhez ennek a végső pontjáig, a többihez azok kezdő pontjáig számítjuk, úgy, hogy s értékei rendre

$$D's, D's, 2D's, 3D's, \dots, nD's$$

ha t. i. a teljes vonal-hossz

$$(n+1)D's = s_0$$

Az ekként meghatározott összeg nagyobb, mint föntebb a K mellett lévő mert a (Ds) és $(D's)$ -féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb, mint a ρ . Így

$$P_s < K \sum_{(s)} \frac{D's}{s^\mu}$$

Az előirt módon részletesen kifejtván az összeget, azután $D's$ helyett $s : (n+1)$ írván, egyenlőtlenségünk ekép jelentkezik :

$$P_s < K \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^\mu + \left(\frac{1}{3}\right)^\mu + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{1-\mu}} \cdot s_0^{1-\mu}$$

Ha tehát a μ az egységénél kisebb positivus szám, úgy határ-egyenletünk szerint

$$(P_s)_{n \rightarrow \infty} < \frac{K}{1-\mu} s_0^{1-\mu}$$

Eként, ha a végtelenség rendszáma kisebb mint 1, úgy s_0 megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész határ-értéke tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

2. Végtelenség összegelési sík határ-pontjában.

A függvényhelyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\sigma)} |\Phi| D\sigma \equiv P_{\sigma},$$

ahol (σ) az összegelési síknak és oly körlapnak (σ') a közös része, amelynek a centruma a végtelenség helye.

Ha a végtelenség rendszáma μ , vagy kisebb mint μ , írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^{\mu}},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének kölesönös távolsága. A végtelenség helye és a $(D\sigma)$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Epúgy következnek, mint az 1. alatt, hogy K -nak hasonlólag fölvett jelentményében,

$$P_{\sigma} < K \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^{\mu}},$$

$$\text{Lim } P_{\sigma} < K \text{ Lim } \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^{\mu}}.$$

Az itt előforduló összeget más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\sigma')} \frac{D'\sigma}{s^{\mu}},$$

amely az egész körlapra (σ') vonatkozik, és a következő módon van megalkotva. A végtelenség helye, mint centrum, körül köröket írunk

$$Ds, 2Ds, \dots, (n+1)Ds$$

hosszúságú sugarakkal. És pedig Ds hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ , és hogy az $(n+1)Ds$ sugár a (σ') körlap sugara legyen,

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a körök közös centrumából, vagyis a végtelenség helyéből igen sűrűn sugarokat húzunk ki, amelyek rendre egyenlő $D\theta$ szögívek alatt következnek egymásután. E sugarak száma N legyen, úgy, hogy

$$ND\theta = 2\pi.$$

A körök és sugarak igen kis részekre osztják a (σ') körlapot, s ilyen rész területét jelentse $D'\sigma$ az összegben. A centrum és az első kör közt foglalt $(D'\sigma)$ osztás részekhez legyen $s = Ds$; az első és második kör közt foglaltakhoz szintén $s = Ds$ legyen; a második és harma-

dik kör közt lévőkhöz $s=2Ds$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s=3Ds$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint fönt a K mellett lévő, mert a $(D\sigma)$ és $(D'\sigma)$ -féle osztásrészek közös darabjaihoz s kisebb mint a ρ , és mert σ' nem kisebb, sőt nagyobb, mint σ . Így

$$P_{\sigma} < K \Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma') s^{\mu}}$$

Azomban ha (σ') -nak két szomszédos sugár közt foglalt része σ'' , úgy

$$\Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma) s^{\mu}} = N \Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma'') s^{\mu}},$$

tehát

$$P_{\sigma} < KN \Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma'') s^{\mu}}$$

A (σ'') körszelvényben lévő $D's$ területek rendre ezek:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{2n+1}{2} \right) (Ds)^2 D\theta,$$

az s értékei pedig az előírás szerint a megfelelő sorrendben

$$(1, 1, 2, 3, \dots, n)Ds.$$

Következőleg

$$P_{\sigma} < 2\pi K \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\mu} + \dots + \frac{2n+1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}}{(n+1)^{2-\mu}} s_0^{2-\mu}$$

Már most tegyük föl, hogy a végtelenség rendszáma kisebb, mint 2. Minthogy a μ csak azt a kirovást viseli, hogy ne legyen kisebb, mint a végtelenség rendszáma, így föltehetjük, hogy $1 < \mu < 2$. Ebben a jogos föltevésben írjuk $\mu = 1 + \nu$, ahol $0 < \nu < 1$. Kapjuk:

$$P_{\sigma} < 2\pi K \frac{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \left(\frac{1}{k}\right)^{\nu}}{(n+1)^{1-\nu}} s_0^{2-\mu}.$$

Az n szám határtalan növesztésével az itteni Σ összeg második fele convergens sorrá válik, következőleg határ-egyenletünk értelmében

$$\text{Lim } P_{\sigma} < \frac{2\pi K}{2^{1-\mu}} s_0^{2-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma kettőnél kisebb, úgy s_0 és vele együtt a (σ) lap-rész megválasztható oly kicsinek, hogy, mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszésre adott kicsinél kisebb.

3. Végtelenség összegelési tér határ-pontjában. A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)} |\Phi| D\tau \equiv P_{\tau}$$

ahol (τ) az összegelés terének és oly gömbnek (τ') a közös része amelynnek a centruma a végtelenség helye.

Ha a végtelenség rendszáma μ , vagy kisebb mint μ , írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^{\mu}},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének a kölcsönös távolsága. A végtelenség helye és a $D\tau$ osztásrész főpontja közt a távolság ρ legyen. Éppúgy következik, mint 1. alatt, hogy K -nak hasonló módon fölvetett jelentményében

$$P_{\tau} < K \sum_{(\tau)} \frac{D\tau}{\rho^{\mu}},$$

$$\text{Lim}_{\tau} P_{\tau} < K \text{Lim}_{(\tau)} \sum \frac{D\tau}{\rho^{\mu}}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\tau)} \frac{D'\tau}{s^{\mu}},$$

amely az egész gömbre (τ') vonatkozik s a következő módon van megalkotva. A végtelenség helye, mint centrum, körül gömb-fölületeket írunk

$$Ds, 2Ds, \dots, (n+1)Ds$$

hosszuságú sugarakkal. És pedig a Ds hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ , és, hogy az $(n+1)Ds$ sugár a (τ') gömb sugara legyen,

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a gömb-fölületek közös centrumából, vagyis a végtelenség helyéből, mint csúsból, igen vékony gúlákat képezünk a (τ') gömbben, amelyek e gömb fölületén egyenlő $s^2 D\sigma$ területeket határolnak. E gúlák száma legyen N , úgy, hogy

$$ND\sigma = 4\pi.$$

A gömb-fölületek és gúlák igen kis részekre osztják a (τ') gömb-tért, s ilyen rész térfogatát jelentse $D'\tau$ az összegben. A centrum és az első gömbfölvület közt foglalt ($D'\tau$) osztás-részekhez $s=Ds$ legyen; az első és második gömbfölvület közt foglaltakhoz szintén $s=Ds$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s=2Ds$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s=3Ds$; st.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint a K mellett lévő, mert a ($D\tau$) és ($D'\tau$)-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb, mint a ρ és mert τ' nem kisebb, sőt nagyobb, mint τ . Így

$$P_{\tau} < K \Sigma \frac{D'\tau}{(\tau') s^{\mu}}$$

Azonban, ha (τ')-nak egy gúla-része (τ''), úgy

$$\Sigma \frac{D'\tau}{(\tau) s^{\mu}} = N \Sigma \frac{D'\tau}{(\tau'') s^{\mu}}$$

tehát

$$P_{\tau} < KN \Sigma \frac{D'\tau}{(\tau'') s^{\mu}}$$

A (τ'') gúlában lévő $D'\tau$ térfogatok rendre ezek:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}, \dots, \frac{3n^2+3n+1}{3} \right) (Ds)^3 D\sigma$$

az s értékei pedig az előírás szerint sorban:

$$(1, 1, 2, 3, \dots, n)Ds.$$

Következőleg

$$P_{\tau} < 4\pi K \frac{\frac{1}{3} + \frac{7}{3} + \frac{19}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} + \frac{37}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{\mu} + \dots + \frac{3n^2+3n+1}{3} \left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}}{(n+1)^{3-\mu}} s_0^{3-\mu}.$$

Már most tegyük föl, hogy a végtelenség rendszáma kisebb, mint 3. Minthogy μ csak azt a kirovást viseli, hogy ne legyen kisebb, mint a végtelenség rendszáma, így föltehetjük, hogy $2 < \mu < 3$. Ebben a jóság föltevésben írjuk $\mu = 2 + \nu$, ahol $0 < \nu < 1$. Kapjuk:

$$P_{\tau} < 4\pi K \frac{\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{3k^2}\right) \left(\frac{1}{k}\right)^{\nu}}{(n+1)^{1-\nu}} s_0^{3-\mu}.$$

Az n szám határtalan növeztésével az itteni Σ összeg második és

harmadik része convergens sorrá válik, következőleg határegyenletünk értelmében

$$\text{Lim} P_{\tau} < \frac{4\pi K}{\beta - \mu} s_0^{\beta - \mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma háromnál kisebb, úgy s_0 és vele együtt a (τ) gömb-rész megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

4. Végtelenség egyenes vonalon, összegelési sík határán.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\sigma)} |\Phi| D\sigma \equiv P_{\sigma}$$

ahol (σ) az összegelési síknak s oly derékszögű négyszögnek (σ') a közös részét jelenti, amelynek egyik oldala a végtelenség vonala. Az összegelési lap többi részét nem szükséges tekintetbe venni, mert már csak végtelenségi pontokat tartalmazhat, t. i. a különös vonal végpontjait, és, mert fölteszszük, hogy a végtelenné válás rendszáma kisebb mint 2, sőt kisebb mint 1.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ , a végtelenség vonalán, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^{\mu}},$$

ahol r a függvényhelynek és a végtelenség egyenes vonalának a kölcsönös távolsága. E vonal és a $(D\sigma)$ osztás-rész főpontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1. alatt, hogy K -nak hasonló módon fölvetett jelentményében

$$P_{\sigma} < K \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^{\mu}},$$

$$\text{Lim} P_{\sigma} < K \text{Lim} \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^{\mu}}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\sigma')} \frac{D\sigma'}{s^{\mu}},$$

amely az egész derékszögű négyszög területére vonatkozik, s a következő módon van megalkotva. A végtelenség egyenes vonalával párhuzamosakat vonunk a (σ') lapon, rendre

$Ds, 2Ds, 3Ds, \dots, (n+1)Ds$

távolságokban. És pedig a Ds távolságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen mint a legkisebb ρ , és, hogy $(n+1)Ds$ a derékszögű (σ') lap szélessége legyen

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a párhuzamos egyeneseken köröztül igen sűrűen merőlegeseket vonunk, amelyek rendre $D\zeta$ egyenlő távolságokban sorakoznak egymásután, N számú $D\zeta$ hosszúságú részre osztván a párhuzamos egyeneseket, mihez képest, ha a végtelenség vonalának a hossza ζ , úgy

$$ND\zeta = \zeta.$$

A párhuzamos és a merőleges egyenesek igen kis részekre osztják a (σ') négyszöget, s ilyen rész területét jelentse $D'\sigma$ az összegben. A végtelenség vonalala és az első párhuzamos közt foglalt ($D'\sigma$) osztásrészekhez $s = Ds$ legyen; az első és második párhuzamos közt foglaltakhoz szintén $s = Ds$; a második és harmadik párhuzamos közt lévőkhöz $s = 2Ds$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3Ds$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb, mint fönt a K mellett lévő, mert a ($D\sigma$) és ($D'\sigma$)-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb mint a ρ , és mert σ' semmi esetre sem kisebb mint σ . Eszerint

$$P_\sigma < K \Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma') s^\mu}$$

Azonban, ha (σ')-nak oly része, amely két szomszédos merőleges közt van (σ''), úgy

$$\Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma'') s^\mu} = N \Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma'') s^\mu},$$

tehát

$$P_\sigma < KN \Sigma \frac{D'\sigma}{(\sigma'') s^\mu}.$$

A (σ'') szalagban lévő $D'\sigma$ területek, valamennyi $= D\zeta \cdot Ds$, míg az s értékei rendre

$$(1, 1, 2, 3, \dots, n)Ds.$$

Következőleg

$$P_\sigma < K\zeta \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^\mu + \left(\frac{1}{3}\right)^\mu + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{1-\mu}} s_0^{1-\mu}.$$

Ha már most $0 < \mu < 1$, úgy határ egyenletünk szerint

$$\text{Lim } P_{\sigma} < \frac{K_{\zeta}}{1-\mu} s_0^{1-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma az egységnél mindenütt kisebb az egyenes vonalon, úgy s_0 és vele együtt a (σ) laprész megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összegrész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

5.) Végtelenség egyenes vonalon, összegelési tér határán.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)} |\Phi| D\tau \equiv P_{\tau}$$

ahol (τ) az összegelési térnek és oly egyenes körhengernek (τ') a közös része, amelynek tengelye a végtelenség vonala. Az összegelési tér többi részét fölösleges tekintetbe venni mert már csak végtelenségi pontokat tartalmazhat, t. i. a végtelenség vonalának a vég-pontjait, és, mert a végtelenség rendszámáról fölteszszük, hogy kisebb mint 3, sőt, kisebb mint 2.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség vonalán írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^{\mu}},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség egyenes vonalának a kölcsönös távolsága. E vonal és a $D\tau$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Éppúgy következik, mint 1.) alatt, hogy K -nak hasonló módon fölvetett jelentményében

$$P_{\tau} < K \sum_{(\tau)} \frac{D\tau}{\rho^{\mu}},$$

$$\text{Lim } P_{\tau} < K \text{Lim} \sum_{(\tau)} \frac{D\tau}{\rho^{\mu}}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze

$$\sum_{(\tau')} \frac{D\tau'}{s^{\mu}},$$

amely az egész kör-henger tér-tartalmára vonatkozik és a következő módon van megalkotva. A végtelenség vonala, mint tengely, körül (τ') -ban körhengereket írunk

$$Ds, 2Ds, 3Ds, \dots, (n+1)Ds$$

hosszúságú sugarakkal. És pedig a Ds hosszúságát úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ , és, hogy $(n+1)Ds$ akkora legyen, mint a $(D\tau')$ kör-henger sugara

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a tengelyen köröszttől igen sűrűen, arra merőleges síkokat fektetünk, amelyek rendre egyenlő $D\zeta$ távolságban sorakoznak egymásután, N számú $D\zeta$ hosszúságú részekre osztván a tengelyt, mihez képest, ha a tengely belső hossza ζ , úgy

$$ND\zeta = \zeta.$$

Végül, még a tengelyre igen sűrűen síkokat fektetünk, amelyek rendre egyenlő $D\theta$ szögívek alatt hajlanak egymáshoz, úgy hogy $D\theta$ egy teljes körív H -ad részét képezi, tehát

$$HD\theta = 2\pi.$$

A henger-fölületek, merőleges síkok és szögellő síkok igen kis részekre osztják a (τ') henger-tért, s ilyen rész térfogatát jelentse $D'\tau$ az összegben. A tengely és az első henger-fölület közt foglalt $(D'\tau)$ osztás-részekhez $s = Ds$ legyen; az első és második henger-felület közt foglalt osztás-részekhez szintén $s = Ds$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s = 2Ds$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3Ds$; sít.

Az így meghatározott összeg nagyobb, mint fönt a K mellett lévő, mert a $(D\tau)$ és $(D'\tau)$ osztás részek közös darabjaihoz s kisebb mint ρ , és mert τ' nem kisebb sőt nagyobb, mint τ . Következésképp

$$P_{\tau} < K \Sigma \frac{D'\tau}{(\tau') s^{11}}.$$

Azonban, ha (τ') -nak oly része, amely két szomszédos merőleges sík és két szomszédos szögellő sík közt foglaltatik (τ'') , úgy

$$\Sigma \frac{D'\tau''}{(\tau'') s^{11}} N H \Sigma \frac{D'\tau''}{(\tau'') s^{11}},$$

tehát

$$P_{\tau} < K N H \Sigma \frac{D'\tau''}{(\tau'') s^{11}}.$$

A (τ'') henger-szelvényben lévő $D'\tau''$ térfogatok rendre

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{2n+1}{2} \right) (Ds)^2, D\zeta, D\theta$$

míg a megfelelő s értékek rendre

$$(1, 1, 2, 3, \dots, n)Ds,$$

következően

$$P_{\tau} < 2\pi K_{\zeta} \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\mu} + \dots + \frac{2n+1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}}{(n+1)^{2-\mu}} s_0^{2-\mu}.$$

Ha már most a végtelenség rendszáma mindenütt kisebb mint 2 az egyenes vonalon, írhatjuk $1 < \mu < 2$, és ugyanazon a módon, amelyet 2.) alatt alkalmaztunk, azt találjuk, hogy

$$\lim_{\tau} P_{\tau} < \frac{2\pi K_{\zeta}}{2-\mu} s_0^{2-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma kettőnél mindenütt kisebb az egyenes vonalon, úgy s_0 és vele együtt a (τ) henger-rész megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

6. Végtelenség sík-lapon összegelési tér határán.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\Sigma_{(\tau)} |\Phi| D\tau = P_{\tau},$$

ahol (τ) az összegelési térnek és oly (τ') egyenes hasábnak a közös része, amelynek egyik véglapja a végtelenség fölüllete. Az összegelési tér többi részét az előbbi 5. és a következő 7. alatti megállapítások szerint fölösleges tekintetbe venni, mert az már csak végtelenségi vonalat tartalmazhat, t. i. a végtelenségi lap kerületén, és mert fölteszszük, hogy a végtelenné válás rendszáma mindenütt kisebb mint 2, sőt kisebb mint 1.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség fölülletén, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^{\mu}},$$

ahol r a függvény helynek a végtelenség sík-lapjától való távolsága. E lap és a $D\tau$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Éptígy következik, mint 1. alatt, hogy K -nak hasonló módon fölvevett jelentményében

$$P_{\tau} < K \Sigma_{(\tau)} \frac{D\tau}{\rho^{\mu}},$$

$$\text{Lim } P_{\tau} < K \text{ Lim } \sum_{(\tau)} \frac{D\tau}{\rho^{\mu}}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\tau')} \frac{D'\tau}{s^{\mu}},$$

amely az egész egyenes hasábra (τ') vonatkozik s a következő módon van megalkotva. A végtelenség sík-lapjával párhuzamos síkokat képezünk attól

$$Ds, 2Ds, 3Ds, \dots, (n+1)Ds$$

távolságban. Éspedig a Ds távolságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen mint a legkisebb ρ , és hogy $(n+1)Ds$ akkora legyen, mint a hasáb magassága

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a párhuzamos síkokon köröszűl reájuk merőlegesen igen vékony egyenlő átmetszetű hasábokat fektetünk, amelyek N számú és $D\sigma$ területű részekre osztják azokat úgy, hogy a végtelenség lapjának a területe

$$ND\tau = \sigma.$$

A síkok és a vékony hasábok igen kis részekre osztják a (τ') hasáb-tért, s ilyen rész térfogatát jelentse $D'\tau$ az összegben. A végtelenség lapja és az első párhuzamos lap közt foglalt ($D'\tau$) osztás-részekhez $s = Ds$ legyen; az első és második párhuzamos lap közt foglalt osztás-részekhez szintén $s = Ds$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s = 2Ds$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3Ds$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint fentebb a K mellett lévő, mert a ($D\tau$) és ($D'\tau$)-féle osztás-részek közös darabjaihoz tartozó s kisebb mint ρ , és mert τ' semmi esetre sem kisebb mint τ . Eként

$$P_{\tau} < K \sum_{(\tau')} \frac{D'\tau}{s^{\mu}}.$$

Azonban, ha (τ')-nak egy vékony hasábban foglalt része (τ''), úgy

$$\sum_{(\tau')} \frac{D'\tau}{s^{\mu}} = N \sum_{(\tau'')} \frac{D'\tau}{s^{\mu}},$$

tehát

$$P_{\tau} < KN \sum_{(\tau'')} \frac{D'\tau}{s^{\mu}}.$$

A (τ') vékony hasámban lévő valamennyi $D'\tau$ térfogatok $= Ds \cdot D\sigma$, az s értékek pedig rendre

$$(1, 1, 2, 3, \dots, n)Ds.$$

Következésképpen

$$P_{\tau} < K\sigma \frac{1 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\mu} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}}{(n+1)^{1-\mu}} \cdot s_0^{1-\mu}.$$

Ha már most $0 < \mu < 1$, úgy határ-egyenletünk értelmében

$$\text{Lim } P_{\tau} < \frac{K\sigma}{1-\mu} \cdot s_0^{1-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma az egységénél mindenütt kisebb a sík-lapon, úgy s_0 és vele együtt a (τ) hasáb-rész megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

7.) Az általánosság.

Véges kiterjedésű geometriai alakzatban a Φ függvény egyes pontokban, vonalakon, fölületeken végtelen legyen oly rendszámok szerint, aminőket a hat általános propositio föltételez.

Válaszszunk ki a geometriai alakzataból oly részeket, amelyek mindegyike vagy egy különös pontot, vagy egy különös vonalat, vagy különös vonal egy darabját, vagy egy különös fölületet, vagy különös fölület egy darabját tartalmazza a határán, mint végtelenné válás helyeit. A geometriai alakzat többi részében sehoh se legyen végtelen a függvény, a határán sem, minek következtében ezzel a többi részszel nem kell törődnünk. Megjegyzendő, hogy az alakzat-részek illetén kiválasztása még akkor is lehetséges, midőn különös vonalak, fölületek metszik egymást.

A kiválasztott részek vagy vonalak, vagy fölületek, vagy térek. Ezeket egyenkint leképezzük; a vonalakat egyenesekre, a fölületeket síkokra, a tereket más terekre. Úgy képezzük le, hogy a.) képök határa határuk képe legyen, s különös vonal képe egyenes, különös fölület képe sík legyen; b.) ha egy osztás-rész $(D\tilde{\omega})$, és ennek a képe $(D\tilde{\omega}_1)$, úgy a $D\tilde{\omega} : D\tilde{\omega}_1$ hányados ne lehessen végtelen nagy; c.) ha $(D\tilde{\omega})$ főpontjának távolsága a különös ponttól vagy vonaltól vagy fölülettől, illetőleg utóbbiak esetében legközelebbi pontjuktól ρ , és ha $(D\tilde{\omega}_1)$ -ben a különös pont képétől vagy különös vonal egyenes-képétől vagy különös felület sík-képétől legmesszebb fekvő pont távolsága ρ_1 , úgy $\rho_1 : \rho$ ne lehessen végtelen. Mindenesetre megválaszthatók olyképen az egyes alakzat-részek, hogy ezek a követelések is teljesíthetők legyenek. Kitűnik ez már abból, hogy az alakzataból kiválasztott részek lehetnek

oly kicsinyek, mikép pontjaikat tetszésre adott kicsinél kisebb utakon mozdíthatjuk el úgy, hogy ez által a leképezések az a.) értelemben teljesüljenek, amidőn aztán egyszersmind a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részek az $\tilde{\omega}$ $(D\tilde{\omega}_1)$ képeiktől, a ρ távolságok pedig a ρ_1 távolságoktól kis mértékben különböznek.

Már most legyen a függvényhelyek valamely arányos megválasztásában a $\Sigma|\Phi|D\tilde{\omega}$ oly része, (XXII), amely egy kiválasztott alakzat-részre terjed ki

$$\Sigma_{(\tilde{\omega})}|\Phi|D\tilde{\omega} \equiv P_{\tilde{\omega}}.$$

Ha a végtelenné válás rendszáma az $(\tilde{\omega})$ határán lévő különös pontban vagy vonalon vagy fölületen nem nagyobb, mint μ , úgy r -rel jelölvén az ily hely s a függvényhely közt lévő távolságot, $r^\mu|\Phi|$ mindenütt véges marad az $(\tilde{\omega})$ -ban, a fölosztások sűrűségének határtalan növelése mellett is. De véges marad $\rho:r$ is, a függvényhelyek arányos megválasztása miatt, és a föltevés szerint $\rho_1:\rho$ is. Így véges marad

$$\frac{\rho}{r} \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_1}{r},$$

tehát véges marad

$$\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^\mu r^\mu |\Phi| = \rho_1^\mu |\Phi|.$$

Mivel pedig a föltevés szerint $D\tilde{\omega}:D\tilde{\omega}_1$ hányados sem lehet végtelen nagy, így ebben az identitásban:

$$|\Phi|D\tilde{\omega} \equiv \frac{D\tilde{\omega}}{D\tilde{\omega}_1} \rho_1^\mu |\Phi| \cdot \frac{D\tilde{\omega}}{\rho_1^\mu}$$

a jobb oldalban foglalt utolsó tört-alak szorzója mindig véges. Következésképp, ha K_1 nagyobb véges érték, mint amekkorát ez a szorzó egyáltalán fölvehet,

$$P_{\tilde{\omega}} < K_1 \Sigma_{(\tilde{\omega}_1)} \frac{D\tilde{\omega}_1}{\rho_1^\mu}.$$

Ugyanolyan kifejezés ez, amilyen a hat előbbi tárgyalás alapját képezte . . .

Végre az alkalmazások érdekében jegyezzük meg ezt az észrevételt: soha és semmiféle czélra sem szükséges oly fölület-elemek és tér-elemek számba vétele, amelyeknek beszögelléseik vagy határtalan kicsinyítésükkkel el nem símuló behajlásaik vannak.

XXVI. Tér-integralisok reductiója.

1. Ha véges kiterjedésű T térben a hely Φ függvénye folytonos és i irányban deriválható függvény, és deriváltja is folytonos, akkor ez a tér-integralis:

$$I \equiv \int_T \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau$$

fölületi integralisra reducálható, amely a T tér határ-fölületére S -re vonatkozik. Még pedig ha a fölület $D\sigma$ elemének befelé mutató normalisa n irányú, úgy

$$I = - \int_S \Phi \cos(i, n) D\sigma,$$

ahol (i, n) az i és n irány szöge.

Ennek a fölismerése végett vegyünk föl a T térben egy végtelen vékony hasábot, (DT) , olyant, amely párhuzamos az i iránnyal és az S két elemében, $(D_1\sigma)$, $(D_2\sigma)$ végződik, amelyek mindegyikéhez egyetlen befelé mutató normalis irány n_1 és n_2 tartozik. A tér-integralisnak azt a végtelen kis részét, amely erre a hasábra szorítkozik, jelölje DI :

$$DI \equiv \int_{DT} \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau.$$

Ilyen integralisok összege képezi az egész I integralist.

Most a $(D\tau)$ tér-elemeket úgy választjuk meg, hogy a (DT) -féle hasábok merőleges átmetszéseiből származó teljes átmetszeti hasáb-elemek legyenek. Ha egy ily hasáb-elem hossza $D\lambda$, s a hasáb-metszet területe $D\sigma_0$, úgy $D\tau = D\sigma_0 D\lambda$, és

$$DI = D\sigma_0 \int_{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\lambda,$$

ahol a λ index a hasáb egy oldal-vonalát jelenti. Azonban, ha a $(D\lambda)$ vonal-elemnek, mint i irányú vectornak, a végéhez és elejéhez tartozó Φ -érték különbsége $D\Phi$, úgy Φ -nek az i irányú deriváltja (XVII) nem más, mint $D\Phi : D\lambda$, tehát

$$DI = D\sigma_0 \int_{\lambda} D\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1) D\sigma_0,$$

ahol Φ_2 a (λ) vonalnak, mint i irányú vectornak, a végéhez, Φ_1 az elejéhez tartozó érték.

Mínthogy

$$D\sigma_0 = \cos(i, n_1)D_1\sigma = -\cos(i, n_2)D_2\sigma,$$

így egyszersmind

$$DI = -\Phi_1 \cos(i, n_1)D_1\sigma - \Phi_2 \cos(i, n_2)D_2\sigma.$$

Az ilyen kifejezések összegeléséből

$$I = -\int_S \Phi \cos(i, n) D\sigma,$$

azaz

$$\int_{T'} \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = -\int_S \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

Igaz, különös módon választottuk meg a tér-elemeket és fölület-elemeket. Mivel azonban tetszés szerinti más választásban is mindegyik integralis ugyanazzal az értékkel bír, így általánosan érvényes ez az egyenlet, ha Φ folytonos és az i irányban deriválható függvény, és deriváltja is folytonos T -ben.

2. Akkor is áll ez a tétel, ha egyes pontokban nem folytonos a Φ függvény és deriváltja, de vagy véges, vagy a függvény végtelenségi rendszáma 2-nél, deriváltjéé 3-nál kisebb.

Ennek a fölismerése végett írjunk egymást nem metsző gömb-fölületeket igen kis ρ sugárral a különös pontok, mint centrumok, körül. Belső pontok körül teljes gömbfölvületeket, a határon lévők körül a határ fölületig terjedőket. Az utóbbi gömbfölvületek a T tér határ fölületéből bizonyos részeket metszenek ki. A határ-fölvület többi részét jelölje S' és az összes gömbfölvületeket σ jelölje. Végre a T térnek azt a részét, amely az S' fölület s az összes gömbfölvületek közt van, jelölje T' .

A T' tér nem tartalmazván különös helyet, erre vonatkozólag fölírhatjuk a reductió's egyenletet:

$$\int_{T'} \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S'} \Phi \cos(i, n) D\sigma - \int_{\sigma} \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

A három integralist jelölje röviden $I_{T'}$, $I_{S'}$, I_{σ} . Az előbbi cikik értelmében a ρ lehet oly kicsiny, hogy mihelyt még kisebb, már $I_{T'}$ és $I_{S'}$ az egész T -re és egész S -re tartozó integralistól tetszés szerint adott kicsinél kisebbet különbözik. De egyúttal oly kicsiny is lehet a ρ , hogy mihelyt még kisebb, már $|I_{\sigma}|$ tetszés szerint adott kicsinél kisebb. Erről kell meggyőződnünk.

A függvény-helynek s a legközelebbi különös pontnak a kölesőnös távolsát jelölje r . A ψ_0 véges constans, és a μ szám akkora legyen, hogy a T térben mindenütt

$$r^\mu |\Phi| \leq \psi_0, \quad \mu < 2.$$

Világos, hogy

$$|I_\sigma| \leq \frac{\psi_0}{\rho^\mu} \int_\sigma D\sigma.$$

Ha továbbá a különös pontok száma N , úgy az itt álló integralis semmi esetre sem nagyobb mint $4\pi N \rho^2$, tehát

$$|I_\sigma| \leq 4\pi N \psi_0 \rho^{2-\mu}.$$

Mínt hogy a föltevés szerint $\mu < 2$, így a ρ megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_\sigma|$ tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

3. Akkor is áll a reductió tétel, ha egyes vonalak pontjaiban nem folytonos a Φ függvény és deriváltja, de vagy véges, vagy a függvény végtelenségi rendszáma 1-nél, a deriváltjáté 2-nél kisebb.

Ennek a fölismérése végett övezzünk körül igen kis egymást nem metsző fölülettel minden egyes összefüggő különös vonalat, mindegyiket olyanal, amelynek összes pontjai ugyanabban a ρ távolságban vannak tőle vagyis legközelebbi pontjától. Lehetséges ez törési és elágazási vonalpontok létezésében is. Amely különös vonalak átdöfik vagy érintik az S fölületet, vagy rajta fekszenek, azok övedzője igen kis részt metsz ki az S fölületből. E fölület többi részét jelölje S' . Az övedző fölületek összeségét jelölje σ . A T térnek azt a részét, amelyet S' és σ határol jelölje T' .

Mínt hogy a T' tér nem tartalmaz különös vonalakat, s legföljebb különös pontokat tartalmaz, amelyekről föltegyük, hogy megfelelnek az előbbi tárgyalás követelményeinek, úgy

$$\int_{T'} \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = - \int_{S'} \Phi \cos(i, n) D\sigma - \int_\sigma \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

Ugyan olyan okból, mint az előbbi tárgyalásban, most is csak arról kell meggyőződnünk, hogy ρ lehet oly kicsiny, mikép mihelyt még kisebb, már a σ -ra szóló integralis absolutus értéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

Ugyanoly módon definálván a ψ_0 constanst és a μ számot, mint előbb, de azzal a különbséggel, hogy most $\mu < 1$ legyen, most is

$$|I_\sigma| \leq \frac{\psi_0}{\rho^\mu} \int_\sigma D\sigma.$$

A σ fölületet ρ sugarú körös csőfölületek és ρ sugarú gömbfölületek, utóbbiak a különös vonalak végeinél, törési és elágazási pontjainál, képezik. Ha a különös vonalak hossza összesen λ , és ha a végek, törési és elágazási pontok száma összefüggésben k , úgy bizonyára

$$\int_{\sigma} D\sigma < 2\pi\lambda\rho + 4\pi k\rho^2,$$

mert a gömbfölületek soha sem teljesekek, és általában a csőfölületek sem teljesekek. Így

$$|I_{\sigma}| < 2\pi(\lambda + 2k\rho)\psi_0\rho^{1-\mu}.$$

Mintthogy a föltevés szerint $\mu < 1$, ennélfogva ρ lehet oly kicsiny, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_{\sigma}|$ tetszés szerint adott kicsinyenél kisebb.

4. Ha a Φ függvénynek folytonosság-szakadási fölülete van a T térben, akkor már reductió egyenletünk nem helyes.

Azonban, ha véges a függvény az ilyen fölületen, és folytonosság-szakadása abban áll, hogy a fölület egyik oldalára más érték-rendszere tartozik, mint a másikra (XVI), ha továbbá a függvény deriváltja vagy véges, vagy elsőnél alacsonyabb rendű végtelen az eféle fölületen, akkor létezik egy más reductió egyenlet.

Ehhez úgy jutunk el, hogy a T tért fölületekkel oly részekre osztjuk, amelyekben nincs folytonosság-szakadási fölület. Természetesen a részekre osztó fölületek a különös fölületeken feküsznek. Az egyes $T_1, T_2 \dots$ tér-részekre érvényes a reductió egyenlet:

$$\int_{T_1} \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = - \int_{S_1} \Phi \cos(i, n) D\sigma$$

$$\int_{T_2} \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = - \int_{S_2} \Phi \cos(i, n) D\sigma$$

.....

Ez az 1. mintájára következik akkor is, ha a derivált a mondott módon végtelen.

Összeadásukból folyólag

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} Di = - \sum_k \int_{S_k} \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

De ezt a kifejezést hasznosabb alakra vezethetjük. Az S_k fölületek összességének egy része a T tér S határ-fölületét képezi, többi része, σ , pedig kettősen fordul elő, t. i. oly fölület-darabok összessége, amelyek két-két szomszédos tér-osztály határán közös fölület-darabokat képeznek.

Ha tehát σ egyik oldalát (+) másik oldalát (—) oldalnak nevezzük, úgy megfelelő jelzés-mód alkalmazásával:

$$\int_T \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = - \int_S \Phi \cos(i, n) D\sigma - \int_{\sigma} \left[\Phi_+ \cos(i, n_+) D\sigma_+ + \Phi_- \cos(i, n_-) D\sigma_- \right].$$

Válaszszuk úgy a $D\sigma_+$ és $D\sigma_-$ fölület-elemeket, hogy kettenk 'nt azonosak legyenek. Egyszersmind vegyük tekintetbe, hogy ugyanazon a helyen

$$\cos(i, n_+) + \cos(i, n_-) = 0.$$

Ehhez képest

$$\int_T \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = - \int_S \Phi \cos(i, n) D\sigma - \int_{\sigma} (\Phi_+ - \Phi_-) \cos(i, n_+) D\sigma.$$

Mint hogy pedig a σ fölület-rendszer esetleges oly részén, amelyen nincs folytonosság-szakadása a Φ függvénynek, $\Phi_+ - \Phi_- = 0$, úgy a σ kizárólagosan a folytonosság-szakadás fölületeit jelentheti.

Emellett előfordúlhatnak a 2.) és 3.) alatt tárgyalt folytonosság-szakadások, amidőn aztán ez az egyenlet a reductio legáltalánosabb alap-formulája.

Egyszerűség kedvéért bizonyos általánosságokban czélszerű ezzel a jelölés-móddal élni:

$$\int_{\sigma} \Phi_+ \cos(i, n_+) D\sigma = \int_{\sigma_+} \Phi \cos(i, n) D\sigma,$$

$$\int_{\sigma} \Phi_- \cos(i, n_-) D\sigma = \int_{\sigma_-} \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

Akkor aztán

$$\int_T \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = - \int_{\sigma_+ + \sigma_-} \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

Ha csak $\partial \Phi : \partial i$ szenvedne folytonosság-szakadást a σ fölületeken a fent definiált módon, azonban Φ nem, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductio érvényes, mert a σ fölületekre vonatkozó integralis eltűnik.

XXVII. Tér-integralisok részleges reductiója.

1.) Ha a véges kiterjedésű T térben F és P a hely oly függvénye, hogy szorzatuk, FP , az i irányban deriválható folytonos függvény és deriváltja is folytonos, úgy az előbbi cikk értelmében

$$\int_T \frac{\partial(FP)}{\partial i} D\tau = - \int_S FP \cos(i, n) D\sigma.$$

Sőt még akkor is érvényes ez az egyenlet, ha FP és deriváltja egyes pontokban és egyes vonalok pontjaiban folytonosság-szakadásos, de vagy véges, vagy FP végtelenségi rendszáma különös pontban kisebb mint kettő, különös vonalon kisebb mint egy, deriváltjának végtelenségi rendszáma pedig különös pontban kisebb mint három, különös vonalon kisebb mint kettő.

Most tegyük föl, hogy ezen fölül a T térben F és P általában (XV) külön deriválhatók i irányban, és az

$$F \frac{\partial P}{\partial i}, \quad P \frac{\partial F}{\partial i}$$

szorzatok egyenként legfőljebb oly módokon tanúsítanak folytonosság szakadást, mint az FP szorzat deriváltja. Akkor e két szorzat mind-egyikének van tér-integralisa a T térre vonatkozólag, és a két integrális összege

$$\int_T F \frac{\partial P}{\partial i} D\tau + \int_T P \frac{\partial F}{\partial i} D\tau \equiv \int_T \left(F \frac{\partial P}{\partial i} + P \frac{\partial F}{\partial i} \right) D\tau = \int_T \frac{\partial(FP)}{\partial i} D\tau.$$

Következőleg

$$\int_T P \frac{\partial F}{\partial i} D\tau = - \int_T F \frac{\partial P}{\partial i} D\tau - \int_S FP \cos(i, n) D\sigma.$$

Ha folytonosság-szakadási fölületek, σ , fordúlnának elő, amelyeken az FP szorzat legfőljebb olyszerűen tanúsít folytonosság-szakadást, mint az előbbi cikk 4.) részében Φ , és a két deriváltos szorzat olyszerűen, mint ugyanott Φ deriváltja, akkor egészen oly módon következik, mint ugyanott, hogy

$$\int_T P \frac{\partial F}{\partial i} D\tau = - \int_T F \frac{\partial P}{\partial i} D\tau - \int_{s+\sigma_++\sigma_-} FP \cos(i, n) D\tau.$$

Itt a baloldali tér-integralis részint fölületi integralissal, részint egy más térfogati integralissal van kifejezve. Ilyképen való előállítását részleges reductiójának nevezzük.

Ez az egyenlet formalisan magában foglalja a teljes reductio egyenletét, amennyiben az által, hogy $P=1$ -et írunk, az utóbbiba megy át.

2.) Ha F és Q , F és R oly tulajdonságúak a T térben, mint F és P , és ha emellett az i bármely irány lehet, írjuk egyenletünkben F , P és i helyett rendre F , P és x ; F , Q és y ; F , R és z . Aztán adjuk össze a három egyenletet.

Rövidség kedvéért tévén:

$$\cos(x, n) \equiv \alpha, \quad \cos(y, n) \equiv \beta, \quad \cos(z, n) \equiv \gamma,$$

úgy

$$\int_T \left(P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} + R \frac{\partial F}{\partial z} \right) D\tau = \\ = - \int_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) F \cdot D\tau - \int_{S+\sigma_++\sigma_-} (P\alpha + Q\beta + R\gamma) F \cdot D\sigma.$$

3.) Ha a (P, Q, R) vektornak van potentialisa, Φ , a T térben, úgy, ezt a szokásos rövidítést használván:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \equiv \Delta \Phi,$$

a (XVII) cikk értelmében, ahol most az i irányon n irány gondolandó:

$$\int_T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} \right) D\tau = - \int_T F \cdot \Delta \Phi \cdot D\tau - \int_{S+\sigma_++\sigma_-} \frac{\partial \Phi}{\partial n} F \cdot D\sigma.$$

4.) Ha Φ és $\partial F: \partial x$, Φ és $\partial F: \partial y$, Φ és $\partial F: \partial z$ oly tulajdonságúak, mint a 2.) részben F és P , F és Q , F és R , tehát oly tulajdonságúak, mint a 3.) részben F és $\partial \Phi: \partial x$, F és $\partial \Phi: \partial y$, F és $\partial \Phi: \partial z$, akkor az iménti egyenletben F és Φ fölcserélhetők. Cselekedjük meg a fölcserélést, aztán az új egyenletet vonjuk ki az eredetiből.

Ily módon a következő egyenlethez jutunk:

$$\int_T (\Phi \cdot \Delta F - F \cdot \Delta \Phi) D\tau = - \int_{S+\sigma_++\sigma_-} \left(\Phi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) D\sigma.$$

5.) Ha a (P, Q, R) vektornak vector-potentialisa van a T térben, akkor (XXI.) szerint

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

tehát a 2.) részben az egyik tér-integralis eltűnik, és a részleges reductio teljessé válik.

Legyen (U, V, W) a vector-potentialis. Ha l és m tangentialis irányok a $D\sigma$ fölület-elemnél és merőlegesek egymásra úgy, hogy l, m, n oly helyzetű viszonyban vannak, mint rendre a helyhatározó tengelyek: jelöljék L, M, N a vector-potentialisnak az l, m, n irányra tartozó componensét. Akkor (XX, 3b) értelmében

$$\begin{aligned} \int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial z} \right] D\tau = \\ = - \int_{S^+ \sigma + \sigma^-} \left(\frac{\partial M}{\partial l} - \frac{\partial L}{\partial m} \right) F \cdot D\sigma. \end{aligned}$$

6.) Ha (X, Y, Z) vectornak T térben van vector-potentialisa (U, V, W) , és, ha U' és W, U' és V, V' és U, V' és W, W' és V, W' és U páronként oly tulajdonságúak, mint 1.)-ben F és P és emellett az i bármely irányu helyzet, úgy vessünk ügyet erre a tér-integralisra:

$$\int_T (U'X + V'Y + W'Z) D\tau.$$

Behelyettesítvén ebbe a következőket:

$$X \equiv \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad Y \equiv \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad Z \equiv \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

ez által hat tagra szakad az integrálandó függvény. Végezzünk mindegyik tagra vonatkozólag részleges reductiót. Ha az (U', V', W') vectorral vector-potentialis módjára meghatározott vector (X', Y', Z') , azaz, ha

$$X' \equiv \frac{\partial W'}{\partial y} - \frac{\partial V'}{\partial z}, \quad Y' \equiv \frac{\partial U'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial x}, \quad Z' \equiv \frac{\partial V'}{\partial x} - \frac{\partial U'}{\partial y},$$

akkor a reductiók folytán

$$\begin{aligned} \int_T (U'X + V'Y + W'Z) D\tau = \int_T (UX' + VY' + WZ') D\tau + \\ + \int_{S^+ \sigma + \sigma^-} [(W'\beta - V'\gamma)U + (U'\gamma - W'\alpha)V + (V'\alpha - U'\beta)W] D\sigma. \end{aligned}$$

7.) Abban a különös esetben, hogy az (U', V', W') vectornak van a T térben potentialisa, F' , az egyik tér-integralis eltűnik, mert

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0,$$

s a reductió egyenlet, részletesen kiírva, így jelenik meg:

$$\begin{aligned} \int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial z} \right] D\tau = \\ = \int_{S+\sigma_++\sigma_-} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} \beta - \frac{\partial F}{\partial y} \gamma \right) U + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \gamma - \frac{\partial F}{\partial z} \alpha \right) V + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \alpha - \frac{\partial F}{\partial x} \beta \right) W \right] D\sigma \end{aligned}$$

8.) Akármily functionalis kifejezés tér-integralisán végezzünk reductiót, ennek az alapját mindig a (XXVI.) cikk végén jegyzett egyenlet képezi: bármely reductió egyenlet térfogati része mindig oly tagokra vezethető, aminő ennek az egyenletnek a baloldala; csakhogy a különböző tagokba különböző függvény és irány tartozhatik.

Azonban akár hány ilyenét tagot tartalmazza a térfogati rész, ha az egyes függvények általában mindenkép deriválhatók a kijelölt térben, úgy mindig három ilyenét tagból állítható össze, amelyekben az irányokat a coordinata-tengelyek irányai képezik. Mert azoknak a függvényeknek bármely irányú deriváltja a coordinata deriváltakkal fejezhető ki, (XVII).

Tényileg, legyen

$$I = \int_T \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial i_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial i_2} + \dots \right) D\tau.$$

Ha az i irány cosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sít., úgy

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial i_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \beta_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \gamma_1, \quad \text{sít.}$$

Ha tehát írjuk:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \alpha_1 + \Phi_2 \alpha_2 + \dots &\equiv f \\ \Phi_1 \beta_1 + \Phi_2 \beta_2 + \dots &\equiv g \\ \Phi_1 \gamma_1 + \Phi_2 \gamma_2 + \dots &\equiv h, \end{aligned}$$

akkor

$$I = \int_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) D\tau.$$

Mithogy pedig a reductio után

$$I = \int_{S+\sigma_+ + \sigma_-} [\Phi_1 \cos(i_1, n) + \Phi_2 \cos(i_2, n) + \dots] D\sigma$$

és, minthogy

$$\cos(i, n) = \alpha_1 \alpha + \beta_1 \beta + \gamma_1 \gamma, \text{ stb.},$$

ennél fogva

$$\int_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) D\tau = \int_{S+\sigma_+ + \sigma_-} (f\alpha + g\beta + h\gamma) D\sigma,$$

akár teljesíti egyenként f, g, h előforduló deriváltja is, u. m. $\partial f : \partial x$, $\partial g : \partial y$, $\partial h : \partial z$ a (XXVI)-ban kiszabott föltételeket, akár nem, ha csak $\Phi_1, \partial \Phi_1 : \partial i_1$ stb. teljesítik azokat.

XXVIII Tér-integrálisok GAUSS-GREEN- és KIRCHHOFF-féle reductiója.

Tegyük föl, hogy a hely F, G, H függvényei a következő tulajdonságokkal bírnak a T térben : általában folytonosak ; amely pontban nem folytonosak, abban vagy végesek, vagy végtelenségi rendjük kisebb mint 2 ; amely vonal pontjaiban nem folytonosak, azon a vonalon vagy végesek, vagy végtelenségi rendjük kisebb mint 1 ; amely fölület pontjaiban nem folytonosak, azon a fölületen mindkét oldalról határozott végesek ; rendre x, y, z szerint általában deriválhatók ; deriváltjuk általában folytonos ; amely pontban nem az, abban vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 3 ; amely vonal pontjaiban nem folytonos, azon a vonalon vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 2 ; amely fölület pontjaiban nem folytonos, azon a fölületen vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 1.

E föltételek alatt (XXVI)

$$\int_T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) D\tau = - \int_{S+\sigma_+ + \sigma_-} (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma.$$

Ezek a föltételek többet tartalmaznak, mint amennyi ahhoz szükséges, hogy az integralis-egyenlet helyes legyen. Valóban, e föltételek egész összesége csak általában véve szükséges : a függvények bizonyos alakrendszere kielégíti reductiók egyenletünket, jóllehet némely előírt föltételt nem teljesít.

A függvények bizonyos alak-rendszerének pedig más reductiók egyenlet felel meg amiatt, hogy némely előírt föltételt nem teljesít. Ennek az alak-rendszernek egy specialis fajára vonatkozik egy GAUSS-tól egy GREEN-től és egy KIRCHHOFF-tól szerzett reductio, amelyek mindegyike alap-vető jelentőséggel bír az alkalmazásokban.

1.) Tegyük föl, hogy az (F, G, H) vector a T tér belsejében lévő a, b, c pontban másodrendű végtelen, a $(\partial F : \partial x, \partial F : \partial y, \partial F : \partial z)$ vector pedig ugyanott harmadrendű végtelen, de a

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

összeg vagy véges ebben az a, b, c pontban is, vagy harmadiknál alacsonyabb rendűen végtelen, és az a, b, c pont nem pontja különös vonalnak vagy különös fölületnek, azaz körül zárható oly fölülettel, amelyen belül az F, G, H függvénynek és a $\partial F : \partial x, \partial G : \partial y, \partial H : \partial z$ függvénynek nincs más különös helye, mint az a, b, c pont. Ilyen fölületet jelöljön a következőkben S és a körülfogta tért jelölje majd T , mert a tér többi részével nem kell törődnünk.

Ha az a, b, c különös pont nem léteznék ebben a T térben, akkor

$$\int_T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) D\tau = - \int_S (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma$$

volna. Az a, b, c pont miatt általában nem érvényes ez az egyenlet, jóllehet a két integrális létezik. Általában nem érvényes, mert (XXVI) értelmében olyan három egyenletet föltételez, amelyek rendszere ezuttal nem létezik.

Azonban zárjuk körül az a, b, c pontot oly S' fölülettel, amely egészen a T tér belsejében van. Az S' és S fölület közt foglalt $T-T'$ térre alkalmazhatjuk a reductiót:

$$\int_{T-T'} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) D\tau = - \int_S (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma - \int_{S'} (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma.$$

Ha most az S' fölületet úgy változtatjuk, hogy a belülrötte foglalt tér, T' , végtelenül kisebbedjék, a $T-T'$ térre szóló integralis értéke végtelenül közeledik a T térre szóló integralis értékéhez, míg az S' fölületre szóló integralis változatlan marad. Következésképpen az S' fölületre szóló integralis szükségképpen határozott véges értékbe convergál, amely független attól, hogy milyen alakzaton vezetjük át az S' fölületet, — az a, b, c pontba, vagy ezen a ponton átfekvő vonalba, vagy fölület-darabba terelvén pontjait avégből, hogy tértartalmát, T' , elenyéztessük.

Ezek után írjuk:

$$F = \frac{u}{r^2}, \quad G = \frac{v}{r^2}, \quad H = \frac{w}{r^2},$$

ahol r az x, y, z függvény-helynek az a, b, c ponttól mért távolsága

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

u, v, w pedig az x, y, z koordinátáknak, az r távolságnak, és az

$$\frac{x-a}{r} \equiv \lambda, \quad \frac{y-b}{r} \equiv \mu, \quad \frac{z-c}{r} \equiv \nu$$

irány-cosinusoknak, mint független argumentumoknak, deriválható folytonos függvényei legyenek a T térben, és e térben a hét argumentum mindegyikére képezett partialis deriváltjuk is folytonos legyen.

Mintfogya a változó S' fölület megválasztása közömbös a végső eredményre nézve, válasszunk meg ezt kisebbedő gömbfölületnek a, b, c ponttal, mint centrummal, és ρ sugárral:

$$\int_{S'} (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma \equiv \int_{S'} \frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{\rho^2} D\sigma.$$

Ebben az integralisban $\lambda = \alpha$ stb. Ha tehát általánosan

$$u \equiv u(x, y, z, r, \lambda, \mu, \nu), \text{ stb.}$$

úgy ebben az integralisban

$$u \equiv u(x, y, z, \rho, \alpha, \beta, \gamma), \text{ stb.}$$

és, ha írjuk:

$$u(a, b, c, \rho, \alpha, \beta, \gamma) \equiv u_0 \text{ stb.}$$

akkor

$$\lim_{T' \rightarrow 0} \int_{S'} (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S'} \frac{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma}{\rho^2} D\sigma.$$

Gondoljuk most az a, b, c pont, mint centrum, körül a sugár-egységgel képezett (σ_0) gömbfölületet. A ($D\sigma$) fölület-elem centralis vetülete ezen a fölületen legyen ($D\sigma_0$). Akkor

$$D\sigma = \rho^2 D\sigma_0.$$

Eszérint

$$\lim_{T' \rightarrow 0} \int_{S'} (F\alpha + G\beta + H\gamma) D\sigma = \int_{\sigma_0} (u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma) D\sigma_0.$$

Következésképen

$$\begin{aligned} \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{r^2} \right) \right] D\tau = \\ = - \int_S \frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{r^2} D\sigma - \int_{\sigma_0} (u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma) D\sigma_0, \end{aligned}$$

hacsak a térfogatilag integrálandó kifejezés vagy véges az a, b, c helyen is, vagy végtelenségi rendje kisebb mint három.

2.) Ha egyenletünkben a σ_0 gömbföüleltre szóló integralis $= 0$, akkor végeredményben közönséges reductióval van dolgunk.

Erre való példaképen tegyük föl, hogy az egész T térben

$$u = R\mu - Q\nu, \quad v = P\nu - R\lambda, \quad w = Q\lambda - P\mu,$$

ahol P, Q, R ugyanazokkal a tulajdonságokkal bírjanak, amelyekeket az u, v, w függvényekre róttunk ki, azaz $x, y, z, r, \lambda, \mu, \nu$ deriválható folytonos függvényei legyenek, és a hét argumentum mindegyike szerint képezett partialis deriváltjuk is folytonos legyen a T térben. Most

$$u\lambda + r\mu + w\nu = 0,$$

és mivel a σ_0 gömbföüleltre szóló integralisban

$$u = u_0 = R_0\beta - Q_0\gamma, \text{ stb.}$$

úgy egyszersmind

$$u_0\alpha + r_0\beta + w_0\gamma = 0,$$

tehát beköszönt a közönséges reductio. Csakhogy a térfogatilag integrálandó kifejezésnek vagy végesnek kell lennie az a, b, c helyen is, vagy β -nál alacsonyabb rendűen végtelennek.

Megállapítandók e követelés föltételét, vegyük számba, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \lambda, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \mu, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \nu, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= \frac{1-\lambda^2}{r}, & \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= -\frac{\lambda\mu}{r}, & \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= -\frac{\lambda\nu}{r}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} &= -\frac{\mu\lambda}{r}, & \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \frac{1-\mu^2}{r}, & \frac{\partial \mu}{\partial z} &= -\frac{\mu\nu}{r}, \\ \frac{\partial \nu}{\partial x} &= -\frac{\nu\lambda}{r}, & \frac{\partial \nu}{\partial y} &= -\frac{\nu\mu}{r}, & \frac{\partial \nu}{\partial z} &= \frac{1-\nu^2}{r}. \end{aligned}$$

A P, Q, R függvényeknek, mint a hét argumentum függvényének a partialis deriválását δ jeggyel jelöljük, mihez képest

$$\frac{\delta P}{\delta x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial r} \lambda + \frac{\partial P}{\partial \lambda} \frac{1-\lambda^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial \mu} \frac{\lambda\mu}{r} - \frac{\partial P}{\partial \nu} \frac{\lambda\nu}{r}, \text{ stb.}$$

A tér-integralisban kijelentett deriválások és az összeadás elvégzése után oly kifejezéshez jutunk, amelynek nagy része identice kiesik az összegből, és marad:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{r^2} \right) = \\ & = - \left[\left(\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z} \right) \lambda + \left(\frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x} \right) \mu + \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) \nu \right] \frac{1}{r^2} \\ & - \left[\left(\frac{\delta R}{\delta \mu} - \frac{\delta Q}{\delta \nu} \right) \lambda + \left(\frac{\delta P}{\delta \nu} - \frac{\delta R}{\delta \lambda} \right) \mu + \left(\frac{\delta Q}{\delta \lambda} - \frac{\delta P}{\delta \mu} \right) \nu \right] \frac{1}{r^3}. \end{aligned}$$

Igy, ha

$$\left(\frac{\delta R}{\delta \mu} - \frac{\delta Q}{\delta \nu} \right) \lambda + \left(\frac{\delta P}{\delta \nu} - \frac{\delta R}{\delta \lambda} \right) \mu + \left(\frac{\delta Q}{\delta \lambda} - \frac{\delta P}{\delta \mu} \right) \nu$$

legalább az a, b, c helyen algebrailag eltűnik, akkor példánk beválik. Ez annak a feltétele, mert jelen kifejezésünkben $1:r^2$ factora véges az a, b, c pontban is, jöllehet nem folytonos e helyen amiatt, hogy a λ, μ, ν iránycosinusokat tartalmazza. Szorítkozzunk arra az esetre, hogy mindenütt identice eltűnik ez a kifejezés, még pedig úgy, hogy

$$P = \frac{\delta G}{\delta \mu}, \quad Q = \frac{\delta G}{\delta \nu}, \quad R = \frac{\delta G}{\delta \lambda}.$$

Ezek beiktatásával a következő reducióhoz jutunk:

$$\begin{aligned} & \int_T \left[\frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta G}{\delta \nu} \mu - \frac{\delta G}{\delta \mu} \nu \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta G}{\delta \lambda} \nu - \frac{\delta G}{\delta \nu} \lambda \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left(\frac{\delta G}{\delta \mu} \lambda - \frac{\delta G}{\delta \lambda} \mu \right) \right] \frac{D\tau}{r^2} \\ & = - \int_S \left[\left(\frac{\delta G}{\delta \nu} \mu - \frac{\delta G}{\delta \mu} \nu \right) \alpha + \left(\frac{\delta G}{\delta \lambda} \nu - \frac{\delta G}{\delta \nu} \lambda \right) \beta + \left(\frac{\delta G}{\delta \mu} \lambda - \frac{\delta G}{\delta \lambda} \mu \right) \gamma \right] \frac{D\sigma}{r^2}. \end{aligned}$$

3.) Abban a még különösebb esetben, hogy

$$G \equiv \Phi(x, y, z, r) f(\lambda, \mu, \nu),$$

reduciónk ezt az alakot ölti:

$$\begin{aligned} & \int_T \left[\left(\frac{\delta f}{\delta \nu} \mu + \frac{\delta f}{\delta \mu} \nu \right) \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \left(\frac{\delta f}{\delta \lambda} \nu - \frac{\delta f}{\delta \nu} \lambda \right) \frac{\delta \Phi}{\delta y} + \left(\frac{\delta f}{\delta \mu} \lambda + \frac{\delta f}{\delta \lambda} \mu \right) \frac{\delta \Phi}{\delta z} \right] \frac{D\tau}{r^2} \\ & = - \int_S \left[\left(\frac{\delta f}{\delta \nu} \mu - \frac{\delta f}{\delta \mu} \nu \right) \alpha + \left(\frac{\delta f}{\delta \lambda} \nu - \frac{\delta f}{\delta \nu} \lambda \right) \beta + \left(\frac{\delta f}{\delta \mu} \lambda - \frac{\delta f}{\delta \lambda} \mu \right) \gamma \right] \frac{\Phi}{r^2} D\sigma. \end{aligned}$$

4.) Ha az 1.)-ben szerzett egyenletből nem tűnik el az az integrális, amely a σ_0 gömbföüleire terjed ki, akkor a reductio új alakjával van dolgunk.

Példaképen tegyük föl, hogy az egész T térben

$$u = \psi\lambda, \quad v = \psi\mu, \quad w = \psi\nu,$$

ahol a ψ ugyanoly függvény legyen, aminőkül az u, v, w függvényeket definiáltuk: az $x, y, z, r, \lambda, \mu, \nu$ hét argumentum deriválható folytonos függvénye, és mindegyik argumentumra képzett partialis deriváltja is folytonos a T térben mindenütt.

Mivel a σ_0 fölületre szülő integralisban

$$u = u_0 = \psi_0\alpha, \quad \text{stb,}$$

így

$$\int_{\sigma_0} (u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma) D\sigma = \int_{\sigma_0} \psi_0 D\sigma,$$

ahol természetesen

$$\psi_0 = \psi(a, b, c, 0, \alpha, \beta, \gamma).$$

Azomban kell, hogy a térfogatilag integrálandó kifejezés vagy véges legyen az a, b, c helyen is, vagy végtelenségi rendszáma β -nál kisebb legyen. Ezt a föltételt egészen általánosan kielégítik u, v, w az itt választott alakjukkal. Amíg a ψ függvényt csak annyiban deriváljuk partiálisan a coordinátákra, amennyiben explicite és az r távolság révén tartalmazza azokat, ennek úgy adjunk kifejezést, hogy a felső δ jegyhez hiány-jelet írjunk. Mihez képest, a δ jegy előbbi jelentménye szerint

$$\frac{\partial'\psi}{\partial x} = \frac{\delta\psi}{\delta x} + \frac{\delta\psi}{\delta r}\lambda, \quad \text{stb.}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial'\psi}{\partial x} + \frac{\delta\psi}{\delta\lambda} \frac{1-\lambda^2}{r} - \frac{\delta\psi}{\delta\mu} \frac{\lambda\mu}{r} - \frac{\delta\psi}{\delta\nu} \frac{\lambda\nu}{r}, \quad \text{stb.}$$

Szem előtt tartva r, λ, μ, ν deriváltjainak a 2.) cikk-részben följegyzett kifejezéseit, könnyű szerrel találjuk, hogy jelenlegi példánkban

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{r^2} \right) = \left(\frac{\partial'\psi}{\partial x} \lambda + \frac{\partial'\psi}{\partial y} \mu + \frac{\partial'\psi}{\partial z} \nu \right) \frac{1}{r^2},$$

már pedig $\partial'\psi : \partial x$ stb. végesek az a, b, c helyen is, bár, amennyiben tartalmazzák az irány-cosinusokat mint a hét argumentum függvényei, nem folytonosak ezen a helyen.

Következőleg

$$\int_T \left(\frac{\partial'\psi}{\partial x} \lambda + \frac{\partial'\psi}{\partial y} \mu + \frac{\partial'\psi}{\partial z} \nu \right) \frac{D\tau}{r^2} = - \int_S \frac{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma}{r^2} \psi D\sigma - \int_{\sigma_0} \psi_0 D\sigma.$$

Mivel pedig

$$\frac{\lambda}{r^2} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \text{stb.}$$

így egyszeresmind

$$\int_T \left(\frac{\partial' \psi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial' \psi}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial' \psi}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) D\tau = - \int_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \psi D\sigma + \int_{\sigma_0} \psi_0 D\sigma_0.$$

Természetesen akkor is érvényes ez az egyenlet, ha a T térben az a, b, c ponton kívül oly különös helyek, pontok, vonalak, fölületek vannak, amelyeket megenged a közönséges reductio.

5.) Legyen, hogy $\partial' \psi : \partial x$, stb. szintén deriválható folytonos függvényei a hét argumentumnak, és mindenik argumentumra képezett partialis deriváltjuk folytonos a T térben. Akkor az itteni tér-integralison az $1:r$ függvényre vonatkozólag közönséges részleges reductiót végezhetünk, mert az

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \partial' \psi}{\partial x \partial x}, \quad \text{stb.}$$

kifejezések harmadiknál alacsonyabb rendűen, sőt csak elsőrendűen válnának az a, b, c pontban végtelenné, és következésképp $1:r$ és $\partial' \psi : \partial x$, $1:r$ és $\partial' \psi : \partial y$, $1:r$ és $\partial' \psi : \partial z$ teljesítik azokat a föltételeket, amelyek a (XXVII) cikkben az H és P függvényekre kiszabvák. E cikk 2.) részében foglalt mintára megtévén a reductiót, találjuk, hogy

$$\int_T \left(\frac{\partial \partial' \psi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial \partial' \psi}{\partial y \partial y} + \frac{\partial \partial' \psi}{\partial z \partial z} \right) \frac{D\tau}{r} = \int_S \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial' \psi}{\partial n} \right) D\sigma - \int_{\sigma_0} \psi_0 D\sigma_0,$$

ahol $\partial' \psi : \partial n$ azt a normalis irányú deriváltat jelenti, amelynek a képzése a coordinátákra mint explicite és mint az r távolság révén előforduló argumentumokra szorítkozik.

Természetesen akkor is érvényes ez az egyenlet, ha a T térben az a, b, c ponton kívül oly különös helyek, pontok, vonalak, fölületek vannak, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

6.) Abban a különösebb esetben, hogy

$$\psi \equiv \Phi(x, y, z, r) \cdot f(\lambda, \mu, \nu),$$

a 4.) alatti cikkely-részből

$$\int_T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^1}{\partial z} \right) f D\tau = - \int_S \frac{\partial^1}{\partial n} \Phi f D\sigma + \Phi_0 \int_{\sigma_0} f D\sigma_0;$$

az 5) alattiból pedig, az elején kirótt további föltétel alatt:

$$\begin{aligned} \int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} f \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} f \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} f \right) \right] \frac{D\tau}{r} = \\ = \int_S \left(\frac{\partial^1}{\partial n} \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) f D\sigma - \Phi_0 \int_{\sigma_0} f D\sigma_0. \end{aligned}$$

Az első egyenletben Φ és f deriválható folytonosak a maguk négy, illetőleg három argumentuma szerint, és mindegyik partialis deriváltjuk is folytonos T -ben. A második egyenletben ezen fölül még egyszer deriválhatók argumentumaik szerint és második partialis deriváltjaik is folytonosak T -ben. Továbbá

$$\Phi_0 = \Phi(a, b, c, o).$$

Azonban akkor is érvényesek ezek az egyenletek, ha oly különös pontok, vonalak, fölületek fordulnak elő a T -ben, az a, b, c ponton kívül, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

7.) Most még különösebb esetre térve át, tegyük $f=1$. A Φ függvény az x, y, z és r argumentumok deriválható folytonos függvényét jelentvén T -ben, amelynek a négy partialis deriváltja is folytonos ebben a térben:

$$\int_T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^1}{\partial z} \right) D\tau = - \int_S \frac{\partial^1}{\partial n} \Phi D\sigma + 4\pi \Phi(a, b, c, o).$$

Ha pedig Φ négy partialis deriváltja is deriválható mind a négy argumentum szerint, és második partialis deriváltjai is folytonosak T -ben:

$$\int_S \frac{\Delta \Phi}{r} D\tau = \int_T \left(\frac{\partial^1}{\partial n} \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) D\sigma - 4\pi \Phi(a, b, c, o).$$

Akkor is érvényes egyenletek, ha oly különös helyek vannak a T térben az a, b, c ponton kívül, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

Ezeknek a reductióknak az elsejét nevezzük GAUSS-féle reductióknak, másodikát GREEN-féle reductióknak. A σ_0 gömbföület közbenjárásával

egyenesen levezethetők az előbbi (zikk 3.) és 4.) részében fölállított egyenletekből, amely egyenletek tartalmát GREEN tantételének szokás nevezni.

8.) Most a GREEN-féle reducióból egy újat származtatunk, s ezt nevezzük KIRCHHOFF-félének. Minthogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\delta \Phi}{\delta x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \lambda, \text{ stb.}$$

úgy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x \delta r} \lambda + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} \lambda^2 + \frac{\delta \Phi}{\delta r} \frac{1 - \lambda^2}{r} = \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} \lambda^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x \delta r} \lambda + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} \lambda^2 + \frac{\delta \Phi}{\delta r} \frac{1 - \lambda^2}{2r} \right), \text{ stb.} \end{aligned}$$

Következőleg

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} + 2 \left(\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x \delta r} \lambda + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y \delta r} \mu + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z \delta r} \nu + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} + \frac{\delta \Phi}{\delta r} \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} + 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\delta \Phi}{\delta r} \right) \cdot \lambda + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\delta \Phi}{\delta r} \right) \cdot \mu + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\delta \Phi}{\delta r} \right) \cdot \nu \right] \end{aligned}$$

Helyettesítsük be $\Delta \Phi$ e kifejezését a 7.) cikk-részben a GREEN-féle egyenletbe, azután a tér-integralis második részén végezzünk részleges reduciót. Találjuk:

$$\begin{aligned} \int_T \left(\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} \right) \frac{D\tau}{r} &= \\ &= \int_S \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - 2r \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \frac{\delta \Phi}{\delta r} \right) D\sigma - 4\pi \Phi(a, b, c, o). \end{aligned}$$

Azomban, ha az n irányú deriválást, amennyiben az r argumentumra nem terjed ki, δ jeggyel tüntetjük föl, úgy

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\delta \Phi}{\delta n} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\delta \Phi}{\delta r} = \frac{1}{r} \frac{\delta \Phi}{\delta n} - r \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \frac{\delta \Phi}{\delta r},$$

minek következtében így is írhatjuk reduciós egyenletünket:

$$\begin{aligned} \int_T \left(\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta r^2} \right) \frac{D\tau}{r} &= \\ &= \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \left(\Phi - r \frac{\delta \Phi}{\delta r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\delta \Phi}{\delta n} \right] D\sigma - 4\pi \Phi(a, b, c, o). \end{aligned}$$

XXIX. Fölületi integralisok reductiója.

1.) Tegyük föl, hogy U, V, W legalább is egyszer deriválható folytonos függvényei a koordinátáknak és partialis deriváltjaik is folytonosak a T térben. Tegyük föl továbbá, hogy F legalább is kétszer deriválható folytonos függvénye a koordinátáknak és második partialis deriváltjai is folytonosak a T térben. Akkor (XXVII, 7)-ből folyólag

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \dots \right] D\tau = \int_S \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} \beta - \frac{\partial F}{\partial y} \gamma \right) U + \dots \right] D\sigma,$$

ahol S a határfölület, α, β, γ pedig a $(D\sigma)$ fölület-elem befelé mutató normalisának irány-cosinusai.

Most a T téren végtelen vékony térközét értünk, amelyet

$$F(x, y, z) = p = \text{const.}$$

$$F(x, y, z) = p + \delta p = \text{const.}$$

fölületek és egy ezekhez orthogonális fölület határolnak. Ha azt a két fölület-darabot, amelyet az orthogonális fölület a két másik fölületből kivág, σ és σ' jelöli, azt a végtelen vékony szalagot pedig, amelyet ezek a fölületek az orthogonális fölületből kivágnak, σ_0 jelöli, úgy $S = \sigma + \sigma' + \sigma_0$. Azonban a σ és σ' fölületen

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

tehát a fölületi integralisnak a σ és σ' fölület-darabra vonatkozó része eltűnik, és így

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \dots \right] D\tau = \int_{\sigma_0} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} \beta_0 - \frac{\partial F}{\partial y} \gamma_0 \right) U + \dots \right] D\sigma.$$

A $D\tau$ tér-elemeket válaszszuk meg akkép, hogy a végtelen vékony T térköz teljes merőleges átmetszeti elemei legyenek, úgy, hogy, ha x, y, z helyen e térköz vastagsága δn és a σ fölület egy eleme $D\sigma$, akkor

$$D\tau = \delta n \cdot D\sigma.$$

A $D\sigma_0$ fölület-elemeket pedig válaszszuk meg akkép, hogy a végtelen keskeny σ_0 szalag teljes merőleges átmetszeti elemei legyenek, úgy, hogy, ha a szalag x, y, z helyénél a σ fölület-darab határ-vonalának egy hossz-eleme Ds , akkor

$$D\sigma_0 = \delta n \cdot Ds.$$

Ámde irván

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = N^2,$$

a (XIX) értelmében

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \pm N\alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \pm N\beta, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \pm N\gamma,$$

és egyszersmind

$$\delta n = \pm \delta p : N.$$

Behelyettesítvén mindezt integrális egyenletünkbe, és tekintetbe vévén, hogy δp constans, találjuk:

$$\int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \alpha + \dots \right] D\sigma = \int_s [(\gamma\beta_0 - \beta\gamma_0)U + \dots] Ds$$

ahol s jelenti a σ fölület-darab határvonalát. A σ fölülethez tangentiális, a Ds vonal-elemre merőleges és a σ fölület belsejének mutató irányának a cosinusai az $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; α, β, γ pedig mindenütt a σ fölület normalisának irány-cosinusai. Így az $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ és (α, β, γ) irány és a (Ds) vonal-elemnek azt az irányt tulajdonítjuk, a melylyel az (α, β, γ) és $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ iránynak a tengelye bír (VIII.), és l, m, n legyenek az irány-cosinusai.

Akkor (VIII.):

$$\gamma\beta_0 - \beta\gamma_0 = l, \text{ stb.},$$

tehát

$$\int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \alpha + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \gamma \right] D\sigma = \int_s (Ul + Vm + Wn) Ds.$$

Aki a Ds vonal-elemnél lábtól fejnek az (α, β, γ) fölületi normalis irányába helyezkedik és a fölület belseje felé fordul, annak a jobbjá felé mutat az (l, m, n) irány.

A levezetés értelmében U, V, W a σ fölület közelében deriválható folytonos függvénye a koordinátáknak, s partialis deriváltjaik is folytonosak. A σ fölület pedig oly egyenlettel fejezhető ki, amelyben a hely függvénye kétszer deriválható a koordinátákra és partialis deriváltjai is folytonosak a fölület közelében.

Levezetett egyenletünkben fölületi integralis vonalásra van reducálva: STOKES-féle reductio.

Vegyük észre, hogy, ha ξ , η tangentialis irányok és az (α, β, γ) normalissal oly helyzetben vannak, mint a milyenben az x , y , z irány van egymással, ha továbbá (U, V, W) vector értéke a ξ irányon Ξ és az η irányon H , akkor (XX, 3b)

$$\int_{\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial \Xi}{\partial \eta} \right) D\sigma = \int_s (Ul + Vm + Wn) Ds.$$

2.) Akkor is érvényes az egyenlet, ha az U , V , W függvények és partialis deriváltjaik a σ fölület egyes pontjaiban nem folytonosak, de vagy végesek, vagy a függvények végtelenségi rendje 1-nél, deriváltjaik végtelenségi rendje 2-nél kisebb.

Ugyanis kerítsük be az ily pontokat igen kis vonalakkal, amelyek mindegyikének minden pontja egyenlő ρ távolságban legyen az illető különös ponttól. A belső pontokat igen kis zárt vonalakkal, a határvonalon lévőket a határ-vonalig terjedő igen kis vonalakkal kerítsük be. Utóbbiak az s határ-vonalból igen kis részeket metszenek ki. Az s vonal többi részét jelölje s' , és a σ fölületnek azt a részét, amely az s' vonal-rész meg a bekerítő s'' vonalak közt terül el, jelölje σ . Erre a σ fölület-részre alkalmazható a reductio:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma'} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \alpha_{+ . .} \right] D\sigma &= \\ &= \int_{s'} (Ul + Vm + Wn) Ds + \int_{s''} (Ul + Vm + Wn) Ds. \end{aligned}$$

Ha az (U, V, W) vector nagysága R , és az s'' vonalakra szóló integralist I'' jelöli, úgy

$$|I''| \leq \int_{s''} R Ds.$$

Legyen most, hogy R végtelenségi rendszáma sehol sem nagyobb, mint μ . Akkor létezik akkora véges constans, Q_0 , hogy mindenütt

$$R < \frac{Q_0}{\rho^{\mu}},$$

és következőleg

$$|I''| < \frac{Q_0}{\rho^{\mu}} \int_{s''} Ds = Q_0 \frac{s''}{\rho^{\mu}}.$$

De bizonyosan létezik akkora véges constans szám, k_0 , hogy bármely értékkel bírjon az igen kis ρ távolság, $s'' \geq k_0 \rho$, tehát

$$|I''| < Q_0 k_0 \rho^{1-\mu}.$$

Következésképp, ha $\mu < 1$, akkor ρ megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|I''|$ kisebb, mint egy tetszés szerint adott kis érték. De egyúttal oly kicsi lehet a ρ , hogy mihelyt még kisebb, már a σ' fölületre és az s' vonalra szóló integralis a σ fölületre és az s vonalra szóló integralistól tetszésre adott kicsinél kisebb értékben különbözik.

3.) Ha folytonosság szakadási vonala van a U, V, W függvénynek a σ fölületen, akkor már nem érvényes az egyenletünk.

Azonban, ha végesek a függvények az ilyen vonalon, és folytonosság-szakadásuk csak abban áll, hogy más érték-rendszerük tartozik a vonal egyik oldalára, mint a másikra a fölületen, ha továbbá deriváltjaik vagy végesek, vagy elsőnél alacsonyabb rendűen végtelenek a különös vonalokon, akkor létezik egy más reductió egyenlet.

Ehhez úgy jutunk el, hogy a σ fölületet vonalokkal oly részekre osztjuk, amelyekben nincs folytonosság-szakadási vonal. Természetesen a részekre osztó vonalak a különös vonalakra fekszenek.

Hasonló módon járva el, mint (XXVI, 4)-ben, találjuk, hogy

$$\int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \alpha + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \gamma \right] D\sigma = \\ = \int_{s^+ s^-} (Ul + Vm + Wn) Ds,$$

ha t. i.

$$\int_{s^+} (Ul + Vm + Wn) Ds = \int_{\zeta} (Ul + Vm + Wn)_+ Ds \\ \int_{s^-} (Ul + Vm + Wn) Ds = \int_{\zeta} (Ul + Vm + Wn)_- Ds,$$

ahol ζ jelöli a folytonosság-szakadás vonalait és a (+) és (—) index az egyik és másik oldalra tartozó U, V, W, l, m, n értékeket különbözteti meg.

Ha csak a deriváltak szenvednek folytonosság-szakadást a ζ vonalokon, a fent definiált módon, akkor nyilvánvalóan a közöséges reductió érvényes, mert a ζ vonalokra szóló integralis eltűnik,

XXX. Vonalas integrálisok reductiója.

1.) Tegyük föl, hogy Φ a hely deriválható folytonos függvénye a két végű s vonalon. Másfelől gondoljuk, hogy egy mozgó pont írta le ezt a vonalat, és minden helyen a mozgás irányát tekintsük a vonal irányának, amelyet általánosan s jelöljön, úgy, hogy a vonal x, y, z helyén $\partial\Phi:\partial s$ a vonal irányában képezett derivált.

Akkor, ha a függvény értéke a vonal kezdő pontjában Φ_1 s a vonal végső pontjában Φ_2 :

$$\int_s \frac{\partial\Phi}{\partial s} Ds = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Mert

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} Ds$$

nem más, mint a függvény megváltozása a Ds vonal-elemen, s az ily megváltozások összesége a függvénynek az egész vonalon való megváltozása.

2.) Ha folytonosság-szakadási pontja van a Φ függvénynek a vonalon, akkor egyenletünk nem helyes.

Azonban, ha véges a függvény az ily pontban is, és folytonosság-szakadása csak abban áll, hogy más értéke tartozik a pont egyik oldalára, mint a másikra, ha továbbá deriváltja vagy véges, vagy első-nél alacsonyabb rendű végtelen a különös pontokban, akkor egy más reductió egyenlet létezik.

Ehhez úgy jutunk el, hogy annyi részben fogjuk föl a vonalat, ahányra a különös pontok osztják: egyenként mindenik osztásrészre fölírjuk az egyenletet, aztán összeadjuk az egyenleteket. Alkalmos rendezést végezvén,

$$\int_s \frac{\partial\Phi}{\partial s} Ds = \Phi_2 - \Phi_1 - \Sigma(\Phi_+ - \Phi_-)$$

reductióhoz jutunk, amelyben Φ_- egy különös pont innenső oldalára, Φ_+ tulsó oldalára tartozik a vonal-irány értelmében.

Tegyük itt ezt az észrevételt: ha Φ deriválható a három coordinatára a vonalon, s a (Ds) elemi vector componenseit Dx, Dy, Dz jelölik, akkor

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{Dx}{Ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{Dy}{Ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{Dz}{Ds},$$

tehát

$$\int_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} D\dot{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} D\dot{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} D\dot{z} \right) = \Phi_2 - \Phi_1 - \Sigma(\Phi_+ - \Phi_-).$$

Ha csak a derivált szenvedne folytonosság-szakadást, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductio érvényes.

XXXI. Több-értékű függvény geometriai integralisa.

Ha az integrálandó függvény a (XVI) cikk értelmében több-értékű abban a térben, fölületben, többszörösen összefüggő vonalban, amelyre az integrálást ki akarjuk terjeszteni, akkor rekesztő fölületek alkalmazásával egyértékű függvényekre bontsuk. A rekesztő fölületek minden esetre folytonosság-szakadási fölületek az egyes függvények érték-tartományában. Ha emellett teljesítik a függvények az integrálhatóság valamely elégséges föltételeit, tér-integralisaik annyiban különböznek a közönséges egyértékű függvények tér-integralisaitól, hogy változtatható folytonosság-szakadási fölület tartozik beléjük; fölületi, illetőleg vonalozás integrálisuk annyiban különbözik a közönséges egyértékű függvények fölületi és vonalozás integrálisától, hogy változtatható folytonosság-szakadási vonal illetőleg pont-hely tartozik beléjük, melyek az integralis fölületének, illetőleg vonalának és a rekesztő fölületeknek a metsződéséből származnak. Az ilyen folytonosság-szakadási helyek változtatásával természetesen általában változik az integralis értéke.

XXXII. Geometriai integralisok, mint függvények.

Tegyük föl, hogy az

$$I = \int_{\tilde{\omega}} \Phi D\tilde{\omega}$$

geometriai integralisban a Φ függvény a $(D\tilde{\omega})$ alakzat-elem koordinatáin kívül más mennyiségek u, v, \dots függvénye is:

$$\Phi = \Phi(x, y, z, u, v, \dots)$$

úgy, hogy az u, v, \dots változók bizonyos (T) érték-tartományában teljesít oly elégséges föltételeket, amelyenek alatt az integralis létezik, vagyis határozott véges határ-értéket jelent.

Akkor az integralis nyilvánképen az u, v, \dots változók függvénye a (T) érték-tartományban.

1.) Ha a Φ függvény a (T) értéktartományban az $(\tilde{\omega})$ alakzat minden pontjában folytonos függvénye az u, v, \dots változóknak, akkor a (T) érték-tartományban az I integralis folytonos függvénye az u, v, \dots változóknak.

Ugyanis ha úgy u', v', \dots , mint u, v, \dots a (T) érték-tartományban vannak, akkor

$$\begin{aligned}
 I(u', v', \dots) - I(u, v, \dots) &\equiv \int_{\tilde{\omega}} \Phi(x, y, z, u', \dots) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega}} \Phi(x, y, z, u, \dots) D\tilde{\omega} \equiv \\
 &\equiv \int_{\tilde{\omega}} [\Phi(x, y, z, u', \dots) - \Phi(x, y, z, u, \dots)] D\tilde{\omega}.
 \end{aligned}$$

A Φ függvény folytonosságánál fogva $u' - u$, $v' - v$, ... számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a

$$\Phi(x, y, z, u', v', \dots) - \Phi(x, y, z, u, v, \dots)$$

függvény-külömbőség számértéke ($\tilde{\omega}$)-ban mindenütt kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. Jelölje ezt a számot ε és jelentse az ($\tilde{\omega}$) alakzat teljes mekkoraságát $\tilde{\omega}$ (XXII). Az

$$I(u', v', \dots) - I(u, v, \dots)$$

külömbőség számértéke nyilvánvalóan kisebb, mint $\tilde{\omega}\varepsilon$. Így $u' - u$, $v' - v$, ... számértékei oly kicsinynek választhatók meg, hogy egyúttal ennek az integralis-külömbőségnek a számértéke is kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám.

2.) Ha a Φ függvénynek, mint x, y, z függvényének oly folytonosság-szakadásai volnának az ($\tilde{\omega}$) alakzatban a (T) érték-tartományba tartozó u, v, \dots értékek mellett, amelyek daczára (XXIV, XXV) értelmében létezik az integralis, ez akkor is folytonos függvénye az u, v, \dots változóknak.

Jelentse ugyanis ($\tilde{\omega}_0$) és ($\tilde{\omega}'_0$) az ($\tilde{\omega}$) alakzat oly igen kis részét, amely az u, v, \dots illetőleg u', v', \dots értékek mellett az összes különös helyeket magában foglalja. Az alakzat többi részét jelölje ($\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0$). Mivel ebben az alakzat-részben folytonos a függvény, így $u' - u$, $v' - v, \dots$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb már az

$$\int_{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0} \Phi(x, y, z, u', \dots) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0} \Phi(x, y, z, u, \dots) D\tilde{\omega}$$

külömbőség számértéke kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. De egyúttal oly kicsinynek választható ($\tilde{\omega}_0$) és ($\tilde{\omega}'_0$), hogy mihelyt még kisebbek, már a reájuk tartozó integralisok számértéke is kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám (XXIV, XXV). Mínhogy

$$\begin{aligned}
 &I(u', v', \dots) - I(u, v, \dots) \\
 &\equiv \int_{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0} \Phi(x, y, z, u', \dots) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0} \Phi(x, y, z, u, \dots) D\tilde{\omega} + \\
 &\quad + \int_{\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}'_0} \Phi(x, y, z, u', \dots) D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}'_0} \Phi(x, y, z, u, \dots) D\tilde{\omega},
 \end{aligned}$$

így $u' - u, v' - v, \dots$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már az

$$I(u', v', \dots) - I(u, v, \dots)$$

külöbség számértéke kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám, mert $\tilde{\omega}_0$ és $\tilde{\omega}'_0$ zérustól tetszés szerint kicsit különbözőknek választhatók meg.

3.) Ha a Φ függvény az $(\tilde{\omega})$ alakzatba tartozó coordinata-értékek mellett a (T) érték-tartományban u, v, \dots deriválható függvénye, és ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \dots$$

mint az x, y, z coordinaták függvényei, folytonosak az $(\tilde{\omega})$ alakzatban, akkor az I integralis deriválható függvénye az u, v, \dots változóknak a (T) érték-tartományban és deriváltjai a Φ függvény deriváltjainak az integralisai. Elég lesz egy partialis deriváltról mutatni ki ezt. Hasonlóképp mutatható ki bármely másról. — Ha rövidség kedvéért

$$\Phi(x, y, z, u', v, \dots) = \Phi',$$

úgy

$$I(u', v, \dots) - I(u, v, \dots) \\ \equiv \int_{\tilde{\omega}} \Phi' D\tilde{\omega} - \int_{\tilde{\omega}} \Phi D\tilde{\omega} \equiv \int_{\tilde{\omega}} (\Phi' - \Phi) D\tilde{\omega} \equiv \int_{\tilde{\omega}} \frac{\Phi' - \Phi}{u' - u} (u' - u) D\tilde{\omega}.$$

Ha most itt írjuk:

$$\frac{\Phi' - \Phi}{u' - u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \eta,$$

akkor $u' - u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|\eta|$ az alakzat minden pontjában kisebb, mint egy tetszés szerint adott kicsiny érték η_0 , tehát

$$\text{Abs.} \int_{\tilde{\omega}} \eta \cdot (u' - u) D\tilde{\omega} < \eta_0 \cdot |u' - u| \tilde{\omega},$$

$$\text{Abs.} \left[\frac{I(u', v, \dots) - I(u, v, \dots)}{u' - u} - \frac{\int_{\tilde{\omega}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} (u' - u) D\tilde{\omega}}{u' - u} \right] < \eta_0 \tilde{\omega}.$$

Következésképp $u' - u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már

$$\frac{I(u', v, \dots) - I(u, v, \dots)}{u' - u}$$

tetszés szerint adott kicsinynél kisebb számértékben különbözik az

$$\frac{\int_{\tilde{\omega}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} (u' - u) D\tilde{\omega}}{u' - u}$$

kifejezéstől. Ez pedig amiatt, hogy $\partial \Phi : \partial u$ az x, y, z koordináták folytonos függvénye az alakzatban \equiv

$$\int_{\tilde{\omega}} \frac{\partial \Phi}{\partial u} D\tilde{\omega}.$$

4.) Ha a Φ függvény az $(\tilde{\omega})$ alakzat egyes pontjai, vonalai, fölületei kivételével deriválható csak az x, y, z alakzati koordináták mellett az u, v, \dots változókra a (T) tartományban úgy, hogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \dots$$

mint az x, y, z koordináták függvényei egyes pontokban, egyes vonalok, fölületek pontjaiban folytonosság-szakadást szenvednek az $(\tilde{\omega})$ alakzatban, de azért teljesítik az integrálhatóság (XXIV, XXV)-ben megjelölt föltételeit, az I integralis akkor is deriválható az u, v, \dots változókra a (T) érték-tartományban. Most is elégséges lesz egy partialis deriválással foglalkozni. — Jelentsék $(\tilde{\omega}_0)$ és $(\tilde{\omega}'_0)$ az alakzat oly igen kis részét, amely az (u', v, \dots) illetőleg u, v, \dots értékek mellett az összes különös helyeket magában foglalja. Az alakzat többi részét $(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0)$ jelölje.

$$\begin{aligned} I(u', v, \dots) - I(u, v, \dots) &\equiv \int_{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'_0 - \tilde{\omega}_0} \frac{\Phi' - \Phi}{u' - u} (u' - u) D\tilde{\omega} + \int_{\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}'_0} \frac{\Phi' - \Phi}{u' - u} (u' - u) D\tilde{\omega} \equiv \\ &\equiv \int_{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'_0 - \tilde{\omega}_0} \frac{\partial \Phi}{\partial u} (u' - u) D\tilde{\omega} + \int_{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}'_0} \eta \cdot (u' - u) D\tilde{\omega} + \int_{\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}'_0} \frac{\Phi' - \Phi}{u' - u} (u' - u) D\tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Az $u' - u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, és $(\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}'_0)$ kiszabható oly kicsinyre, hogy mihelyt még kisebb, már a második és

harmadik integralis számértéke tetszés szerint adott kis számnak és $|u' - u|$ -nak a szorzatánál kisebb legyen . . .

Jegyeztük* légyen azonban meg, hogy egy függvény deriváltjának itt megkívánt integrálhatósága nem szükséges, csak elégséges föltétele annak, hogy a függvény integralisa deriválható legyen. Majd a következőkben példáját látjuk.

XXXIII. A NEWTON-féle potentialis alap-tulajdonságai.

Tegyük föl, hogy ebben a geometriai integralisban :

$$\int_{\bar{\omega}} \Phi D\bar{\omega} \equiv I,$$

az integrálandó függvény, vagyis Φ , ilyen alakú :

$$\Phi \equiv \frac{\varphi(x, y, z)}{\rho},$$

ahol φ a hely folytonos függvénye az $(\bar{\omega})$ alakzatban és ρ az alakzat x, y, z pontjának és egy változó ξ, η, ζ pont-helynek a kölcsönös távolsága.

Ekkor az integralis a ξ, η, ζ hely függvénye: $I \equiv I(\xi, \eta, \zeta)$. NEWTON-féle potentialisnak nevezzük. Nagy jelentőségűek az ilyen integralisok az alkalmazásban, amelyek különösen mint bizonyos vectorok potentialisa és mint bizonyos vectorok vector-potentialisának componensei jelentkeznek a physikában.

1.) Az $(\bar{\omega})$ alakzaton kívül fekvő pontokban mindenütt mindhárom koordinatára, (ξ, η, ζ) , bárhányszor deriválható függvény a NEWTON-féle potentialis, mert az integrálandó függvény az, és deriváltjai, mint x, y, z függvényei folytonosak az $(\bar{\omega})$ alakzatban (XXXII. 3).

Ha pedig a ξ, η, ζ pont az $(\bar{\omega})$ alakzatban van, akkor a Φ függvénynek, mint x, y, z függvényének, egyetlen különös helye a ξ, η, ζ pont. Ebben első rendű végtelen, ennél fogva a potentialis az alakzat térfogati és fölületi részében folytonos függvénye a helynek, és térfogati részében egyszer bizonyosan deriválható függvénye is, és három partialis deriváltja folytonos (XXXII, 2, 4).

Ha ξ, η, ζ külső pont, és ennek a távolsága az alakzat egy bizonyos kiszemelt x_0, y_0, z_0 pontjától R , úgy

$$R \cdot I = \int_{\bar{\omega}} \varphi(x, y, z) \frac{R}{\rho} D\bar{\omega}.$$

Ha a ξ, η, ζ pontot végtelenül távolítjuk az x_0, y_0, z_0 pont-

tól, úgy az $R : \rho$ hányados értéke végtelenül közeledik az egységhez, tehát

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R I = \int_{\bar{\omega}} \varphi(x, y, z) D\bar{\omega}.$$

Továbbá

$$R^2 \frac{\partial I}{\partial i} = R^2 \int_{\bar{\omega}} \varphi(x, y, z) \frac{\partial 1}{\partial i} D\bar{\omega}.$$

Azonban

$$\frac{\partial 1}{\partial i} = \frac{\partial 1}{\partial \xi} \alpha + \frac{\partial 1}{\partial \eta} \beta + \frac{\partial 1}{\partial \zeta} \gamma = -\frac{\lambda \alpha + \mu \beta + \nu \gamma}{\rho^2},$$

ha t. i. α, β, γ az i irány cosinusai, és λ, μ, ν az x, y, z pontból a ξ, η, ζ pontba mutató irány cosinusai, mihez képest, θ -val jelölván a két irány szögét,

$$\frac{\partial 1}{\partial i} = -\frac{\cos \theta}{\rho^2}.$$

Eszerint

$$R^2 \frac{\partial I}{\partial i} = - \int_{\bar{\omega}} \varphi(x, y, z) \cos \theta \cdot \frac{R^2}{\rho^2} D\bar{\omega}.$$

Ha az x_0, y_0, z_0 pontból a ξ, η, ζ pontba mutató irány és az i irány szöge θ_0 , úgy R végtelen növelése mellett a θ szög a θ_0 szögbe convergál, mihez képest

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \frac{\partial I}{\partial i} = -\cos \theta_0 \int_{\bar{\omega}} \varphi(x, y, z) D\bar{\omega},$$

sít. — Ezek szerint a határegyenletek szerint a NEWTON-féle potentialis és deriváltjai a végtelenben eltűnnek, és pedig algebrailag tűnnek el: maga a potentialis első rendűen, első deriváltjai másodrendűen, sít.

Némely egyéb tulajdonságoknak a megismerése végett válaszként a NEWTON-féle potentialist térfogati, fölületi és vonalas potentialisra aszerint, amint az integralis térre, fölületre, vonalra vonatkozik.

2.) A NEWTON-féle térfogati potentialist (τ) térre terjedő integrációban jelölje I_τ Coordinata-deriváltjai,

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial \xi} = \int_{\omega} \varphi \frac{\partial^1}{\partial \xi} D\tau = \int_{\tau} \frac{\varphi}{\rho^2} \frac{x-\xi}{\rho} D\tau, \quad \text{stb.}$$

abban az esetben bizonyosan deriválható folytonos függvényei a koordinatáknak a (τ) tér belsejében is, ha a φ függvény az x, y, z koordinaták deriválható folytonos függvénye az egész (τ) térben, jóllehet az integrálandó függvények, u. m.:

$$\left(\varphi \cdot \frac{x-\xi}{\rho} \right) \frac{1}{\rho^2}, \quad \text{stb.}$$

oly deriváltakat szolgáltatnak, amelyek a ξ, η, ζ pontban harmadrendűen végtelenek, midőn belső pont ez, és így nem integrálhatók a (τ) térre.

Ugyanis

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial \xi} = \int_{\tau} \varphi \frac{\partial^1}{\partial \xi} D\tau = - \int_{\tau} \varphi \frac{\partial^1}{\partial x} D\tau.$$

Részleges reductióval élvén:

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial \xi} = \int_{\tau} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} D\tau + \int_{\sigma} \frac{\varphi \cos(n, x)}{\rho} D\sigma, \quad \text{stb.}$$

ahol most σ a (τ) tér határ-fölületét jelenti. Ezek pedig a ξ, η, ζ koordinaták mindegyikére deriválhatók a (τ) tér belsejében, és deriváltjaik folytonosak abban.

3.) Minthogy

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \frac{1}{\rho} \equiv 0,$$

és minthogy a (τ) téren kívül az integrálás jele alatt végezhetők az I_τ potentialison a deriválások, ennél fogva a (τ) téren kívül mindenütt

$$\Delta I_\tau = 0.$$

A fölületi és vonalas potentialisok,

$$\int_{\sigma} \frac{\varphi}{\rho} D\sigma \equiv I_\sigma, \quad \int_s \frac{\varphi}{\rho} Ds \equiv I_s,$$

a fölületen, illetőleg a vonalon kívül mindenütt s akárhányszor az integrálás jele alatt deriválhatók, tehát mindenütt

$$\Delta I_{\sigma} = 0, \quad \Delta I_{\sigma} = 0.$$

Ezeket az egyenleteket LAPLACE-féléknek nevezzük.

4.) Mihelyt a φ olyan folytonos függvény a (τ) térben, hogy I_{τ} a (τ) tér belsejében is deriválható másodszor a koordinátákra, és második deriváltjai a (τ) térben folytonosak, akkor a (τ) térben

$$\Delta I_{\tau}(\xi, \eta, \zeta) \equiv -4\pi\varphi(\xi, \eta, \zeta).$$

Ugyanis a GREEN-féle reductióban (XXVIII, 7) a Φ függvény gyanánt használható az I_{τ} függvény, bármely tért jelentsen T , mert más különösség nem fordulhat elő a végetlen térben, mint hogy I_{τ} második deriváltjai más véges értékekkel bírjanak a (τ) tért határoló σ fölületnél ennek az egyik oldalán, mint a másikon. Ha pedig a (τ) tér tetszés szerinti része (τ') , nem különben használható $I_{\tau'}$ is Φ gyanánt abban a reductióban, bármely tért jelentsen T' , mert más különösség nem fordulhat elő a végetlen térben, mint hogy $I_{\tau'}$ második deriváltjai más véges értékkel bírjanak a σ' fölületnél ennek az egyik oldalán, mint a másikon.

A T' most akkora tért jelentsen, amelynek a belsejében van a τ' tér. Minthogy a τ' téren kívül $\Delta I_{\tau'} = 0$, így

$$\int_T \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau = \int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau.$$

Még pedig T tér gyanánt válasszunk oly gömb-téret, amelynek a centruma a τ' térben van. Sugara megválasztható oly nagyoknak, hogy mihelyt még nagyobb, már a GREEN-féle reductióban a fölületi integrálás számértéke tetszés szerint adott kicsinyénél kisebb, mert az integralis fölülete a sugár négyzetével arányosan nő, az integrálandó függvény pedig olyszerűen kisebbedik, mint a sugár harmadik hatványának a fordított értéke 1.). Eszerint,

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau = -4\pi I_{\tau'}(a, b, c) = -4\pi \int_{\tau'} \frac{\varphi}{\rho} D\tau,$$

vagyis

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'} + 4\pi\varphi}{\rho} D\tau = 0,$$

De, ha (τ) -nak azt a részét, amelyet a (τ') részen kívül tartalmaz, $(\tau - \tau')$ jelöli, úgy

$$I_{\tau'} = I_{\tau} - I_{\tau - \tau'},$$

és (τ') belsejében

$$\Delta I_{\tau - \tau'} = 0.$$

Következésképp

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau} + 4\pi\varphi}{\rho} D\tau = 0.$$

Mint hogy ΔI_{τ} és φ a föltevés szerint mindenütt folytonos (τ) -ban, így (τ') megválasztható úgy, hogy egyfelől benne foglaltassék a (τ) térnek tetszés szerint választott ξ, η, ζ pontja, és másfelől a $\Delta I_{\tau} + 4\pi\varphi$ összeg mindenütt pozitívus, vagy mindenütt negatívus legyen benne. Ebből folyólag (τ) bármely pontja legyen ξ, η, ζ , abban tényleg

$$\Delta I_{\tau} + 4\pi\varphi = 0.$$

Az ú. n. Poisson-féle egyenlet.

Ha a φ deriválható a (τ) -ban mindhárom koordinatára, és deriváltjai folytonosak, akkor létezik ΔI_{τ} a (τ) -ban és folytonos 2.), tehát akkor bizonyosan áll ez az egyenlet. De származásánál fogva áll, mihelyt olyan folytonos függvény a φ , hogy I_{τ} kétszer deriválható (τ) -ban, és második deriváltjai is folytonosak (τ) -ban.

5.) Ahol τ határán a φ függvény nem zérus, ott ΔI_{τ} folytonosság-szakadást szenved a határ-fölületen köröszűl, mert a fölület egyik oldalán 0, a másikon $-4\pi\varphi$. Most látni fogjuk, hogy I_{τ} egyes második deriváltjai miként viselkednek a τ tér határán.

A határ-fölület belső oldalát pozitívus, külső oldalát negatívus oldalának nevezzük. Mint hogy az első deriváltak mindenütt folytonosak, így

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{-} = \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_{+} \text{ stb.}$$

a határ-fölület minden pontjában, ha t. i. I_{τ} helyett rövidség kedvéért I -t írunk. Mint hogy a határ-fölület minden pontjában helyes ez az egyenlet, így oly pontjaiban, amelyekben határozott érintő síkja van, a bal és jobb egyenleti oldalak tangentialis deriváltjai bizonyosan

egyenlők, s bármely tangentialis irányt jelentsen is az ily x, y, z helyen s,

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s}\right)_- - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s}\right)_+ = 0, \text{ stb.}$$

Használjuk ezt a jelölés-módot:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial p \partial q}\right)_- - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial p \partial q}\right)_+ \equiv (p, q).$$

Ha az s tangentialis irányt meghatározó cosinusokat α, β, γ jelentik, úgy egyenleteink eképen is írhatók:

$$(x, x)\alpha + (x, y)\beta + (x, z)\gamma = 0, \text{ stb.}$$

Eszerint az a vector, melynek a componensei $(x, x), (x, y), (x, z)$ vagy $(y, x), (y, y), (y, z)$, vagy pedig $(z, x), (z, y), (z, z)$, normalis irányú a fölület x, y, z helyén. Ha tehát a fölületi normalis egyik irányának az irány-cosinusai az x, y, z helyen λ, μ, ν , akkor léteznek olyan scalarisok R_1, R_2, R_3 , absolutus érték szerint rendre a három vector nagysága, hogy

$$\begin{aligned} (x, x) &= R_1 \lambda, & (x, y) &= R_1 \mu, & (x, z) &= R_1 \nu, \\ (y, x) &= R_2 \lambda, & (y, y) &= R_2 \mu, & (y, z) &= R_2 \nu, \\ (z, x) &= R_3 \lambda, & (z, y) &= R_3 \mu, & (z, z) &= R_3 \nu. \end{aligned}$$

De a (p, q) symbolum definitiójának értelmében (p, q) és (q, p) azonos. Következéleg második, harmadik, negyedik, hatodik, hetedik és nyolczadik egyenletünk szerint

$$R_1 : R_2 : R_3 = \lambda : \mu : \nu,$$

vagyis létezik olyan scalaris, R , hogy

$$R_1 = R\lambda, R_2 = R\mu, R_3 = R\nu.$$

Minthogy pedig

$$(x, x) + (y, y) + (z, z) \equiv (\Delta I)_- - (\Delta I)_+ = 4\pi\varphi,$$

így első, ötödik és kilencedik egyenletünk szerint

$$R_1 \lambda + R_2 \mu + R_3 \nu = 4\pi\varphi,$$

azaz $R = 4\pi\varphi$, tehát

$$(x, x) = 4\pi\varphi\lambda\lambda, \quad (x, y) = 4\pi\varphi\lambda\mu, \quad (x, z) = 4\pi\varphi\lambda\nu, \text{ stb.}$$

Ezt WEINGARTEN-féle egyenlet-rendszernek nevezzük.

6.) Tetszés szerinti T térre és fölületére, S -re, vonatkozólag, reductio rendén

$$\int_T \Delta I_\tau D\tau = - \int_S \frac{\partial I_\tau}{\partial n} D\sigma,$$

mert más különösség nem fordulhat elő, mint hogy I_τ második deriváltjai τ határának egyik oldalán más véges értékekkel bírnak, mint a másikon.

Eszerint

$$\int_S \frac{\partial I_\tau}{\partial n} D\sigma = 4\pi \int_T \varphi D\tau.$$

7.) Minden két-oldalú fölület egyik oldalát (+), másik oldalát (−) oldalának nevezzük, és a fölületi normalisnak azt az irányát, mely a (−) oldalról a (+) oldalra mutat (+) irányának, ellenétes irányát (−) irányának nevezzük.

A σ fölület pontjainál, azokhoz bármely közel, I_σ fölületi potenciális normalis irányú deriváltja általában számot tevően más az egyik oldalán, mint a másikon, jöllehet mindegyik oldalán a (+), vagy mind-egyiken a (−) irányban képezzük. Mégpedig a különbség határ-értéke, a (+) irányú deriváltra számítva, ξ , η , ζ helyen

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n}\right)_- = -4\pi\varphi(\xi, \eta, \zeta).$$

Szabatos levezetéséhez juthatunk a GREEN-féle reductio (XXVIII, 7) és (XXVII, 4) segítségével.

Jelentsen S_1 és S_2 két teljesen zárt fölületet, amelyeket igen vékony térköz választson el egymástól, és amelyek elseje egészen a másodikon belül legyen. Igen vékony térközük belsejében foglaljon helyet a σ fölületnek σ' darabja, és egyuttal úgy legyenek választva, hogy egy a, b, c pont-hely, amelyet a σ' fölületen kívül tetszésre választhatunk, az S_1 fölületen belül legyen. Ettől a ponttól számíttjuk az összes elfordulandó távolságokat amelyeket most mindig r jelöljön.

Az S_1 fölületen belül alkalmazható (XXVIII, 7) a $\Phi \equiv I_{\sigma'}$ függvénynyel, és az S_2 fölületen kívül alkalmazható (XXVII, 4) a $\Phi \equiv I_\sigma$ és $F=1:r$ függvénynyel.

Jelentsé már most (XXVIII, 1)-ben a második egyenletben a T tér az S_1 fölülettől befogott tért. Minthogy $\Delta I_{\sigma'} = 0$, e tér minden pontjában, úgy

$$\int_{S_1} \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} I_{\sigma'} - \frac{1}{r} \frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n} \right) D\sigma = 4\pi I_{\sigma'}(a, b, c).$$

Jelentse továbbá (XXVII, 4) ben a T tér az S_2 fölület és egy körülötte írt gömbfölület közt lévő tért. A gömbfölület sugara megválasztható oly nagynak, hogy mihelyt még nagyobb, már a gömbfölületre szóló integralis számértéke tetszés szerint adott kicsinyenél kisebb. Mivel pedig a mostani T -ben is mindenütt $\Delta I_{\sigma'} = 0$, ezt is figyelembe véve, találjuk, hogy

$$\int_{S_2} \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} I_{\sigma'} - \frac{1}{r} \frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n} \right) D\sigma = 0.$$

Az S_1 és S_2 fölület térköze megválasztható oly vékonyak, hogy mihelyt még vékonyabb, már tetszés szerint meghatározott kicsinyenél kisebb eltéréssel teljesülhessenek a következő postulatumok: n_1 és n_2 ellenkező irányok; r_1 és r_2 egyenlők; $\partial r_1 : \partial n_1$, és $\partial r_2 : \partial n_2$ ellentétesen egyenlők; $(I_{\sigma'})_1$ és $(I_{\sigma'})_2$ egyenlők; $(\partial I_{\sigma'} : \partial n_1)_1$ és $(\partial I_{\sigma'} : \partial n_2)_1$ ellentétesen egyenlők; $(\partial I_{\sigma'} : \partial n_1)_2$ és $(\partial I_{\sigma'} : \partial n_2)_2$ ellentétesen egyenlők; $D\sigma_1$ és $D\sigma_2$ egyenlők; mindannyi az S_1 és S_2 megfelelő pontjára számítva.

Adjuk össze a két integralis-egyenletet. Az elősoroltak rendén összegük ekkép írható

$$\int_{S_1} \left[\left(\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n_1} \right)_2 - \left(\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n_1} \right)_1 \right] \frac{D\sigma}{r} = 4\pi I_{\sigma'}(a, b, c).$$

Azonban csak a σ' fölület-darab közelében különbözhetik számottevően a két derivált, mert a σ' fölületen kívül minden derivált folytonos. Így az integralis a σ' fölület-darabra vonatkoztatható az S_1 fölület helyett, t. i. a $D\sigma_1$ fölület-elemektől mért r távolságok helyett a megfelelő $D\sigma'$ fölület-elemektől mért távolságok tehetők, s a szögletes zárjel tartalma részben állandóan az S_1 , részben állandóan az S_2 fölületre van vonatkoztatva a belső zárjelek indexe szerint. Továbbá, ha (σ) -nak az a része, amelyet a (σ') részen kívül tartalmaz, $(\sigma - \sigma')$, úgy

$$I_{\sigma'} = I_{\sigma} - I_{\sigma - \sigma'}.$$

Ámde $I_{\sigma - \sigma'}$ deriváltjai folytonosak a σ' fölület-rész belsejében, tehát a σ' fölület-darab belsejében mindenütt

$$\left(\frac{\partial I_{\sigma-\sigma'}}{\partial n_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial I_{\sigma-\sigma'}}{\partial n_1}\right)_1 = 0$$

tehétó. Ezek szerint

$$\int_{\sigma'} \left[\left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_1}\right)_1 \right] \frac{D\sigma}{r} = 4\pi I_{\sigma'}(a, b, c).$$

Másfelől

$$I_{\sigma'}(a, b, c) = \int_{\sigma'} \frac{\varphi}{r} D\sigma,$$

tehát

$$\int_{\sigma'} \frac{\left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_1}\right)_2 + 4\pi\varphi}{r} D\sigma = 0.$$

Ebből oly okfüzéssel, aminőt hasonló egyenleten 4.)-ben követtünk, adódik

$$\left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_1}\right)_2 + 4\pi\varphi = 0,$$

az ú. n. Poisson-féle fölületi egyenlet.

8.) Ez egyenlet szerint a NEWTON-féle fölületi integralis normalis irányú deriváltja a fölületen köröszűl általában folytonosság-szakadást szenved, amelynek a nagysága $4\pi|\varphi|$.

Vegyük tekintetbe a fölület oly igen kis (σ_0) részét, amely tetszés szerint adott kicsinél kisebb eltéréssel tekinthető síkknak, vagyis amelyen a görbülés mértéke mindenütt kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. A fölület többi részét ($\sigma - \sigma_0$) jelölje. $I_{\sigma-\sigma_0}$ deriváltjai a (σ_0) fölület-darab belsójében folytonosak, és az I_{σ} fölületi integralis másik, I_{σ_0} részének a deriváltjai szenvedhetnek csak folytonosság-szakadást a σ_0 fölület-darabon köröszűl.

Ennek a folytonosság-szakadásnak a természetébe bepillantás nyílik a következő szemlélődésből. Ha (σ_0) sík-darab, úgy az

$$I_{\sigma_0} \equiv \int_{\sigma_0} \frac{\varphi}{\rho} D\sigma$$

potentialis két oly pontban, ξ_1, η_1, ζ_1 -ben, és ξ_2, η_2, ζ_2 -ben, amelyek egymás

tükörképei a (σ_0) síkjára nézve, teljesen egyenlő. Könnyen kiolvasható ez az integralis alakjából. Ebből pedig következik, hogy a ξ_1, η_1, ζ_1 pontban, a sík normalisának egyik irányában, az I_{σ_0} függvényből képezett derivált, meg a ξ_2, η_2, ζ_2 pontban az ellenkező irányban képezett derivált egyenlő. Következésképpen a két pontban egyező normalis irányban képezett derivált ellentétesen egyenlő, és így a különbségük egyikük kétszerese.

De azt is nyomban beláthatjuk, hogy az I_{σ_0} függvényből a ξ_1, η_1, ζ_1 és ξ_2, η_2, ζ_2 pontban egyező tangentialis irányokban képezett deriváltak egyenlők. Amiből pedig az következik, hogy I_{σ} tangentialis deriváltjai nem szenvednek folytonosság-szakadást a fölületen körösztl.

Ezt tudva, a Poisson-féle fölületi egyenlet segítségével I_{σ} bármely irányú deriváltjának a folytonosság-szakadását kiszámíthatjuk.

Ha l és m irányok tangentialisak és merőlegesek egymásra, akkor

$$\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial i} = \frac{\partial I_{\sigma}}{\partial l} \cos(i, l) + \frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n} \cos(i, m) + \frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_+} \cos(i, n_+).$$

Az érintői deriváltak a két oldalon ugyanazok lévén a σ fölület pontjainál is, így e fölületnél

$$\left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial i}\right)_- = \left[\left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_+}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial n_+}\right)_-\right] \cos(i, n_+).$$

Következésképpen

$$\left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{\sigma}}{\partial i}\right)_- = -4\pi\varphi \cdot \cos(i, n_+).$$

9.) Ebből az a fontos következtetés is vonható, hogy ez a szintén gyakran előforduló integralis

$$I_{\sigma} = \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial^1}{\partial n_+} D\sigma$$

$4\pi|\varphi|$ nagyságú folytonosság-szakadást szenved a σ fölületen körösztl. Egebütt nyilvánképpen folytonos, sőt bárhányszor deriválható.

Ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^1}{\partial n_+} &= \frac{\partial^1}{\partial x} \cos(x, n_+) + \frac{\partial^1}{\partial y} \cos(y, n_+) + \frac{\partial^1}{\partial z} \cos(z, n_+) \\ &= -\frac{\partial^1}{\partial \xi} \cos(x, n_+) - \frac{\partial^1}{\partial \eta} \cos(y, n_+) - \frac{\partial^1}{\partial \zeta} \cos(z, n_+). \end{aligned}$$

Ha tehát azt írjuk, hogy

$$\int_{\sigma} \frac{\varphi \cos(x, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{1\sigma}$$

$$\int_{\sigma} \frac{\varphi \cos(y, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{2\sigma}$$

$$\int_{\sigma} \frac{\varphi \cos(z, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{3\sigma},$$

úgy

$$I'_{\sigma} = -\left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \xi} + \frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial \eta} + \frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial \zeta}\right)$$

Azonban az elébb talált folytonosság-szakadási egyenlet értelmében, a σ fölületnél

$$\left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \xi}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \xi}\right)_- = -4\pi\varphi \cos(x, n_+) \cdot \cos(x, n_+),$$

$$\left(\frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial \eta}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial \eta}\right)_- = -4\pi\varphi \cos(y, n_+) \cdot \cos(y, n_+),$$

$$\left(\frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial \zeta}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial \zeta}\right)_- = -4\pi\varphi \cos(z, n_+) \cdot \cos(z, n_+),$$

következésképpen

$$(I'_{\sigma})_+ - (I'_{\sigma})_- = 4\pi\varphi.$$

XXXIV. Vectorok functionalis fölbontása.

1.) Tegyük föl, hogy (X, Y, Z) vector, mint a hely függvénye, mindhárom coordinatára deriválható folytonos a T térben, és hogy a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}$$

összeg is mindenütt deriválható T -ben. Akkor bizonyosan létezik a T -ben a coordinátáknak olyan kétszer deriválható függvénye, Φ , hogy

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \Delta\Phi.$$

Ilyen függvény ugyanis

$$-\frac{1}{4\pi\rho} \int_T \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) D\tau.$$

Az egyenletből folyólag

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(X - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Y - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(Z - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) = 0.$$

Eszerint az

$$\left(X - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad Y - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad Z - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)$$

vectornak forma szerint van vector-potentialisa a T térben. Jelölje ezt (U, V, W) :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}, \\ Y &= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}, \\ Z &= \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Tehát a kitűzött föltételek alatt az (X, Y, Z) vector két oly vector összegére bontható, amelyek egyikének van potentialisa, Φ , másikának forma szerint van vector-potentialisa, (U, V, W) , a T térben

Azonban a kitűzött föltételek csak elégségesek. Nevezetesen, a helyett, hogy

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}$$

deriválható legyen a T térben, elég csak azt követelni, hogy létezzék olyan kétszer deriválható Φ függvény a T térben, amely a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \Delta \Phi$$

egyenletnek eleget tesz.

2.) Egy más használatos fölbontás azon a lehetőségen alapszik, hogy az

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

három tagú differentialis kifejezés az

$$F \cdot \delta G + \delta H$$

kéttagúra vezethető, amelyben G és H a három független variabilisnek, vagyis x, y, z -nek deriválható függvényét jelenti. Ez a lehetőség ugyanis analyticus kifejezésben:

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \equiv \left(F \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \right) \delta x + \left(F \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) \delta y + \left(F \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) \delta z.$$

Minthogy a $\delta x, \delta y, \delta z$ differentialék teljesen függetlenek egymástól, úgy

$$X = F \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$Y = F \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$Z = F \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Természetesen az alapúl használt lehetőség föltételei ennek a kifejezés-rendszernek is föltételei. Hogy melyek itt a szükséges és elégséges föltételek, vagyis X, Y, Z mely functionalis tulajdonságai szükségesek és elégségesek a fölhasznált lehetőséghez, ennél a kérdésnél is fontosabb egy másik, és pedig az, hogy mely föltételek alatt jelenthetnek F, G és H , legalább általában, mindhárom coordinata szerint kétszer deriválható függvényeket valamely térben? A vectorok illetén fölbontása az alkalmazásokban ezeknek a deriválhatóságoknak az esetében szokott haszonnal járni, s épen azért, valahányszor hozzá folyamodunk, már egyúttal rendszerint a priori föltesszük, hogy olyan a vector, mikép F, G, H általában kétszer deriválhatók mindhárom coordinata szerint. Ekkor általában szükségkép deriválható a vector mindhárom coordinata szerint abban a térben. Kérdés marad azonban, hogy ez a szükséges tulajdonsága elégséges tulajdonsága-e egyszersmind?

XXXV. Potentialisos vectorok és vector-potentialisos vectorok geometriai jellemzése.

1.) Ha a T térben (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa, és ez Φ , akkor vegyük figyelembe a T térben a

$$\Phi - p = 0$$

fölület-sereget. Ez a fölület-sereg a p parametrum bizonyos értéktartományának felel meg, úgy, hogy bármely érték legyen p ebben a tartományban, $\Phi - p = \text{const.}$ oly fölület, amely egészen vagy részben a T térben foglaltatik. Minthogy az ily fölület minden pontjában ugyan-

azzal az értékkel bír a potentialis, azért az ilyen fölületet aequipotentialis fölületnek nevezzük.

A T tér x, y, z pontjában

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

tehát az x, y, z helyre vonatkoztatott (ξ, η, ζ) vector iránya az e helyen átterjeszkedő aequipotentialis fölületre ($\Phi = p = \text{const.}$) merőleges (XIX), és pedig éppen ezen a helyen merőleges rá.

Azonban más vector is bír ezzel a tulajdonsággal. Mind az a vector, amely oly függvénye a helynek, hogy componensei ekképp fejezhetők ki:

$$\xi = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

De már másféle vector nem, mert annak, hogy a helytől függő (ξ, η, ζ) vector egy fölület-seregben, ú. m.

$$\Phi - p = 0,$$

mindenütt orthogonális legyen egy összefüggő térben, szükséges és elégséges föltétele, hogy

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

aránylat létezzék abban a térben.

Ámde, midőn egy vectornak valamely térben potentialisa van, még egy olyan tulajdonsággal bír a vector, amely geometriailag egyszerűen értelmezhető, és mind a két tulajdonsággal más vector nem bír.

Vegyünk tekintetbe két aequipotentialis fölületet, amelyek parametruma végtelen kicsit különbözik, amelyeket tehát végtelen vékony térköz választ el (XIX):

$$\Phi - p = 0, \quad \Phi - (p + \delta p) = 0.$$

A két fölület térközének végtelen kis vastagsága az x, y, z helynél (XIX):

$$\delta s = |\delta p| : N,$$

ahol N jelöli a

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

vector nagyságát.

A $|\delta p| : \delta s$ hányadost az aequipotentialis fölület sereg x, y, z helyi sűrűségének nevezzük és egy pillanatra α bötűvel jelöljük.

Egyenletünk szerint $N = \alpha$.

Ha tehát egy vectornak valamely térben van potentialisa, úgy ennek a vectornak a nagysága mindenütt az aequipotentialis fölület-sereg sűrűségével egyenlő.

2.) Tegyük föl, hogy (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector-potentialisa van, (U, V, W) :

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

és, hogy ez a (ξ, η, ζ) vector általában mindhárom coordinata szerint deriválható a T térben.

Tudjuk már, hogy ez esetben a vector componensei mindig két függvény segítségével fejezhető ki (XX), úgy, hogy a vector két functionalis tetszésszerintiséget tartalmaz, amely csak annyiban nem teljes kettős tetszésszerintiség, hogy mindegyik tetszésszerintiséget három másodrendű deriválhatóság szorítja meg (XXI).

Most más módon fejezzük ki két függvény segítségével, mint amily módokon (XX)-ban tettük. Ez a mód az előbbi cikk második részében fölállított kifejezés-formára támaszkodik, amelyet jelenleg (U, V, W) vector-potentialisra alkalmazunk, tévén

$$U = F \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

$$V = F \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$W = F \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

azzal a kirovással, hogy F, G, H általában kétszer deriválhatók a coordinaták szerint T térben legalább oly módon, hogy a kétszeres deriválások különböző coordinaták szerint valók, t. i. y és z , z és x , x és y szerint valók.

Ezeknek az alakoknak a behelyettesítéséből folyólag

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial y},$$

$$\eta = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\zeta = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Ezekben is két functionalis tetszésszerintiség fordul elő, és ezt a két tetszésszerintiséget is három másodrendű deriválhatóság szorítja meg. Belőlük folyólag

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\xi + \frac{\partial G}{\partial y}\eta + \frac{\partial G}{\partial z}\zeta = 0.$$

Következőleg a (ξ, η, ζ) vector iránya mindenütt tangentialis a T térben az

$$F - p = 0$$

fölület-sereghez és a

$$G - q = 0$$

fölület-sereghez, vagyis mindenütt tangentialis ahhoz a vonal-sereghez, amelyet a két fölület-sereg metszése határoz meg.

Ezzel a tulajdonsággal azonban mind az a vector bir, amely oly függvénye a helynek, hogy componenseit a hely egy tetszés szerinti függvényének és a ξ, η, ζ kifejezéseknek a szorzatai képezik.

Csakhogy vectorunknak még egy egyszerű geometriai tulajdonsága van, amely azt az előbbivel egyetemben már teljesen jellemzi.

Gondoljunk a T térben x, y, z helyen a vonal-seregre nézve orthogonális elemi négyszöget, $(\delta\sigma)$, amelynek csúcsain a következő vonalok haladnak át:

$$\begin{array}{ll} \overset{1}{\perp} F = p & G = q, \\ \overset{2}{\perp} F' = p + \delta p, & G = q, \\ \overset{3}{\perp} F = p, & G' = q + \delta q, \\ \overset{4}{\perp} F' = p + \delta p, & G' = q + \delta q. \end{array}$$

A $|\delta p \delta q| : \delta\sigma$ hányadost a vonal-sereg x, y, z helyi sűrűségének nevezzük. Ezt fogjuk most F és G segédelmével meghatározni.

A $\delta\sigma$ négyszög két szomszédos oldalát ez a két elemi vector képezze: $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$ és $(\delta_2 x, \delta_2 y, \delta_2 z)$, amelyek hosszát $\delta_1 s$ és $\delta_2 s$ jelölje. A másik két oldal ezekkel párhuzamosnak számíthat. Az első vector eleje legyen az $\overset{1}{\perp}$ vonalban, vége a $\overset{2}{\perp}$ vonalban. A második vector eleje legyen szintén az $\overset{1}{\perp}$ vonalban, tehát ugyanabban a pont-helyben, mint az elsőé, vége legyen a $\overset{3}{\perp}$ vonalban. Akkor

$$F' - F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta_1 x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta_1 y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta_1 z = \delta p,$$

$$G' - G = \frac{\partial G}{\partial x}\delta_2 x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta_2 y + \frac{\partial G}{\partial z}\delta_2 z = \delta q.$$

A $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$ elemi vector nyilvánvalóan a $G=q$ fölületen fekszik, a $(\delta_2 x, \delta_2 y, \delta_2 z)$ elemi vector az $F=p$ fölületen, s mindkettő merőlegesen az \perp vonalra; azért merőlegesen reá, mert a föltevés szerint a $(\delta\sigma)$ négyyszög orthogonális a vonal-seregre nézve. Ha tehát x, y, z helyen az \perp vonal egyik irányának irány-cosinusai α, β, γ , úgy

$$\begin{aligned} & \delta_1 x : \delta_1 y : \delta_1 z = \\ & = \left(\frac{\partial G}{\partial y} \gamma - \frac{\partial G}{\partial z} \beta \right) : \left(\frac{\partial G}{\partial z} \alpha - \frac{\partial G}{\partial x} \gamma \right) : \left(\frac{\partial G}{\partial x} \beta - \frac{\partial G}{\partial y} \alpha \right), \\ & \delta_2 x : \delta_2 y : \delta_2 z = \\ & = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \gamma - \frac{\partial F}{\partial z} \beta \right) : \left(\frac{\partial F}{\partial z} \alpha - \frac{\partial F}{\partial x} \gamma \right) : \left(\frac{\partial F}{\partial x} \beta - \frac{\partial F}{\partial y} \alpha \right). \end{aligned}$$

Az első jobb-oldalon szereplő binomiumoknak, mint componenseknek, megfelelő vector nagyságát jelölje R_1 , a második jobb-oldalon szereplő binomiumoknak, mint componenseknek, megfelelő vector nagyságát jelölje R_2 . Akkor

$$\begin{aligned} \delta_1 x &= (+) \frac{\frac{\partial G}{\partial y} \gamma - \frac{\partial G}{\partial z} \beta}{R_1} \delta_1 s, \quad \text{stb.} \\ \delta_2 x &= (+) \frac{\frac{\partial F}{\partial y} \gamma - \frac{\partial F}{\partial z} \beta}{R_2} \delta_2 s, \quad \text{stb.} \end{aligned}$$

Behelyettesítvén ezeket δp és δq fönthebbi kifejezésébe, és tekintetbe vévén a ξ, η, ζ componensek kifejezéseit, azt találjuk, hogy, ha a (ξ, η, ζ) vector nagyságát ρ jelöli, úgy

$$\delta_1 s = (+) \frac{R_1}{\rho} \delta p, \quad \delta_2 s = (+) \frac{R_2}{\rho} \delta q,$$

mert t. i.

$$\alpha : \beta : \gamma = \xi : \eta : \zeta.$$

Mivel a $(\delta\sigma)$ négyyszögnek a területét a következő kifejezés szolgáltatja :

$$\delta\sigma = \sin(\delta_1 s, \delta_2 s) \cdot \delta_1 s \cdot \delta_2 s,$$

így $\delta_1 s$ és $\delta_2 s$ épen most talált kitejezéséből folyólag

$$\delta\sigma = (+) \frac{R_1 R_2}{\rho^2} \sin(\delta_1 s, \delta_2 s) \cdot \delta p \delta q.$$

Azonban,

$$\sin^2(\delta_1 s, \delta_2 s) = \left(\frac{\delta_1 z \delta_2 y}{\delta_1 s \delta_2 s} - \frac{\delta_1 y \delta_2 z}{\delta_1 s \delta_2 s} \right)^2 + \left(\frac{\delta_1 x \delta_2 z}{\delta_1 s \delta_2 s} - \frac{\delta_1 z \delta_2 x}{\delta_1 s \delta_2 s} \right)^2 + \left(\frac{\delta_1 y \delta_2 x}{\delta_1 s \delta_2 s} - \frac{\delta_1 x \delta_2 y}{\delta_1 s \delta_2 s} \right)^2.$$

Helyettesítsük be ide is $\delta_1 x$ stb. előbb följegyzett kifejezéseit. Tekintetbe véve a ξ, η, ζ componenseknek az F és G függvényekkel képezett formuláit, és tekintetbe véve, hogy α, β, γ számértékre a $\xi : \rho, \eta : \rho, \zeta : \rho$ iránycosinusokkal egyezik, csekély fáradság árán azt találjuk, hogy

$$\sin^2(\delta_1 s, \delta_2 s) = \left(\frac{\rho}{R_1 R_2} \right)^2.$$

Eszerint

$$\frac{|\delta p \delta q|}{\delta \sigma} = \rho,$$

vagynis a vonalsereg sűrűsége jelenti mindenütt a vector nagyságát. Ezzel ki van egészítve a vector geometriai jellemzése.

XXXVI Folytonossági tételek.

A függvények folytonosságát illetőleg az alkalmazások szempontjából különösebb érdeklődéssel bír a következő három tétel.

1.) Tegyük föl, hogy az u, v, w, \dots változók száma N , és hogy egy folytonos N dimenziós érték-tartomány belsejében az $f(u, v, w, \dots)$ függvény az egyes változók szerint folytonos. Akkor az érték-tartomány belsejében valamennyi változó szerint folytonos az f függvény. Azaz: ha ξ, η, ζ, \dots változók felső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy bármi kis adott számérték legyen λ , egy N dimenziós érték-tartomány belsejében:

$$\begin{aligned} |f(u+\xi, v, w, \dots) - f(u, v, w, \dots)| &< \lambda, \\ |f(u, v+\eta, w, \dots) - f(u, v, w, \dots)| &< \lambda, \\ &\dots \end{aligned}$$

akkor ξ, η, ζ, \dots felső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy bármi kis adott számérték legyen μ , annak az érték tartománynak a belsejében:

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, \dots) - f(u, v, w, \dots)| < \mu.$$

Ugyanis, az érték-tartomány belsejében

$$\begin{aligned} |f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, \dots) - f(u, v+\eta, w+\zeta, \dots)| &< \lambda, \\ |f(u, v+\eta, w+\zeta, \dots) - f(u, v, w+\zeta, \dots)| &< \lambda, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ebből pedig összeadás rendjén az állítás igazára

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, \dots) - f(u, v, w, \dots)| < N\lambda$$

következik.

2.) Ha az s változónak valamely folytonos érték-intervallumában $f(s)$ mindenütt deriválható és deriváltja nem csak határozott értékkel, de határozott véges értékkel bír mindenütt az intervallumban, akkor deriváltja folytonos az intervallumban.

Mert legyen, hogy, mihelyt $|\xi| < \varepsilon$, már $s+\xi$, vagy $s-\xi$, vagy mindkettő az intervallumba tartozik. A föltevés értelmében, bármi kis számérték legyen λ , megválasztható az ε oly kicsinynek, hogy a felső, vagy alsó előjellel vagy mindegyikkel

$$\left| \frac{f(s+\xi) - f(s)}{\pm \xi} - \varphi_s \right| < \lambda,$$

ahol φ_s határozott érték, az f függvény deriváltja az s érték-helyen.

Ha n az egységelnél kisebb pozitívus szám, nem különben

$$\left| \varphi_s - \frac{f(s+n\xi) - f(s)}{\pm n\xi} \right| < \lambda.$$

A két egyenlőtlenség összeadásából folyólag

$$\left| \frac{f(s+\xi) - f(s)}{\pm \xi} - \frac{f(s+n\xi) - f(s)}{\pm n\xi} \right| < 2\lambda.$$

Azonban az itteni baloldal azonos ezzel:

$$\frac{1-n}{n} \left| \frac{f(s+n\xi+(1-n)\xi) - f(s+n\xi)}{\pm(1-n)\xi} - \frac{f(s+\xi) - f(s)}{\pm \xi} \right|,$$

amelytől csak algebrai alak szerint különbözik. Következésképp

$$\left| \frac{f(s+n\xi+(1-n)\xi) - f(s+n\xi)}{\pm(1-n)\xi} - \frac{f(s+\xi) - f(s)}{\pm \xi} \right| < \frac{2n}{1-n} \lambda.$$

Emellett vegyük most még számba, hogy

$$\left| \frac{f(s+\xi) - f(s)}{\pm \xi} - \varphi_s \right| < \lambda,$$

$$\left| \varphi_{s+n\xi} - \frac{f(s+n\xi+(1-n)\xi) - f(s+n\xi)}{\pm(1-n)\xi} \right| < \lambda.$$

A három egyenlőtlenség összeadásából

$$\left| \varphi_{s+n\zeta} - \varphi_s \right| < \frac{2}{1-n} \lambda$$

következik. Az n pozitívus szám azzal a kikötéssel, hogy az egységnél kisebb legyen, egészen szabadon választható meg.

Ezzel az állítás be van bizonyítva.

3.) Ha az itteni első cikk-részben szerepelő f függvény a változók összesége szerint és mindenütt véges határozott értékbe deriválható az N dimensiós érték-tartomány belsejében, akkor az egyes változók szerint képezett partialis deriváltjai valamenyi változó szerint folytonosak az érték-tartomány belsejében.

Bizonyítás:

A föltételezett deriválhatóság értelmében a függvény mindenütt deriválható partialisan az egyes változók szerint az érték-tartomány belsejében, s azon fölül áll, hogy bármi kis szám-érték legyen λ , a ξ, η, ζ, \dots változók felső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy ha $\xi: \rho, \eta: \rho, \zeta: \rho$ stb. határozott véges értékek úgy az érték-tartomány belsejében mindenütt:

$$\left| \frac{f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, \dots) - f(u, v, w, \dots)}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\xi}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\eta}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\zeta}{\rho} + \dots \right) \right| < \lambda.$$

Tudvalévő dolog, hogy evégből szükséges föltételt képez egy illetén folytonossági rendszer: $\partial f: \partial u$ folytonos a v, w , stb. változók összesége szerint, $\partial f: \partial v$ folytonos a w , stb. változók összesége szerint stb. az érték-tartomány belsejében.

Legyen, hogy épen ez a példaként említett folytonossági rendszer teljesül. Az előbbeni cikk-rész értelmében $\partial f: \partial u$ folytonos az u változó szerint, $\partial f: \partial v$ folytonos a v változó szerint stb., tehát $\partial f: \partial u$ folytonos az u, v, w stb. változók összesége szerint, $\partial f: \partial v$ folytonos a v, w , stb. változók összesége szerint stb., az érték-tartomány belsejében.

De ugyancsak ösmeretes, hogy ez a folytonossági rendszer elégséges föltétele is az előttünk lévő határ-egyenlőtlenségnek.

Már most vegyük tekintetbe, hogy, ha a, b, c stb. véges konstansok, és

$$u = u_0 + a s, \quad v = v_0 + b s, \quad w = w_0 + c s, \dots,$$

úgy az előbbeni cikk-rész értelmében $df: ds$ folytonos függvénye s -nek az érték-tartomány belsejében. De

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u} a + \frac{\partial f}{\partial v} b + \frac{\partial f}{\partial w} c + \dots$$

Jelöljük emitt a $\partial f: \partial u$ stb. partialis deriváltakat rendre $\varphi, \psi, \chi, \dots$: bármi kis számérték legyen λ , megválasztható ζ változó felső szám-határa oly kicsinynek, hogy a

$$\begin{aligned} & |\varphi(u+a\zeta, v+b\zeta, w+c\zeta, \dots) - \varphi(u, v, w, \dots)| a \\ & + |\psi(u+a\zeta, v+b\zeta, w+c\zeta, \dots) - \psi(u, v, w, \dots)| b \\ & + |\chi(u+a\zeta, v+b\zeta, w+c\zeta, \dots) - \chi(u, v, w, \dots)| c + \dots \end{aligned}$$

külömbőség számértéke kisebb, mint λ . Irjuk egy ízben ζ factorait a és b kivételével zérusnak:

$$\begin{aligned} & |\{\varphi(u+a\zeta, v+b\zeta, w, \dots) - \varphi(u, v, w, \dots)\} a + \\ & \quad + \{\psi(u+a\zeta, v+b\zeta, w, \dots) - \psi(u, v, w, \dots)\} b| \\ & < \lambda. \end{aligned}$$

Mivel φ az összes változók szerint folytonos, ψ pedig a v, w, \dots változók összesége szerint folytonos, úgy ζ felső számhatára lehet oly kicsiny, hogy

$$\begin{aligned} & |\varphi(u, v, w, \dots) - \varphi(u+a\zeta, v+b\zeta, w, \dots)| < \lambda \\ & |\psi(u+a\zeta, v, w, \dots) - \psi(u+a\zeta, v+b\zeta, w, \dots)| < \lambda. \end{aligned}$$

A három egyenlőtlenség rendén

$$|\psi(u+a\zeta, v, w, \dots) - \psi(u, v, w, \dots)| < (1 + |a| + |b|) \lambda,$$

tehát ψ folytonos függvénye u -nak az értéktartomány belsejében. Így e cikk első részéből folyólag ψ , azaz $\partial f: \partial v$ valamennyi változó szerint folytonos az értéktartomány belsejében. Hasonló módon következik, hogy $\partial f: \partial w$ az u folytonos függvénye, és, hogy a v folytonos függvénye, tehát, hogy valamennyi változó szerint folytonos az érték-tartomány belsejében, sít.

Értelmezések.

Néhány kétesebb jelentményű szólás-mód esetleges félremagyarázásának elhárítását célozzák a következő értelmezések.

1.) Egy iránynak a cosinusain ennek az iránynak az irány-cosinusai értendők.

2.) Egy mennyiség vagy érték nagysága mindig az abszolútus értéket jelenti.

Továbbá, valahányszor egy mennyiség felső számhatáráról van a szó, ez mindig úgy értendő, hogy a mennyiség mind azt az értéket fölveheti, de csakis mindazt, amelynek a nagysága bizonyos számértéken túl nem hág, amely számérték a felső számhatár.

3. Végtelen nagy mennyiségen mindig abszolútus érték szerint végtelen nagy értendő.

4.) A véges jelző mindig csak a végtelen nagyot zárja ki.

5.) Különös kijelentés hiányában egy függvény folytonosságában mindig a végeesség és egyértékűség követelése is bele értendő a folytonosságnak a XI. cikkben is foglalt definitiójával egyezően.

6.) Több változó függvényének a folytonosságán nem csupán külön-külön az egyes változók szerint való folytonossága gondolandó, hanem egészen általános folytonossága a XI. cikk definitiójának megfelelően.

7.) Hasonlóképp több változó függvényének a deriválhatóságán nem csupán az egyes változók szerint való partialis deriválhatósága értendő, de egészen általános, bármely módon való egyszeres deriválhatósága, még pedig olyképp, hogy, ha u, v, \dots azok a változók, és Φ a függvény, úgy bármely deriválható függvényei legyenek az u, v, \dots változók az s parametrumnak:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial v} \frac{dv}{ds} + \dots$$

Ugyanezt jelentik az illetén szólásmódok is: korlátlanul deriválható egyszer, deriválható valamennyi változó szerint, deriválható valamennyi változóra.

8.) Tegyük föl, hogy a $\partial\Phi:\partial u$ stb. partialis deriváltak is deriválható függvényeik az u, v, \dots változóknak, és $u, v, \dots, du:ds, dv:ds, \dots$ deriválható függvényei legyenek a ζ parametrumnak. Akkor $d\Phi:ds$ deriválható függvénye ζ -nak, és

$$\frac{d^2\Phi}{dsd\zeta} = \frac{\partial\Phi}{\partial u} \frac{d^2u}{dsd\zeta} + \dots + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} \frac{du}{d\zeta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial u \partial v} \frac{dv}{d\zeta} + \dots \right) \frac{du}{ds} + \dots$$

Igy értendő mindig egy több-változós függvény kétszeres deriválhatósága, sít.

9.) Szó van a független változók oly különös értékeihez tartozó deriváltakról is, amely értékek mellett ezek a deriváltak definitiószerűleg nem léteznek. Ez mindig így értendő: Képezve gondoljuk a deriváltakat a független változók oly értékeihez, amelyek mellett definitiószerűleg léteznek, tehát határozott véges értékkel bírnak. Azután a független változókat folytonos változtatással valamely különös értékeikbe változtatjuk. Azt a határozott végtelen nagy értéket, vagy azt a többé-kevésbbé határozatlan értéket, értéktartományt, tulajdonítjuk most a deriváltaknak, amely felé a független változók folytonos változtatásának összes módjai révén terelődnek.

10.) Különös kijelentés hiányában:

Vonalon mindig oly véges hosszúságú vonal értendő, amely bír legalább is azzal az alyticus tulajdonsággal, hogy egyes pontok

kivételével minden helyen határozott normalis síkja van, amelynek az iránya folytonosan változik a vonal mentén.

Fölületen mindig oly véges kiterjedésű fölület értendő, amely bír legalább is azzal az analyticus tulajdonsággal, hogy egyes pontok és vonalak kivételével minden helyen határozott érintő síkja van, amelynek az iránya folytonosan változik a fölület mentén.

Téren a végtelen tér afféle része értendő mindig, amelyet egy, vagy véges számú több összefüggő fölület határol, olyan, aminőt az előbbi meghatározás jellemez.

11.) Egyes pontok egy vonalban, fölületben, térben, egyes vonalak egy fölületben, térben, egyes fölületek egy térben, mindig véges számú pontot, vonalat, fölületet jelentenek a főtebb jellemzett értemény szerint.

12.) Egy fölület határa a fölületet teljesen határoló egy, vagy több összefüggő vonal a főtebb jellemzett értemény szerint.

Egy tér határa, a tért teljesen határoló egy, vagy több összefüggő fölület a főtebb jellemzett értemény szerint.
