AZ ALGEBRAI TESTEK ELMÉLETÉNEK ALKALMAZÁSA ALGEBRAI EGYENLETEK REDUKCZIÓJÁRA.

Szabó Pétertől.

Kronecker és *Dedekind* mondották ki és alkalmazták először öntudatosan ama fontos principiumot, hogy algebrai tételek bebizonyitására csupán algebrai (szorosabban véve: arithmetikai) módszereket kell felhasználni.

Ennek a felfogásnak alapján a csoport elmélet alkalmazása algebrai kérdésekre idegenszerű, tehát kerülendő.

Ilyen törekvés szolgálatába szegődött ez a dolgozat, melynek megirására ösztönzést *G. Frobenius* urnak „Theorie der algebraischen Gleichungen" czimű, 1892—3-ban Berlinben tartott előadásaiból meritettem.

Czélom volt: Abel egyik tételének *O. Hőlder*-től származó általánosítását [1]) a *Dedekind* alkotta „algebrai testek" elméletének segélyével bebizonyítani.

Előre bocsátottam nevezett elméletet, az egyenletek tanára való alkalmazáshoz idomítva. Tettem ezt részint azért, mert *Dedekind* a maga elméletét a felsőbb arithmetikára való tekintettel fejleszti ki,[2]) részint mert sikerült egyes pontokban tovább kiterjesztenem. De ezektől eltekintve, magyar mathematikai irodalmunk hiányossága is késztetett erre, a mennyiben épen csak a mondottam elmélet pár alapfogalmát tárgyalja.[3])

Dolgozatomnak ez a része (I—III.) közel áll módszerére nézve

---

[1]) *O. Hölder* Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. Math. Annalen XXXIV. p. 26—56.

[2]) *Dedekind.* Dirichlet's Vorlesungen ueber Zahlentheorie 3 Auflage. Braunschweig. 1879. XI. Supplement.

[3]) *König Gy.* Analizis I. 164 - 169 l és *Kürschák J.* Math. és Physikai Lapok. II. 373—380 l.

P. Bachmann egy értekezéséhez, [1]) csakhogy nála a „szorzat“ és „osztó“ fogalmak következetes használata hiányzik. E két fogalom jelentőségének felismerését és következetes felhasználását Frobenius úr említett előadásainak köszönöm. Ugyancsak az ő előadásai után közlöm a IV. 5. tételt is.

Az V. szakasz foglalatát teszi Hölder említett tételének tárgyalása: az elmélet alkalmazása algebrai egyenletek redukcziójára. Az Abel-féle tétel, melynek általánosításáról szó van, következő:

Ha egy egyenlet gyökjelekkel megoldható, a megoldás hozható olyan alakra, hogy az összes előforduló gyökjelek az adott egyenlet gyökeinek és egység-gyököknek raczonalis függvényei, melyeknek együtthatói ugyanabban az értelemben raczionalisok, mint az adott egyenlet együtthatói.

Az egységgyökök nem mindig raczionalisok az adott egyenlet gyökeiben; ezért czélszerű az eljárás olyan módosítása, hogy tiszta egyenletek helyett először primszámfokú *Abel*-féle egyenletekre redukálunk.

Ha egy egyenlet Abel-féle egyenletek sorára redukálható, végezhető a redukczió úgy, hogy a segéd-egyenletek gyökei az eredeti egyenlet gyökeinek raczionális függvényei; egység-gyökök bevezetése fölöslegessé válik.

Az algebrailag „megoldhatatlan“ egyenleteknél is hasonlóan járhatunk el. Ilyen egyenleteket először egyszerű egyenletekre redukálunk, az az olyanokra, melyeknek Galois-féle csoportja egyszerű. Az egyszerű egyenletek redukálása normális egyenletre, melynek csoportja ugyanaz, második feladat, mely külön tárgyalható.

Az eljárás — általában — következő lesz: Állítsunk fel egy egyszerű segéd-egyenletet, melynek együtthatói az eredetileg adott racz. tartományba tartoznak. Adjungáljuk ennek összes gyökeit; az új racz. tartományban állítsunk fel más segéd-egyenletet, melynek csoportja szintén egyszerű. A második segéd-egyenlet összes gyökeit is adjungáljuk, s folytassuk e műveleteket így tovább. Az utolsó segéd-egyenlet gyökeinek adjungálása után legyenek az eredeti egyenlet összes gyökei raczionalisak.

---

[1]) *P. Bachmann*. Ueber Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen. Math. Annalen XVIII. p. 449—468.

Kérdezhetjük: milyenek a segéd-egyenletek csoportjai, mennyire vannak ezek meghatározva, mekkora a segéd-egyenletek száma, és milyenek gyökeik?

Alább, a „csoport" helyére, mint az algebra körében aequivalens fogalom: az „algebrai test" lép.

A jelölésre nézve megállapitjuk, hogy minden függvény jel raczionalis függvényt jelentsen, melynek együtthatói az adott $R = [\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots, \mathfrak{R}^{(n)}]$ raczionalis tartományhoz[1]) — terminologiánkban testhez — tartoznak. Erre az R tartományra vonatkoztatva értendő, ha kifejezetten más kikötést nem tettünk, a függvények *reduktibilis* vagy *irreduktibilis* volta.

Az irreduktibilis egyenleteket, melyekről szó van, állandóan

$$F(y) \equiv y^r + c_1 y^{r-1} + c_2 y^{r-2} + \ldots + c_r = 0$$

alakban adottaknak szupponáljuk.

I.[2])

1 §. Számoknak olyan sokasága, melynek egyénei, végesszámú raczionalis műveletekkel összekapcsolva, ismétlődnek, *számtestet*, rövidebben *testet* (Zahlenkörper, *Dedekind* szerint) alkot.

Legegyszerűbb példa: a közönséges raczionalis számok alkotta test. Az algebrai számok összesége szintén test; az ebből kiválthtató *algebrai* vagy *véges testekről* lesz szó a következőkben.

Az

$$F(y) = 0,$$

n-ed foku irreduktibilis egyenlet egyik gyöke legyen y_1, $F(y)$ együtthatói tartozzanak R raczionalis testhez;[3]) y_1-et *R-ből származott* algebrai számnak mondjuk.

y_1-nek összes raczonalis függvényei *testet* alkotnak, melyet

---

[1]) *Kronecker.* Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebr. Grössen. Crelle Journal Bd. 92. p. 3—5. és *I. Molk.* Sur une notion ... Acta Mathematica VI. p. 18—20.

[2]) L. *Dedekind.* Dirichlet's Vorlesungen ueb. Zahlentheorie 3-te Aufl. Supplement XI. és Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Bull. des Sciences math. 1877. p. 144—157.

[3]) R helyett a következendők analogiájára $R(r)$ lenne írandó, (r első fokú egyenlet gyöke.)

R-ből származott n-ed foku algebrai testnek mondunk, s így jelöljük:

$$A = R(y_1).$$

A test számjainak összesége az $F(y) = o$ irreduktibilis egyenlet segélyével redukálható y_1-nek n-nél kisebb fokú raczionalis egész függvényeinek összeségére, úgy hogy

$$\varphi(y_1) = c_0 + c_1 y_1 + \ldots + c_{n-1} y_1^{n-1}$$

alakban, ha $c_0, c_1, \ldots$ *R* összes számait végig futják, *A*-nak minden száma elő van állítva és mindenik csak egyszer.

A fokszám magára, az algebrai testre nézve is jellemző, mert az *A n-ed foku algebrai testben mindig található lineárisan független n szám, és tetszés szerint választott n + 1 szám között lineáris relaczió áll fen.*

Válasszunk *A* testből *n* számot

$$\eta_k = \sum_{l=o}^{n-1} c_{k,l} y^l \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1)$$

Ha a

$$|c_{k,l}| \qquad (k, l = 0, 1, \ldots n-1)$$

determináns értéke nem zérus, η_k számok egymástól függetlenek. (Ez a $c_{k,l}$ mennyiségek igen sokféle választásával elérhető.)

Ezt feltévén, válasszunk egy (n + 1)-ik számot

$$\eta_n = \sum_{l=o}^{n-1} c_{n,l} y^l$$

Minthogy a

$$\| c_{k,l} \| \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots n \\ l = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

matrixból kiváltható n-ed rendű determinánsok között van zérustól különböző, a

$$\sum_{i=o}^{n} U_i \eta_i = 0$$

relácziót kielégíthetjük olyan U_i értékekkel, melyek nem tünnek el mind.[1])

Ebből következik, hogy *A*-t nem származtathatja két olyan algebrai szám, melyek különböző fokú irreduktibilis egyenletek gyökei.

---

[1]) Mivel a tétel megfordítása is áll, a mint *Dedekind* i. h. megmutatja, ez is választható a definiczió alapjául.

Az $F(y) = 0$ egyenlet definiálta konjugált algebrai számok

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

származtatnak n testet:

$$R(y_1), R(y_2), \ldots, R(y_n);$$

ezeket *konjugált algebrai testeknek* nevezzük.

Két, ugyanabból a ráczionális testből származott algebrai testnek

$$A = R(y), B = R(z)$$

egymáshoz való viszonyát következő módon jellemezzük:

Ha A tartalmazza B összes számait, s azonkivül másokat is, *B osztója A-nak* és igy jelöljük:

$$A > B \quad \text{vagy } B < A.$$

Ha A tartalmazza B összes számait, és viszont, *A egyenlő B-vel:*

$$A = B.$$

Az értelmezésekből folyólag, ha

$$A > B, \quad B > C,$$

akkor:

$$A > C,$$

és ha

$$A = B, \quad B = C,$$

úgy

$$A = C.$$

Az alkalmazások czéljából két fontos fogalom: algebrai testek *legkisebb közös többszöröse* vagy *szorzata és legnagyobb közös osztója*, részletesebb kifejtésére lesz szükség.

2 §. Legyenek

$$A = R(y), B = R(z), C = R(u), \ldots, M = R(w)$$

sorrend szerint $a, b, c, \ldots, m$ fokú algebrai testek, számuk legyen ν.

A konjugált számok sora:

$$\begin{array}{l} y_1, y_2, \ldots\ldots, y_a; \\ z_1, z_2, \ldots\ldots, z_b; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_1, w_2, \ldots\ldots w_m; \end{array}$$

index nélküli betűk jelentsék a konjugált értékek valamelyikét.

$A, B, \ldots M$ testek *szorzatának*, vagy *legkisebb közös többszörösének* nevezzük azt a testet, mely ezek összes számait, és csakis ezeket tartalmazza, a melynek jele

$$\Omega = R\,(y, z, \ldots, w)$$

Kimutatjuk, hogy létezik Ω-ban olyan mennyiség, melylyel $y, z, \ldots w$ valamennyien raczionalisan kifejezhetők, tehát Ω *algebrai test*.

Vezessük be a határozatlan ρ mennyiséget és alakítsuk:

$$s = y + z\rho + u\rho^2 + \ldots + w\rho^{\nu-1} \tag{1}$$

kifejezést; ρ-t meghatározhatjuk úgy, hogy $y, z, \ldots$ helyére beírva a konjugált értékeknek

$$N = abc \ldots m$$

számú kombináczióit s összes értékei különbözők legyenek.

Valóban, az

$$y_\alpha + z_\beta\rho + \ldots + w_\mu\rho^{\nu-1} = y_\rho + z_\sigma\rho + \ldots + w_\tau\rho^{\nu-1}$$

egyenlőségek mindenike legfeljebb $\nu-1$ különböző ρ-érték mellett teljesül, úgy hogy összesen legfeljebb

$$\frac{1}{2}N(N-1)(\nu-1)$$

érték kizárásával, ρ számára még mindig végtelen sok raczionalis, sőt egész számú értéket választhatunk, melyeket (1) be írva s a követelésnek megfelelő szám lesz.

Ezzel az s számmal Ω-nak tetszőleges

$$\omega = \theta\,(y, z, u, \ldots, w) \tag{2}$$

száma raczionalisan kifejezhető.[1])

Jelöljék

$$s_1, s_2, \ldots, s_N$$

s-nek $x, y, \ldots$ konjugált értékrendszereinél felvett, különbözőknek feltett értékeit;

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N$$

ω értékeit $y, z, \ldots$ konjugált értékrendszerek ugyanazon sorrendje mellett.

---

[1]) E végből elég volna s-et csupán azzal szorítni meg, hogy $y, z, \ldots$ mennyiségekben raczionalis és számra N különböző értéke legyen.

A

$$\Phi(t) = \prod_{i=1}^{N} (t - s_i) \tag{3}$$

szorzat t határozatlan mennyiség raczionális egész függvénye; a következő kifejezés

$$\Phi(t) \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega_i}{t - s_i} = \Psi(t) \tag{4}$$

szintén az, mert mindkettő $y, z, \ldots$ összes konjugált értékeiben szimmetrikus.

Irjuk itt

$$t = s$$

és vegyük tekintetbe hogy

$$\left[\frac{\Phi(t)}{t - s_1}\right]_{t = s_1} = \Phi'(s_1)$$

nem tünik el, ezért (az indexet elhagyva)

$$\omega = \frac{\Psi(s)}{\Phi'(s)} \tag{5}$$

raczionalis függvénye s-nek.

E tételt [1]) következőképen is fogalmazhatjuk:

R raczionális testből származott, véges számmal levő $y, z, \ldots$ algebrai számokhoz mindig található olyan, ugyanabból a testből származott szám s, melynek mindenik raczionális függvénye.

Jegyzet. Az Ω test foka nem szükségképen N.

Ha $$\Phi(t) = 0$$

egyenlet reduktibiiis, Ω foka $\Phi(t)$-nek azon irreduktibilis faktorának fokszáma, melynek s_1 gyöke.

3 §. A konjugált algebrai testek legkisebb közös többszörösét *ezek normájának* nevezzük.

Olyan test, mely konjugáltjaival egyenlő, (önnön magának normája) *noımális test.*

Szükséges és elégséges feltétel arra, hogy A normális test, az: hogy y_1 konjugált számai között van olyan, a mely egy másiknak ráczionális függvénye.

---

[1]) *Abel.* Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Oeuvres compl. 1881. I. 547 l.

Minthogy: $y_1, y_2, \ldots y_n$ az n-ed foku

$$F(y) = 0$$

irreduktibilis egyenlet gyökei, abból hogy y_i az y_k-nak raczionalis függvénye, következik: hogy mindenik gyök minden másiknak raczionális függvénye; tehát $F(y) = 0$ normális egyenlet, és

$$R(y_1) = R(y_2) = \ldots = R(y_n).$$

De viszont

$$R(y_i) = R(y_k)$$

egyenlőség maga után vonja ezt:

$$y_i = \psi(y_k).$$

Ennek felhasználásával bizonyítható következő

Tétel: Algebrai test normája normális test.

Legyenek

$$A_i = R(y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

n konjugált test.

Az n-ed foku irreduktibilis egyenlet, mely A_i-hoz tartozik, legyen mint előbb:

$$F(y) = 0.$$

A_i normáját jelölje

$$C = P(z),$$

hol (2.) szerint z alakja

$$z = y_1 + y_2\rho + \ldots + y_n\rho^{n-1}.$$

De most elég ρ-t úgy választani, hogy a konjugált értékrendszerek mellett z-nek $N = n!$ különböző értéke legyen:

$$z_1, z_2, \ldots z_N;$$

mert y_i konjugált mennyiségeknek ugyanennyi különböző (ismétlésnélküli) permutácziója van. Következő szorzat, hol t határozatlan mennyiség,

$$\Phi(t) = (t - z_1)(t - z_2) \ldots (t - z_N)$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$-ben szimmetrikus, tehát t-nek raczionalis, egész függvénye. A

$$\Phi(t) = 0$$

egyenletnek együtthatói R-hez tartoznak, és z gyöke.

A ρ mennyiséget így választván:

$$y_1 = \varphi_1(z),\ y_2 = \varphi_2(z), \ldots\ldots, y_n = \varphi_n(z). \qquad (7)$$

Legyen

$$G(t) = 0 \qquad (8)$$

$\Phi(t)$-nek az az irreduktibilis faktora, melynek z_1 gyöke, egy másik gyökét jelölje z^α; mivel ez

$$z^\alpha = y_{\alpha_1} + y_{\alpha_2}\rho + \ldots + y_{\alpha_n}\rho^{n-1}$$

alakú; ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ az $1, 2, \ldots n$ valamely permutácziója), (7) tekintetbe vételével

$$z_\alpha = \Psi(z) \qquad (9)$$

honnan már következik, hogy $G(t) = 0$ normális egyenlet és C normális test.[1])

C szokásos elnevezéssel *az A_1-hez tartozó Galois-féle test*: $G(t) = 0$ az $F(y) = 0$ egyenlet *Galois-féle rezolvens egyenlete*. A Galois-féle egyenlet fokszámát (g) szokás az $F(y)$ egyenlet *rendjének* nevezni. A $G(t) = 0$ egyenletnek az a nevezetes tulajdonsága, hogy egy gyökével az $F(y) = 0$ egyenlet összes gyökei ráczionálisan kifejezhetők.

II.

1. §. A legnagyobb közös osztó fogalmának értemezése előtt egy test osztóival foglalkozunk.

Nyilvánvaló, hogy algebrai testnek minden osztója algebrai test. R-rel és önnönmagával minden algebrai test osztható; ha más osztója egy testnek nincsen: *primitiv testnek* mondjuk.

Legyenek:

$$A = R(y),\ B = R(z)$$

két R-ből származott n, illetőleg m-ed fokú algebrai test; az irreduktibilis egyenletek, melyeknek y, z gyökei sorrend szerint:

$$F(y) = 0,\ G(z) = 0;$$

---

[1]) v. ö. *A. Kneser.* Arithmetische Begründung algebraischer Sätze. Crelle J. 102. 29. l.

P. Bachmann. Ueber Galois' Theorie. Math. Annalen XVIII. 453. l.

y, z konjugált számai:

$$y, y_1, \ldots y_{n-1}; \quad z, z_1, \ldots z_{m-1}.$$

B osztója A-nak, ha minden száma, tehát z is, előfordul A-ban. (I. 1. §.) Azt, hogy z A-hoz tartozik, kifejezi

$$z = \varphi(y) \tag{1}$$

egyenlet. Az osztóknak alaptulajdonságát mondja ki következő

Tétel. *Az A, n fokú test minden osztójának fokszáma osztója n-nek.*

Jelöljék y konjugált értékeinél z értékeit

$$z = \varphi(y), \quad z_1 = \varphi(y_1), \ldots \quad z_{n-1} = \varphi(y_{n-1})$$

Ezekkel szerkesszük a

$$\Phi(t) \equiv (t-z)\,(t-z_1) \ldots (t-z_{n-1}) \tag{2}$$

vagy

$$\Phi(t) \equiv (t-\varphi(y))\,(t-\varphi(y_1)) \ldots (t-\varphi(y_{n-1}))$$

szorzatot, a mely $y_1, \ldots y_{n-1}$-ben szimmetrikus, együtthatói raczionálisak.

A

$$\Phi(t) = 0,$$
$$G(z) = 0$$

egyenleteknek közös gyöke

$$t = z = \varphi(y),$$

vagyis

$$\Phi(\varphi(u)) = 0,$$
$$G(\varphi(u)) = 0$$

egyenleteknek, hol u határozatlant jelöl, $u = y$ közös gyökük. Ezért $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ is közös gyökeik; tehát ($z = \varphi(y), \ldots$ lévén)

$$z, z_1, \ldots z_{n-1}$$

mind gyökei $G(z) = 0$ egyenletnek.

A $t = z$ közös gyök miatt $\Phi(t)$ osztható $G(t)$-vel, tehát

$$\Phi(t) = G(t).\, Q_1(t)$$

Azonban $\Phi(t) = 0$ gyökei közül néhány $Q_1(t) = o$ nak is gyöke, de mindenik gyöke $G(t) = 0$-nak, tehát

$$Q_1(t) = G(t).\, Q_2(t)$$

Ez eljárást véges számszor ismételve, végül

$$\Phi(t) = (G(t))^r$$

honnan a két oldalon a fokszámokat összehasonlítva:

$$n = mr. \tag{3}$$

Két esetet különböztessünk meg:

$$r = 1,\ r > 1.$$

A. $$r = 1,\quad m = n$$

Most $$\Phi(t) = G(t),$$

tehát $1, z, z^2, \ldots z^{n-1}$ A testben n, egymástól lineárisan független mennyiség: ezért

$$\begin{aligned} 1 &= a_{00} + a_{01}\ y + \ldots + a_{0,n-1}\, y^{n-1} \\ z &= a_{10} + a_{11}\ y + \ldots + a_{1,n-1}\ y^{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{n-1} &= a_{n-1,0} + a_{n-1,1}\, y + \ldots + a_{n-1,n-1}\ y^{n-1} \end{aligned} \tag{4}$$

rendszer determinánsa

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 0, 1 \ldots n-1,)$$

nem zérus. A (4) egyenletrendszerből y kiszámítható mint

$$y = \chi(z)$$

hol χ együtthatói véges rácz. számok. Azaz A osztója B-nek; tehát minthogy feltevés szerint B osztója A-nak:

$$A = B.$$

Ha olyan mennyiségeket, melyeknek $n-1$ első hatványával A valamennyi száma linearisan előállitható *primitiv mennyiségeknek* nevezzük, következő tételt mondhatjuk ki:

Hogy y primitiv mennyiségnek ráczionális függvénye

$$z = \varphi(y)$$

primitiv mennyiség legyen, arra szükséges és elégséges, hogy z y konjugált értékeinél különböző értékeket vállaljon el.

B. $$r > 1,\ n = rm.$$

Mivel ebben az esetben

$$z, z_1, \ldots\ , z_{n-1}$$

sorban m különböző érték mindenike egyenlő-sokszor fordúl elő, megállapitható a jelölés úgy, hogy ezek

$$\begin{array}{l} z=\varphi(y) \quad =\varphi(y') \quad =\varphi(y'') \quad =\ldots=\varphi(y^{(r-1)}), \\ z_1=\varphi(y_1) \quad =\varphi(y'_1) \quad =\varphi(y''_1) \quad =\ldots=\varphi(y_1^{(r-1)}), \qquad (5) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{m-1}=\varphi(y_{m-1})=\varphi(y'_{m-1})=\varphi(y''_{m-1})=\ldots=\varphi(y_{m-1}^{(r-1)}) \end{array}$$

legyenek. A test minden osztójához tartozik olyan $\varphi(y)$ mely primitiv mennyiség, de nem minden $\varphi(y)$ származtatja A-nak osztóját.

Ha az eddigi raczionalis számokon kivül z-t is ismertnek tekintjük, a raczionális számok testét bővitettük, mert most B test összes számai ráczionálisok. Úgy beszélünk: A-hoz B-t *adjungáljuk*, és szimbolikusan, hányados alakban jelöljük:

$$\frac{A}{B}$$

(Ha $B=R$, $\frac{A}{R}=A$)

I. Tétel: *B osztónak adjungálása után A fokszáma redukálódik; ugy hogy A fokszámát B-ével osztjuk.*

Ennek bizonyitására megjegyezzük, hogy t-vel határozatlan mennyiséget jelölvén, most

$$\varphi(t) - z = 0 \qquad (6)$$

ráczionalis együtthatókkal biró egyenlet, melynek gyökei közül

$$t = y,\ y',\ \ldots\ y^{(r-1)}$$

az

$$F(t) = 0 \qquad (7)$$

egyenletnek is gyökei. A két egyenlet legnagyobb közös osztója

$$f(t, z) = (t-y')\ \ldots\ (t-y^{(r-1)})$$

melynek együtthatói B-hez tartoznak, (ez mindig ráczionalis uton meghatározható). Az

$$f(t, z) = 0 \qquad (8)$$

egyenletnek gyöke $t=y$; kimutatjuk, hogy irreduktibilis egyenlet. Ugyanis ha $f_0(t, z)$ amaz irreduktibilis szorzója $f(t, z)$-nek, melynek $t-y$ osztója: akkor

$$f_0(t,\varphi(t)) = 0$$

egyenletnek $F(z)=0$ irredukt. egyenlettel $t=y$ közös gyöke lévén

$$f_0(y, \varphi(y)) = 0,\ f_0(y',\varphi(y')) = 0,\ \ldots,\ f_0(y^{(r-1)}, \varphi(y^{(r-1)})) = 0,$$

vagy:

$$f_0(y, z) = 0,\ f_0(y', z) = 0, \ldots f_0(y^{(r-1)}, z) = 0;$$

következőleg:

$$f(t, y) \equiv f_0(t, y),$$

az az f maga irreduktibilis B-ben, fokszáma pedig

$$r = \frac{n}{m}$$

Következtetések.

1. *Az* $f(t, y_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ *egyenletek a konjugált* B_i *testekben irreduktibilisek.*

Ezeknek szorzata:

$$f(t, z)\ f(t, z_1) \ldots f(t, z_{m-1})$$

t-nek n fokú egész függvénye, együtthatói R-hez tartoznak, mert z_i-ben szimmetrikus, azonkivül osztható $(t - y)$-nal — tehát

$$F(t) \equiv f(t, z).\ f(t, z_1) \ldots f(t, z_{m-1}). \qquad (9)$$

2. A megelőző tételnek általánositása:

Ha $g(t, y)$ *B-ben redukálható függvény, akkor* $g(t, y_i)$ *a konjugált* B_i *testben szintén olyan.*

Feltévén ugyanis, hogy:

$$g(t, z) = g_1(t, z).\ h(t, z)$$

hol g_1 és h együtthatói B-hez tartoznak, jelöljünk u-val határozatlan mennyiséget, irjuk

$$\psi(t, u) \equiv g(t, u) - g_1(t, u).\ h\ (t, u),$$

s tekintsük pillanatra t-t ismertnek.

Minthogy a

$$G(u) = 0$$
$$\psi(t, u) = 0$$

egyenleteknek közös gyökük $u = z$, $G\ (u) = 0$ irreduktibilis voltánál fogva:

$$\psi(t, z_i) = 0; \qquad (i = 1, 2, \ldots m-1)$$

azaz

$$g(t, z_i) = g_1(t, z).\ h_i(t, z_i),$$

a mi bizonyitandó volt.

3. Ha B normális test;

$$z_i = \theta_i(z);$$

az $f(t, \theta_i(z))$ együtthatói B-hez tartoznak; ezért

$$F(t) \equiv f\ (t, z).\ f(t, \theta_1(z)) \ldots f(t, \theta_{m-1}(z))$$

$F(t)$-nek felbontása B-ben irreduktibilis szorzókra.

Mikor B épen egy

$$H(w) = 0$$

k-fokú egyenlethez tartozó Galois-féle test, melynek gyökei

$$w, w_1, \ldots w_{k-1},$$

ekkor

$$z = w + w_1\rho + \ldots + w_{k-1}\rho^{k-1};$$

B adjungálása egyértékü az összes w-k adjungálásával, melyek (l. 3. §.) z-nek, tehát y-nak is ráczionális függvényei. Ugy, hogy az eddigiekből még következő tétel vonható le:

Ha $F(t) = 0$, $H(w) = 0$

irreduktibilis egyenletek együtthatói R-hez tartoznak, w ráczionalis függvénye az első egyenlet gyökeinek, és $H(w) = 0$ összes gyökeinek adjungálása után $F(y)$ reduktibilis lesz, egyenlő fokú irreduktibilis szorzókra esik széjjel.[1])

2. §. Az (5) egyenletrendszer mutatja, hogy z_i konjugált értékek m r-tagú rendszerbe osztják y_i számokat. Kimutatjuk, hogy az a beosztás B-re nézve jellemző:

Ha $\eta = \lambda(y)$

függvény m értékű és az y_i-k ugyanazon beosztása tartozik hozzá, mint z-hez, akkor z és η A ugyanazon B osztójának primitiv mennyiségei.

Legyenek:

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda(y) = \lambda(y') = \ldots = \lambda(y^{(r-1)}) \\ \eta_1 &= \lambda(y_1) = \lambda(y_1) = \ldots = \lambda(y_1^{(r-1)}) \qquad (10) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{m-1} &= \lambda(y_{m-1}) = \lambda(y'_{m-1}) = \ldots = \lambda(y_{m-1}^{(r-1)}) \end{aligned}$$

az η-val konjugált számok, hol az y-k elrendezése épen az, mint (5) alatt. Szerkeszszük

$$G(t)\left\{\frac{\eta}{t-z} + \frac{\eta_1}{t-z_1} + \ldots \frac{\eta_{m-1}}{t-z_{m-1}}\right\}$$

kifejezést, a mely egész függvénye t határozatlan mennyiségnek, jelölje $Q(t)$.

Az (5) és (10) tekintetbe vételével a zárójelek közötti összegnek r-szerese mint az y_i-k szimetrikus függvénye irható:

[1]) Alább ki lesz mutatva, hogy a megszoritás: w ráczionális függvénye y-nak, nem szükséges.

$$G(t)\left\{\frac{\lambda(y)}{t-\varphi(y)}+\frac{\lambda(y')}{t-\varphi(y')}+\ldots+\frac{\lambda(y^{(r-1)})}{t-\varphi(y^{(r-1)})}\right.$$
$$+\frac{\lambda(y_1)}{t-\varphi(y_1)}+\frac{\lambda(y'_1)}{t-\varphi(y'_1)}+\ldots+\frac{\lambda(y_1^{(r-1)})}{t-\varphi(y_1^{(r-1)})}$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$\left.+\frac{\lambda(y_{m-1})}{t-\varphi(y_{m-1})}+\;.\;.\;.\;.\;.\;+\frac{\lambda(y_{m-1}^{(r-1)})}{t-\varphi(y_{m-1}^{(r-1)})}\right\}=rQ(t)$$

A zárójelközi kifejezés raczionális R-ben, honnan $t=y$ irtával, (v. ö. II. 1. §.) következik

$$\eta=\frac{Q(y)}{G'(y)}$$

De η m-értékü függvény, tehát csakugyan *primitiv mennyiség B testben.*

Megfontolván még hogy n-et véges számú módon választhatjuk szét két szorzóra:

$$n=m_i\, r_i,$$

és r_i tagu cziklusokat n mennyiség közül szintén véges számszor választhatunk ki; következik, hogy *algebrai testnek véges számú osztói vannak.*

A mint Dedekind megmutatta, a tétel megfordítása is igaz[1]; úgy, hogy ez volna szerinte az algebrai test legczélszerübb definicziójának alapja. Azonban ennél a fok fogalma nem lép közvetetlenül előtérbe.

3. §. Az adjungálás fogalma kiterjeszthető tetszésszerinti testekre is. Föl fogjuk tenni, hogy ezek ugyanabból a ráczionális testből származnak. Ebben az esetben az I. tétel következőleg általánosul:

II. Tétel. *Ha A, B sor szerint n, m foku testek és B ill. A adjungálása után A ill. B fokszámai* n_1, m_1, *akkor mindig*

$$n_1 m = n\, m_1.\text{[2]}$$

A bebizonyitásra segédeszköz: a két test szorzata.

Az A és B-hez tartozó n illetőleg m-fokú irreduktibilis egyenletek számára az eddigi jeleket

$$F(y)=0,\quad G(z)=0$$

megtartván, legyen legkisebb közös többszörösük C, ennek primitiv mennyisége w,

---

1) Az id. m. 2-te Aufl. § 159.

2) A tétel Kroneckertől ered. Bizonyitva *A. Kneser:* Math. Annalen XXX. p. 194.

$$C = R(w);$$

hol ρ kellő megválasztása után

$$w = y + \rho z, \; y = \varphi(w), \; z = \psi(w).$$

Legyen az irreduktibilis egyenlet, melynek a w gyöke,

$$\mathfrak{H}(w) = 0$$

fokszáma pedig q.

Adjungáljuk C-hez B-t. A $C|B$ testben w eleget tesz

$$h(u, z) = 0 \tag{11}$$

$q : m$-fokú irreduktibilis egyenletnek, hol u határozatlan mennyiség. De az adjungálás után y és w egymásnak kölcsönösen raczionális függvényei: tehát y primitiv mennyiség $C|B$ testben, mely gyöke (11!) a következő irreduktibilis egyenletnek

$$h(u + \rho z, z) \equiv h_1(u, z) = 0, \tag{12}$$

melynek foka

$$n_1 = \frac{q}{m}. \tag{13}$$

Kimutatjuk, hogy $h_1(u, z)$ $F(u)$-nak osztója: $F(u)$ együtthatói B-hez is tartoznak, mert R minden testnek osztója; az

$$F(u) = 0$$
$$h_1(u, z) = 0$$

egyenletek közös gyöke $u = y$, tehát B adjungálása után F redukálható: $h_1(u, z)$-vel osztható.

Azonban ekkor (1. §.) szerint $F(u)$ osztható

$$h_1(u, z_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots m-1)$$

konjugált függvények mindenikével is. Ez a z_i konjugált értékekben szimmetrikus, u-ban q fokú szórzat:

$$h_1(u, z)\, h_1(u, z_1) \ldots h_1(u, z_{m-1})$$

csakis $F(u) = 0$ gyökeinél tünik el, együtthatói R-hez tartoznak, tehát $F(u)$ hatványa, még pedig a dimenziók összehasonlítása révén:

$$(F(u))^{\frac{q}{n}} = h_1(u, z).\, h_1(u, z_1) \ldots h_1(u, z_{m-1}). \tag{14}$$

Épen így látható be, hogy $C|A$ testben w és z primitiv mennyiségek. Ha

$$\overline{h}(u, y) = 0$$

ama q: n fokú irreduktibilis egyenlet, melynek w gyöke, z gyöke lesz

$$\overline{h}(\rho u+y, y) \equiv \rho^{m} \cdot h_2(u, y) = 0, \qquad m_1 = \frac{q}{n} \tag{15}$$

fokú egyenletnek,

$$(G(u))^{\frac{q}{m}} = h_2(u, y)\, h_2(u, y_1) \, . \, . \, . \, h_2(u, y_{n-1}).$$

(12) és (15) összehasonlításából látható, hogy tényleg

$$mn_1 = nm_1.$$

Abban az esetben ha $m_1 = 1$, B osztója A-nak; ha $n_1 = 1$, $m_1 = 1$, y és z ugyanazon test primitiv mennyiségei.

A tétel még így is fogalmazható:

Ha A algebrai test foka B m-ed fokú test adjungálása után n_1, ugy A és B szorzata $q = m n_1$ fokú.[1])

4. §. A tétel következőleg átalánosítható:

Ha A', A'', . . . , $A^{(k)}$ testek közül a ν-ik a $\nu - 1$ megelőző test adjungálása után r_ν fokú, szorzatuk fokszáma:

$$q = r_1 r_2 \, . \, . \, . \, r_k$$

Ez a tétel $k = 2$ esetében igaz; csak az bizonyítandó be, hogyha egy bizonyos ($k = \nu$) határig helyes, $\nu + 1$ re is áll. Ez pedig nem jár nehézséggel.

Feltévén ugyanis, hogy $y^{(i)}$ $A^{(i)}$-ben valamelyik primitiv menynyiség, és hogy

$$\xi = y' + y'' \rho + y''' \rho^2 + \, . \, . \, . + y^{(\nu)} \rho^{\nu-1}$$

(ρ czélszerü választása után)

$$q' = r_1 \, r_2 \, . \, . \, . \, r_\nu$$

fokú egyenletnek tesz eleget; adjungáljuk $R(\xi)$ testhez $A^{(\nu+1)}$-t. A kettő legkisebb közös többszöröse

$$R(y^{(\nu+1)} + \rho' . \, \xi)$$

a megelőző tétel szerint $q'' = q' . \, r_{\nu+1}$ fokú; mivel tételünk minden k értékre igazolva van.

Itt semmi megszorítás nincsen $A^{(i)}$ testeken, lehetnek közöttük egyenlők is.

Algebrai testek szorzatának fokszáma nyilván független az adjungálások rendjétől, bár különböző elrendezések mellett az r_ν számok változhatnak.

---

1) *A. Kneser*: Ueber die Gattung niedrigster Ordnung etc. Math. Annalen XXX. p. 198.

III.

1. §. Értelmezések.

a) Az $A^{(i)}_{(i=1,2,\ldots,k)}$ testek *legnagyobb közös osztója*, D, következőképen jellemezhető:

1. *D minden száma előfordul mindenikben.* Ha $A^{(i)}$-nek primitiv mennyisége $y^{(i)}$, D-nek t:

$$t = \theta_1(y') = \theta_2(y'') = \ldots = \theta_k(y^{(k)}).$$

2. $A^{(i)}$ *testek minden közös száma ráczionális függvénye t-nek;* az az: ha

$$t' = \chi_1(y') = \chi_2(y'') = \ldots = \chi_k(y^{(k)}),$$

ugy
$$t' = \chi(t).$$

D fokszáma az $A^{(i)}$ testek fokszámainak osztója, de nem szükségképen legnagyobb közös osztó.

b.) Jelöljünk R' és R''-vel két testet, a melyeket A' illetve A''-höz adjungálunk.

*$A'|R'$ test relative egyenlő $A''|R''$ testtel, ha van közös primitiv mennyiségük és fokszámuk egyenlő.**) E viszonyt igy jelöljük:

$$\frac{A'}{R'} \backsim \frac{A''}{R''}$$

2. §. Két testnek, továbbá legkisebb közös többszörösüknek és legnagyobb közös osztójuknak fokszámai között nevezetes összefüggés áll fenn.

Jelöljék az

$$A = R(y), \quad B = R(z)$$

m ill. n. foku testek legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját

$$C = R(w), D = R(t),$$

ezeknek fokszámait: q, r, hol

$$t = \theta_1(y) = \theta_2(z).$$

Bebizonyítjuk, hogy

$$mn \geq qr.$$

Legyenek az előbbi sorrendben, eme testekhez tartozó irreduktibilis egyenletek

$$F(y) = 0, \qquad G(z) = 0,$$
$$H(w) = 0, \qquad L(t) = 0,$$

*) A csoport elméletben, a relativ egyenlőség fogalmának megfelelő fogalom az *izomorfizmus*.

Adjungáljuk C-hez, B-t, A-hoz D-t. $C|B$ testben y gyöke a $q:n$ fokú irreduktibilis egyenletnek

$$h_1(u, z) = 0, \tag{1}$$

hol u határozatlan mennyiség, $A|D$ testben ennek:

$$f_1(u, t) = 0, \quad \text{vagy}$$
$$f_1(u, \theta_2(z)) = 0$$

melynek foka $m:r$ és együtthatói B-hez is tartoznak; B-ben ez az egyenlet reduktibilis és (1)-vel $u \doteq y$ közös gyöke, tehát

$$f_1(u, \theta_2(z)) = h_1(u, z).r_1(u, z);$$

honnan

$$\frac{m}{r} \geqq \frac{q}{n}.$$

$$mn \geqq qr.$$

Különös érdekü az az eset, midőn:

$$mn = qr.$$

Ekkor:

$$\frac{C}{B} \backsim \frac{A}{D},$$

(III. 1. §.!) mivel $\quad f_1(u, \theta_2(y)) \equiv h_1(u, y)$

3. §. Kérdés: az A, B testekre minő megszoritást ró az

$$mn = qr$$

egyenlőség?

Ezt a kérdést egész általánosságban nem tárgyaljuk. *Mindenesetre elégséges föltétele annak, hogy*

$$\frac{C}{B} \backsim \frac{A}{D}$$

az, hogy A/D normális test,

Bebizonyítás: Ha A/D normális test, úgy

$$f_1(u, t) = \prod_{i=1, 2, \ldots m|r} (u - y_i)$$

gyökei között

$$y_i = \vartheta_k^{(i)}(y_k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots : m|r)$$

alakú raczionális összefüggések állanak fenn.

De

$$f_1(u, t) = h_1(u, z).\ r_1(u, z)$$

egyenlőségből következik, hogy $h_1 = 0$ is normális egyenlet, együtthatói A-hoz és B-hez is tartoznak: az az D-hez.

Azonban D-ben $f_1(u, t)$ irreduktibilis, h_1-gyel $u = z$ közös gyöke, tehát h_1 is osztható f_1-gyel, a mi csak úgy lehet, ha

$$f_1(u, t) = h_1(u, z) \quad , \quad mn = qr;$$

az az:

$$\frac{C}{B} \backsim \frac{A}{D}.$$

Ezt a tételt kiegészíti a következő:

A $C/B \backsim A/D$ relativ egyenlőségből következik, hogy B/D normális test, tehát

$$\frac{C}{A} \backsim \frac{B}{D}.$$

Bebizonyitás:

$$f_1(u, t) = h_1(u, z) \tag{4}$$

egyenletbe beirva $t = \theta_2(z)$:

$$f_1(u, \theta_2(z)) = h_1(u, z) \tag{4'}$$

de, ez az egyenlőség igaz, z minden konjugált értéke mellett is:

$$f_1(u, \theta_2(z)) = h_1(u, z_i) \quad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

Vegyük tekintetbe, hogy a z-k jelölésének czélszerű megállapítása után

$$L(t) = 0$$

egyenlet (2. §. !) gyökei:

$$\begin{aligned} t &= \theta_2(z) = \theta_2(z') = \ldots = \theta_2(z^{(\mu-1)}) \\ t_1 &= \theta_2(z_1) = \theta_2(z_1') = \ldots\ldots = \theta_2(z_1^{(\mu-1)}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{r-1} &= \theta_2(z_{r-1}) = \theta_2(z'_{r-1}) \ldots\ldots = \theta_2(z_{r-1}^{(\mu-1)}), \end{aligned} \tag{5}$$

hol

$$m = r\mu.$$

A (4') egyenletből (5) alkalmazásával ezek következnek:

$$\begin{aligned} h_1(u, z) &= h_1(u, z') = \ldots\ldots = h_1(u, z^{(\mu-1)}) \\ h_1(u, z_1) &= h_1(u, z') = \ldots\ldots = h_1(u, z_1^{(\mu-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1(u, z_{r-1}) &= h_1(u, z_{r-1}) = \ldots = h_1(u, z_{r-1}^{(\mu-1)}) \end{aligned} \tag{6}$$

---

*) Csoport-elmélet körében analog tételt *Hölder*: Zur Reduction algebraischer Gleichungen. Math. Annalen XXXIV. p. 36. 37.

Az egy sorban szereplő z-k ráczionalis függvényei ugyanahoz a testhez tartoznak, a mi csak úgy lehet, ha

$$z_i = \Theta_i^{(k)}(z_k),$$

a hol z_i z_k olyan értékek, a melyek ugyanabban a sorban fordúlnak elő. Ebből következik:

A z_i konjugált számok r cziklusra oszlanak; egy cziklus m/r tagja közűl bármelyiknek a többi ráczionalis függvénye: B/D normalis test.

Ezért még

$$\frac{C}{A} \backsim \frac{B}{D}, \tag{7}$$

A relativ-egyenlőségnek másik következése, hogy a II. (14) alatt levezetett

$$(F(u))^{\frac{q}{n}} = h_1(u, z)\, h_1(u, z) \, . \, . \, . \, h_1(u, z_{m-1})$$

egyenlet mindkét oldala teljes $q:n$-ik hatvány, és így:

$$F(u) = h_1(u, z)\, h_1(u, z_1) \, . \, . \, . \, h_1(u, z_{(r-1)}) \tag{8}$$

Ily módon nyerjük az $F(u)$ felbontását B és konjugáltjaiban irreduktibilis szorzókra.

Ha B maga normális test, (8) szolgáltatja $F(u)$ felbontását B-ben irreduktibilis szorzókra. Ezzel a II. 1. §-ban, az utolsó tételben tett megszorítás elesik.

Összefoglalás.

A
$$\frac{C}{A} \backsim \frac{B}{D}, \; \frac{C}{B} \backsim \frac{A}{D}$$

relativ egyenlőségek bármelyike a másiknak következése. Az A/D, B/D testek közűl egyik minden esetre *normális test.*

IV.

1. §. A Galois-féle rezolvens egyenletet irreduktibilis egyenletekre nézve értelmeztük.*) Nehézség nélkül értelmezhető redukálható egyenletekre nézve is. Erre vezet következő

I. Tétel. *Két test szorzatának normája egyenlő normáik szorzatával.*

---

*) l. I. 3. §.

Ha $$A = R(y) \quad , \; B = R(z)$$
m, illet. n fokú testek normáit N_α, N_β ; szorzatukat
$$M = R(w)$$
ennek fokát q, normáját N_μ jelöli, a konjugált mennyiségek jelölését megtartva:
$$N_\alpha = R(y, y_1, \ldots y_{m-1}) \; ,$$
$$N_\beta = R(z, z_1, \ldots z_{n-1}) \; , \qquad (1)$$
$$N_\mu = R(w, w_1, \ldots w_{q-1}).$$

Azt mutatjuk meg, hogy $N_\alpha . N_\beta$ és N_μ egymásnak kölcsönösen osztói.

Megfontolván hogy:
$$y = \varphi(w), \; y_1 = \varphi(w_1), \ldots,$$
$$y = \psi(w), \; z_1 = \psi(w_1), \ldots :$$
nyilvánvalólag (I. 1. §.)
$$N_\alpha . N_\beta = R\left(\varphi(w), \varphi(w_1), \ldots ; \psi(w), \psi(w_1), \ldots\right)$$
osztója N_μ-nek. De másfelől
$$w = \chi(y, x), \; w_1 = \chi(y_1, z), \ldots ;$$
ugy hogy
$$N_\mu = R(\chi(y, z), \chi(y_1, z), \ldots)$$
osztója
$$N_\alpha N_\beta = R(y, y_1, \ldots, y_{n-1} ; z, z_1, \ldots, z_{m-1})$$
testnek. Ebből már a tétel helyes volta világos.

A tétel akárhány, véges számu test szorzatára nehézség nélkül kiterjeszthető.

Következés: Ha $F(y) = 0$ R-ben redukálható, és irreduktibilis szorzókra bontva:
$$F(y) = F_1(y) \, F_2(y) \ldots F_h(y)$$
az $F_i(y)$-hoz tartozó Galois-féle test N_i. $F(y)$ Galois-féle teste:
$$N = N_1 . N_2 \ldots N_h$$
nem más mint az $F(y)$-beli irreduktibilis szórzók G.-féle testjeinek szorzata.

II. Tétel. *Algebrai test osztójának normája osztója a test normájának.*

Az
$$A = R(y)$$
n fokú testnek legyen osztója:
$$D = R(t),\ t = \varphi(y)$$
r fokú test. Normáikat sorra N_α, N_δ-val jelölve:
$$N_\alpha = R(y, y_1, \ldots y_{m-1}),$$
$$N_\delta = R(t, t_1, \ldots t_{r-1}).$$
Ha $t = \varphi(y)$ relációra tekintettel vagyunk
$$N_\delta = R\ (\varphi(y), \varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_{n-1})),$$
ez az alak már mutatja állitásunk helyes voltát.

Következés:

Alább megmutatjuk, hogy algebrai egyenlet redukálására elég csak olyan segédegyenleteket felállitani, melyeknek gyökei racz. függvényei az adott egyenlet gyökeinek. Ilyen segédegyenletek *Galois-féle testei osztói az adott egylet Galois-féle testjének.*

3. §. **Segédtétel**: *Két normális testnek legkisebb közös többszöröse és legnagyobb közös osztója normális testek.*

Hogy
$$A = R(y), \quad B = R(z)$$
normális testek, kifejezik
$$y_\varkappa = \xi_\varkappa(y) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m-1) \qquad (2)$$
$$z_\lambda = \eta_\lambda(z) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1)$$
egyenletek.

Jelölje legkisebb közös többszörösüket M, legnagyobb közös osztójukat D. A tételt először M re, aztán D-re bizonyitjuk.

A. Ha
$$M = R\ (w)$$
és $w = y + \rho z$, $\quad y = \varphi(w)$, $z = \psi(w)$

továbbá w konjugált számjai közül egyik w_ν, akkor találhatunk olyan $\varkappa$ és λ indexeket, hogy
$$w_\nu = y_\varkappa + \rho z_\lambda,$$
(mert $w = \varphi(w) + \rho\ \psi(w)$ reláczió minden konjugált w érték mellett teljesül), vagy még
$$w_\nu = \xi_\varkappa(\varphi(w)) + \rho\eta_\lambda(\psi(w)),$$
az az:
$$w_\nu = \zeta_\nu(w). \qquad (3)$$

B. D-nek primitiv mennyiségét t-vel jelölvén:

$$D = R(t) \quad , \qquad t = \Psi_1(y) = \Psi_2(z)$$

Ha t_μ t-vel konjugált szám:

$$t_\mu = \Psi_1(y_\varkappa) = \Psi_2(z_\lambda);$$

vagy, (2)-re tekintettel:

$$t_\mu = \Psi_1(\xi_\varkappa(y)) = \Psi_2(\eta_\lambda(y)),$$

tehát t_μ közösen tartozik A-hoz és B-hez. De ekkor a legnagyobb közös osztó értelmezéséből (1. §.!) folyólag:

$$t_\mu = \Theta(t). \tag{4}$$

(3) és (4) a tétel igazolói.

Innen következik, hogy normális testeknek vannak olyan osztóik, melyek maguk is normális testek; ezeket röviden *normális osztók*-nak fogjuk nevezni.

4. §. **Tétel.** *Ha G normális test H adjungálása után redukálódik, ugyanolyan mértékben redukálódik a két test legnagyobb közös osztójának adjungálása után**)

A két test sorrend szerint legyen g és h fokú; szorzatuk (T) és legnagyobb közös osztójuk (D) legyenek t, illet. d fokuak.

Minthogy G, és egyszersmind G/D is, normális test:

$$\frac{T}{H} \backsim \frac{G}{D},$$

és

$$gh = td, \qquad t = gh/d. \tag{5}$$

A II. 3. §. szerint: ha H adjungálása után G foka g', G adjungálása után amannak foka h':

$$g' = t/h \quad , \qquad h' = t/g$$

az az:

$$g' = g/d \quad , \qquad h' = h/d. \tag{6}$$

honnan a bizonyítandó tétel következik.

Következések.

α) G normális test redukálásánál osztóinak adjungálása elkerülhetetlen.

β) Ha H normális test, melynek *normális osztója nincsen*, csak akkor redukálódhatik adjungálása után G, ha H osztója G-nek.

5. §. Algebrai egyenlet megoldása alatt, algebrai szempontból összes gyökeinek megadását értjük.

---

*) V. ö. *O. Hölder*. Zur Reduction der algebr. Gleichungen. Math. Annalen XXXIV. p. 47.

C. Jordan. Traité des subst. pg. 269., 270.

Ha egy egyenlet összes gyökei adva vannak, ismeretesek, azaz ráczionálisak a hozzájuk tartozó konjugált algebrai testek összes számai; tehát szorzatuknak, (az egyenlethez tartozó Galois-féle testnek) számai is ismeretesek. De viszont a Galois-féle rezolvens egyenlet egy gyökének megadása után az eredeti egyenlet összes gyökei ráczionalisok és a hozzájuk tartozó konjugált testek összes számai ismeretesek. (I. 3. §.)

Az egyenlet megoldása tehát teljesen aequivalens az ő Galois-féle rezolvensének megoldásával.

Az a kérdés: milyen egyszerübb müveletekre redukálható a Galois-féle rezolvens megoldása, ujra egy értékü avval a másikkal: milyen módon redukálható a hozzá tartozó normális test, kisebb fokú testekre. Itt és a következőkben jelölje algebrai egyenlet Galois-féle testét **G**.[1])

Az előbbi §. szerint redukczióra elég az adott egyenlet gyökeinek a IV. 4. §. értelmében való raczionalis függvényeit adjungálni.[2]) Ha a szimmetrikus függvényeken kivül ilyenek nem léteznek, és igy **G**-nek nincsen önmagától és R-től különböző normális osztója; ekkor **G**-t *egyszerü normális test*-nek nevezzük. Ha léteznek, mindenik gyöke egy-egy irreduktibilis egyenletnek: Ezeknek Galois-féle testjei normális osztói **G**-nek; ekkor azt mondjuk **G** *összetett normális test.*

Az összetett normális testek redukcziójának tárgyalása előtt segédtételt bocsátok előre.

Segédtétel. *Ha A, B normális testeknek szorzatuk M, legnagyobb közös osztójuk D, M-nek nincsen olyan normális osztója, mely osztója A-nak (B-nek) és D-t tartalmazza.*

Jelöljék A, B, M, D testek fokszámait sorra: m, n, q, r.

Minthogy A, B normális testek:

$$mn = qr.$$

Tegyük fel, hogy van olyan normális osztója M-nek, mely A-t osztja és D-t tartalmazza: legyen ez A', akkor (I. 1. §.):

[1]) A jelölés-változtatás részint a következő tárgyalások könnyebb áttekinthetéseért, részint csoport-elméleti azonlagos-jelölések kedvéért történik.

[2]) *F. Klein* szerint ezek a „természetes" irraczionalitások.

$$A > A' > D.$$

Ebből a föltevésből ellenmondásra jutunk.

Ha A' és B szorzatát M' jelöli, nyilvánvaló, hogy

$$M \geqq M' \geqq B.$$

Megmutatjuk, hogy egyenlőségek M'-el nem állhatnak fenn.

Először, nem lehet

$$M' = M.$$

Ugyanis ha D', A'-nak és B-nek legnagyobb közös osztója és A', M', D' fokszámait m', q', r' jelölik, a miatt hogy ezek normális testek:

$$q'r' = m'n. \tag{8}$$

Állitjuk, hogy

$$D' = D.$$

Mert D A'-t és B-t is osztja, de D' feltevésünk szerint legnagyobb közös osztó lévén,

$$D' > D;$$

másfelől D' osztója A és B-nek, de ezeknek D a legnagyobb közös osztójuk; tehát

$$D > D',$$

a mi csak ugy lehet, ha

$$D' = D, \ r' = r.$$

A (7) és (8)-ból láthatólag:

$$\frac{q}{q'} = \frac{m}{m'};$$

mivel feltettük, hogy $m' < m$, innen $q' < q$ és

$$M > M'$$

következik.

Másodszor, nem lehet

$$M = B$$

sem. Mert ekkor A' osztója B-nek is, következőleg

$$A' < D$$

volna, a mi $A' > D$ feltevésünkkel ellenkezik, tehát:

$$M > M' > B.$$

Azonban *ilyen M' nem létezik*; következésképen nem létezhetik olyan A' sem, mely A-nak osztója és D-t tartalmazza. (B és D-re nézve a bizonyitás épen igy megy.)

Értelmezések: **G** normális testnek *G' maximális normális osztója*, ha nincsen olyan normális test, mely **G**-t osztja és G'-t tartalmazza. G normális test normális osztói G', G'', . . . G^{μ}, R *hiánytalan sort* alkotnak, ha

$$\mathrm{G},\ G',\ G'',\ldots,\ G^{(\mu)}\ G^{(\mu+1)}$$

sorban mindenik test maximális osztója a megelőzőnek. Mivel G-nek csak véges számu normális osztói lehetnek, a sor utolsó tagja

$$G^{(\mu+1)} = R$$

Gondolható, hogy G-nek több maximális osztója van, úgy hogy többféle módon szerkeszthetünk ilyen hiánytalan sort.

Ezekről következő tétel áll:

III. Tétel. *Ha G-hez tartozó maximális normális osztóknak két hiánytalan sora*

$$\mathrm{G},\ G',\ G'',\ \ldots\ G^{(\mu)},\ R, \tag{9}$$

$$\mathrm{G},\ H',\ H'',\ \ldots\ H^{(\nu)},\ R; \tag{10}$$

akkor: 1) a két sorban az osztók száma egyenlő $\mu = \nu$

2) *a*
$$\frac{\mathrm{G}}{G'}\ \frac{G'}{G''},\ldots,\frac{G^{(\mu)}}{R};$$

és
$$\frac{\mathrm{G}}{H'},\ \frac{H'}{H''},\ldots,\frac{H^{(\nu)}}{R};$$

„hányados" testek, sorrendtől eltekintve, relative egyenlők.[1])

A bebizonyításnál a teljes indukczió módszerét használjuk. Feltesszük, hogy $\mu-1$ osztóra igaz a tétel. Szerkesszünk két új sort, G' és H' legnagyobb közös osztójának, D-nek felhasználásával:

$$\mathrm{G},\ G',\ D',\ D''\ \ldots,\ D^{(\lambda-1)},\ R; \tag{11}$$

$$\mathrm{G},\ H',\ D',\ D'',\ldots,\ D^{(\lambda-1)},\ R. \tag{12}$$

G legkisebb közös többszöröse G'-nek és H'--nek, mert nincsen olyan test, mely mindkettőjüket tartalmazza és osztója G-nek, ezért igazak a következő relativ egyenlőségek:

$$\frac{\mathrm{G}}{G'} \backsim \frac{H'}{D'},\ \frac{\mathrm{G}}{H'} \backsim \frac{G'}{D'},$$

[1]) l. *Netto.* Substitutionentheorie 1882. p. 92—95; 276.
Bachmann: Ueber Galois, Theorie Math. Annalen XVIII. p. 458. a tételt hiányosan adja.

s a bebizonyitott segédtétel értelmében $\mathfrak{G}$, G', D'; $\mathfrak{G}$, H', D', hiánytalan sorok; ezért (11) és (12) sorokra a tétel igaz.

Azonban

$$G',\ G'',\ \ldots\ G^{(\mu)},\ R,$$

$$G',\ D',\ \ldots\ D^{(\lambda-1)}\ R;$$

és a

$$H',\ H'',\ \ldots,\ H^{(\nu)},\ R,$$

$$H'\ D',\ \ldots\ D^{(\lambda-1)},\ R$$

sorokra, feltevésünk szerint helyes lévén a tétel:

$$\lambda = \mu = \nu;$$

De már akkor a (9), (11); és (10), (12) sorokra is igaz, tehát (9) és (10)-re nézve is: a mit bizonyitani kellett.

Minthogy hiánytalan sor két egymásutáni testjének hányadosa egyszerű test, előállitható $\mathfrak{G}$, mint egyszerű normális testek szorzata. Ha

$$\frac{\mathfrak{G}}{G'} = \mathfrak{G}',\ \frac{G'}{G''} = \mathfrak{G}'',\ \ldots,\ \frac{G^{(\mu)}}{R} = \mathfrak{G}^{(\mu)+1)}$$

ugy ez a szorzat így jegyezhető:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'.\ \mathfrak{G}''\ \ldots\ \mathfrak{G}_{(\mu)}$$

6. §. A III. tétel $\mathfrak{G}$ osztóinak másként szerkesztett sorozatára is kiterjeszthető. Eljárásunk egyszerüsitéseért segédtételt bocsátok előre.

Segédtétel. *Ha A, B egyszerü normális testeknek legkisebb közös többszörösük M, nincsen olyan A',(B') test, mely M-nek osztója, A--t, (B-t) tartalmazza, úgy hogy A (B) adjungálásaután A'/A, illetőleg B'/B egyszerü normális test volna.*

A testek fokszámait — mint előbb -- m, n, q, (illetőleg m', n') jelölje, Minthogy A és B legnagyobb közös osztója R:

$$q = mn. \tag{13}$$

$$\frac{M}{A} \backsim B\ ,\ \frac{M}{B} \backsim A$$

[1]) V. ö. *Netto.* Substitutionentheorie p. 87—90.

Feltesszük, hogy A' olyan osztó, hogy

$$M > A' > A$$

és $A'|A$ egyszerü normális test. Kimutatjuk, hogy feltevésünkből ellenmondásra jutunk.

Vegyük e végre B és A' legnagyobb közös osztóját D-t, jelölje ennek fokszámát r; akkor, minthogy B normális test, és M, A'-nak és B-nek is legkisebb közös többszöröse:

$$\frac{M}{B} \backsim \frac{A'}{D} \qquad m'n = qr;$$

(13) tekintetbe vételével pedig

$$m' = mr. \tag{14}$$

Ebből következik, hogy A'-nek és D-nek legnagyobb közös osztója R, tehát

$$\frac{A'}{A} \backsim D,$$

de $A'|A$ egyszerü normális test, D is ilyen volna, s minthogy feltevésünk értelmében $m' > m$: (14)-ből $r > 1$ következnék. De ez ellenkezik ama föltevéssel, hogy B egyszerü test, tehát A' nem létezhetik.

Szerkesszünk $\mathbf{G}$ normális test osztóiból egy sorozatot, következő módon: Kiválasztván G_σ egyszerű (minimális) normális osztót, adjungáljuk $\mathbf{G}$-hez; $\mathbf{G}|G_\sigma$-nak keressük ujra minimális normális osztóját: $G_{\sigma-1}$, G_σ, a hol $G_{\sigma-1}$ maga nem szükségképen normális test. Az eljárást addig folytatjuk, a mig véges számu ismétlés után $\mathbf{G}|G_{\sigma-k}$ egyszerü testhez jutunk. Igy nyerjük a $\mathbf{G}$ *relativ-normális osztóinak* hiánytalan sorát.

Ezután a III. tétel általánositását így fogalmazhatjuk, (ha az indexes jelölést czélszerüen módositjuk.)

IV. Tétel.

Ha

$$\mathbf{G},\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_\sigma,\ R; \tag{15}$$

$$\mathbf{G},\ H_1,\ H_2,\ \ldots\ H_\rho,\ R \tag{16}$$

$\mathbf{G}$ *relativ-normális osztóinak két különböző hiánytalan sora; akkor*

1) *az osztók száma mindkét esetben egyenlő*: $\sigma = \rho$.

2) *a*
$$\frac{\mathfrak{G}}{G_1}, \frac{G_1}{G_2}, \ldots \frac{G_{\sigma-1}}{G_\sigma}, \frac{G_\sigma}{R},$$
és
$$\frac{\mathfrak{G}}{H_1}, \frac{H_1}{H_2}, \ldots \frac{H_{\rho-1}}{H_\rho}, \frac{H_\rho}{P}$$
sorokban álló „hányados" testek sorrendtől eltekintve, relative egyenlők.

A bebizonyitásnál követett gondolatmenet megegyezik avval, a melyet a III. tétel bebizonyitásánál használtunk, különbség csak az, hogy a G_σ és H_ρ testek legkisebb közös többszörösével ($T_{\tau-1}$) a a most jelzett módon szerkesztett sort
$$\mathfrak{G}, T_1, T_2, \ldots T_{\tau-2}, T_{\tau-1}$$
vesszük segitségül. Valóban erre a két sorra:
$$\mathfrak{G}, T_1, T_2, \ldots, T_{\tau-1}, G'_\sigma, R; \tag{17}$$
$$\mathfrak{G}, T_1, T_2, \ldots, T_{\tau-1}, H_\sigma, R; \tag{18}$$
a segédtétel értelmében az állitás helyes; és ha bebizonyitottnak tesszük föl minden indexre, mely $< \sigma$, a tétel helyes volta a (15), (17) illetve (16), (18) sorok összehasonlitása révén azonnal belátható.

Egymásutáni relativ normális osztók hányadosai is egyszerü normális testek. Az 5. §. végén álló szimbolikus szorzat-alakban érthetünk $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, ... alatt ilyen általánosabb sor osztóiból alakitott hányadosokat is.

V.

1. §. A megelőző tárgyalásokban a csoport-elméletet teljesen kikerültük, azért a most következő alkalmazások is attól függetlenek lesznek.

Előbb a IV. 4. §—6. §-ban foglalt eredményeket forditom át olyan alakba, a melyikben az algebrai egyenletekhez való vonatkozások előtérbe lépnek. Azután tárgyalom *Hölder*-nek a bevezetésben emlitett tételét.

A IV. 4. §. tételéből vont következések ezekkel aequivalensek:

a) Algebrai egyenlet redukcziójára elégséges gyökeinek ráczionális függvényeit adjungálni.

b) Ha algebrai egyenlet, egyszerü segédegyenlet összes gyökeinek adjungálása után redukálódik, ezek a gyökök az eredeti egyenlet gyökeinek ráczionális függvényei.

2. §. A IV. 5. §. 6. §. III., IV. tételei szolgáltatják összetett Galois-féle testtel biró algebrai egyenlet redukczióját egyszerü egyenletekre, a melyet *C. Jordan* után *Netto* is közöl.

Legyen

$$F(u) = 0 \tag{1}$$

az adott egyenlet, a melyről csak azt tesszük fel, hogy gyökei

$$u = y, y_1, \ldots, y_{m-1}$$

egymástól különbözők és együtthatói R ráczionális testhez tartoznak. Jelöljék: a hozzá tartozó Galois-féle testet **G**, a rezolvens egyenletet

$$\mathfrak{G}_0(t) = 0 \tag{2}$$

ennek fokát g_0, egyik gyökét w^0.

Ha **G** normális osztóinak egyik hiánytalan sora

$$G_1, G_2, \ldots G_q, R$$

hozzájuk tartozó irreduktibilis normális egyenletek sora:

$$\mathfrak{G}_1(t) = 0, \mathfrak{G}_2(t) = 0, \ldots, \mathfrak{G}_q(t) = 0. \tag{3}$$

a hol $\mathfrak{G}_i(t) = 0$ egyenlet foka g_i, egyik gyöke $w^{(i)}$, a IV. 5. §. szerint a (2), (3) egyenleteknek következő jellemző tulajdonságai vannak:

1) Két egymásután következő egyenlet közül a másodiknak gyökei racziónális függvényei az első egyenlet összes gyökeinek, azaz: (ezeknek normális voltát tekintve)

$$w^{(i)} = \theta_i(w^{(i-1)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots q$$

a hol θ_i együtthatói R-hez tartoznak.

2) A $w^{(i)}$ adjungálása után $\mathfrak{G}_{i-1}(t) = 0$ egyenlet G_i testben irreduktikilis, $g_{i-1} : g_i$ fokú tényezőkre esik széjjel, ezek bármelyike, zérussal egyenlítve *egyszerü normális egyenlet.* Jelöljék ezeknek egy sorát:

$$\mathfrak{g}_{i-1}(t, w^{(i)}) = 0; \qquad (i = 1 \ldots, q) \tag{4}$$

a melyekhez, mint utolsó $\mathfrak{G}_q(t) = 0$ csatlakozik.

A (4) egyszerü egyenleteknek megoldására redukálható az $F(u) = 0$ egyenlet megoldása.

Kiemelendő, hogy az elkerülhetetlen segédegyenleteknek *számuk* és *fokszámaik* a normális osztók hiánytalan sorának minden lehetséges megválasztásánál *invariánsok*.

Ugyanilyen következtetések fűzhetők a IV. 6. §-hoz, avval a különbséggel, hogy a (3) egyenleteknél a ráczionális test, melyhez az együtthatók tartoznak, nem mindenütt R.

Egyéb jelöléseinket megtartván, legyen p a relativ-normális osztók száma; ők maguk pedig:

$$G_1,\ G_2,\ \ldots\ldots,\ G_p\ .$$

a (3) segédegyenletek helyére ilyenek lépnek:

$$\mathfrak{G}_1(t,\ w^{(0)}) = 0,\ \mathfrak{G}_2(t,\ w^{(1)}) = 0, \ldots.\ \mathfrak{G}_p(t,\ w^{(p-1)}) = 0, \qquad (5)$$

a hol általánosan $\mathfrak{G}_{i-1}$ együtthatói G_i testhez tartoznak és erre a testre vonatkoztatva

$$\mathfrak{G}_{i-1}(t,\ w^{(i)}) = 0$$

normális egyenlet. (Az olyan egyenletsort, mint (5), egyenlet-lánczolatnak nevezhetjük.)

Evvel az általánositással az előbbi következtetések most is érvényesek.

Megemlitem ezekkel a tételekkel kapcsolatban, hogy *Galois* tétele, a mely a megoldható egyenletekre vonatkozik, következő két alakban mondható ki:

a) Szükséges és elégséges feltétel arra, hogy algebrai egyenlet algebrailag megoldható az, hogy $\mathbf{G}$ normális test *normális osztóinak* hiánytalan sorában egymásután következő két test fokszámának hányadosa *primszám-hatvány*.

b) Szükséges és elégséges feltétel arra, hogy algebrai egyenlet algebrailag megoldható az, hogy $\mathbf{G}$ normális test *relátiv-normális osztóinak* hiánytalan sorában egymásután következő két test fokszámának hányadosa *primszám*.

Minthogy ezek a tételek most csoport-elméleti fogalmak nélkül fogalmazhatók, kivánatos volna bebizonyitásukat is a csoportelmélettől függetlenül eszközölni.

3. §. Eddig a redukczió kérdését az egyenlet Galois-féle testjéből kiindulva tárgyaltam; most arra a kérdésre térek át: ha algebrai egyenlet adott segédegyenletek összes gyökeinek adjungálása

után megoldható, milyenek lesznek ezeknek gyökeik, G-féle testjeik mekkora a számuk.[1])

Legyen

$$F(u) = 0$$

adott algebrai egyenlet, a hol u határozatlan mennyiség, legyenek gyökei egymástól különbözők.

$$\mathfrak{F}_1(u) = 0,\ \mathfrak{F}_2(u) = 0,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{F}_m(u) = 0 \qquad (6)$$

a segéd-egyenleteknek olyan sora, melynek egyéneit megoldván, gyökeikkel az $F(u)=0$ egyenlet összes gyökei raczionálisan kifejezhetők.

A (6) egyenletekről csakis azt szupponáljuk, hogy nincsenek többszörös gyökeik. Jelölje $F(u) = 0$ Galois-féle testjét $\mathbf{G}$, az i-dik segédegyenletét $\mathbf{G}_i$.

A segédegyenletek együtthatóira nézve állapodjunk meg úgy, hogy az utolsónak együtthatói tartozzanak R-hez, a megelőzőnek együtthatói $\mathbf{G}_m$-hez; és általánosan $\mathfrak{F}_i(u) = 0$ együtthatói számára raczionális test R_i, legyen az utána következő összes $\mathbf{G}_{i+1}$, $\mathbf{G}_{i+2}$ ... testek szorzata:

$$R_i = \mathbf{G}_{i+1}\mathbf{G}_{i+2} \ldots \mathbf{G}_m$$

(Ez a megállapítás általános, mert nem zárja ki, hogy egy kiválasztott egyenlet együtthatóiban nem fordúl elő az utána következőknek mindenik gyöke.)

A $\mathbf{G}_i$ testek közül az összetetteket redukáljuk (2. §!) egyszerü relativ-normális testek szorzatára; az egyszerü testek legyenek

$$\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_2,\ \ldots\ \mathbf{H}_s,$$

tartozzanak hozzájuk

$$f_1(u) = 0,\ f_2(u) = 0,\ \ldots\ldots,\ f_s(u) = 0 \qquad (7)$$

egyszerü egyenletek. Ezeket sokféle módon választhatjuk a velük aequivalens egyenletek közül; közöttük a (6) segédegyenletek (vagy velük aequivalensek) is előfordulnak.

A $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, ... testek a $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, ... testeknek relativ normális osztóinak »hányadosaiból« alakított *egyszerü normális tényezőik* (IV. 4. §.); ha valamelyik a $\mathbf{G}_i$-k sorában többször fordult elő, ugyanannyiszor felsoroljuk $\mathbf{H}_k$ sorban is.

[1]) *Hölder:* id. dolgozat. Math. Annalen XXXIV. p. 49—56.

4. §. A ráczionális számok testét változtatni fogjuk:

Az $f_s = 0$ egyenlet számára marad R, az előtte levő $f_{s-1} = 0$ egyenlet számára adjungáljuk $\mathbf{H}_s$-et ($f_s = 0$ összes gyökeit). Az adjungálásnál ugyan feltettük eddig, hogy a két egyenlet együtthatói ugyanahoz a raczionális testhez tartoznak, de R minden testnek osztója s igy $f_s = 0$ együtthatói is felfoghatók az uj raczionális testhez tartozókul.

Két eset lehetséges: vagy egyáltalában nem redukálódik $f_{s-1} = 0$ az adjungálás után, vagy ha redukálódik, lineáris szorzókra esik szét. Tehát valóságos redukálás esetén $f_{s-1} = 0$ egyenlet gyökei az adjungálás után raczionálisak; az egyenlet, mint fölösleges, elhagyható. Járjunk el igy tovább: $\mathbf{H}_s$ testet adjungáljuk az $f_s = 0$ előtt álló egyenletek mindenikéhez, s a feleslegeseket hagyjuk ki. Ugyanis, folyton-folyvást érvényes az a tétel, hogy ha ezután az adjungálás után valamelyik egyenlet redukálódik, az ő gyökei raczionálisok az utána álló egyenletek összes gyökeiben.

Ilyen eljárással találunk uj egyenlet sort:

$$f_a(u) = 0,\ f_b(u) = 0, \ldots .\ f_n(u) = 0,\ f_s(u) = 0$$

a melyhez

$$\mathbf{H}_a,\ \mathbf{H}_b \ldots,\ \mathbf{H}_n,\ \mathbf{H}_s$$

normális testek tartoznak. Ennek a sornak épen azok a tulajdonságai vannak meg, mint előbb, csak az f_s-et megelőző egyenletekhez $\mathbf{H}_s$ adjungálva lőn.

Ez az uj sor a (7) alattiból adjungálásokkal és — esetleg — néhány egyenlet kihagyásával származott.

Most az $f_n(u) = 0$ egyenlet $\mathbf{H}_n$ testét adjungáljuk az előtte állókhoz és ismételjük az előbbi eljárást.

Igy folytatva tovább is, egyenlet-lánczot nyerünk:

$$f_c(u) = 0,\ f_h(u) = 0, \ldots,\ f_i(u) = 0,\ f_s(u) = 0, \tag{8}$$

a melyben mindenik egyenlethez adjungálva lőnek az utána következőknek összes gyökeik. Az utolsó számára a raczionális test R

A hozzájuk tartozó *Galois*-féle testek:

$$\mathbf{H}_c,\ \mathbf{H}_h, \ldots,\ \mathbf{H}_i,\ \mathbf{H}_s$$

mind egyszerü testek; összes gyökeikkel az $F(u) = 0$ egyenlet összes gyökei ráczionálisan kifejezhetők.

A (8) egyenletek a (7) egyenletek sorának egy része.

5. §. Ha most az

$$F(u) = 0$$

egyenlethez adjungáljuk $\mathbf{H}_s$-et, redukálódjék $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'_s$-re.

Azonban (IV. 6. §.) $\mathbf{G}'_s$ vagy egyenlő $\mathbf{G}$-vel, vagy valóságos redukálás esetében

$$\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{G}'_s} = \mathbf{H}_s,$$

de ekkor $f_s(u) = 0$ egyenlet összes gyökei ráczionális függvényei az $F(u) = 0$ egyenlet gyöke.nek.

Általánosan is: ha $\mathbf{H}_i$ adjungálása után az $F(u) = 0$ egyenlethez tartozó normális test, $\mathbf{G}'_k$ redukálódik, az $f_i(u) =$ segédegyenletnek gyökei ráczionális függvényei az eredeti egyenlet és az utána következő összes segédegyenletek gyökeinek.

Az adjungálás után $\mathbf{G}'_k$ két tényezőre esik szét; ezek közül egyik az egyenlet uj Galois-féle testje, a másik egyenlő $\mathbf{H}_i$-vel.

Ebből következik:

A $\mathbf{G}$ test előállitható, mint a (8) egyszerü segédegyenletek Galois-féle testjei egy részének szorzata.

Ha $\mathbf{G}$ egyszerü relativ-normális tényezőinek száma q, a (8) egyenletek száma r, akkor

$$r \geqq q.$$

Akkor lesz $r = q$, ha $\mathbf{G}$ mindenik adjungálás után valóban redukálódik.

6. §. Visszatérünk a megadott segédegyenletekhez:

$$\mathfrak{F}_1(u) = 0,\ \mathfrak{F}_2(u) = 0, \ldots \mathfrak{F}_m(u) = 0.$$

A hozzájuk tartozó Galois-féle testek összes egyszerü relativ-normális tényezői

$$\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots \mathbf{H}_{s-1}, \mathbf{H}_s$$

Ezekből lőn kiválasztva a

$$\mathbf{H}_e, \mathbf{H}_h, \ldots \mathbf{H}_i, \mathbf{H}_s.$$

sor.

Az s, r, q számok következőleg viszonyulnak egymáshoz:

$$s \geqq r \geqq q.$$

Az $s = q$ egyenlőségből következik ez a kettő:

$$r = q, \; s = r.$$

Az első azt mondja, hogy a (8) segédegyenletek gyökei $F(u) = 0$ gyökeinek ráczionális függvényei; a másodikból meg következik, hogy az adjungálások folyamán a (7) egyenletsorból egyet sem hagytunk ki, ez tehát azonos az

$$f_c(u) = 0, \; f_h(u) = 0, \ldots, f_s(u) = 0$$

egyenletek sorával. De abban az $\mathfrak{F}_i(u) = 0$ segédegyenletek előfordulnak, tehát előfordulnak ebben a sorban is, a honnan kimondhatjuk:

Ha $s = q$, az $\mathfrak{F}_i(u) = 0$ segédegyenletek gyökei ráczionális függvényei az $F(u) = 0$ egyenlet gyökeinek.[1]

7. §. **Összefoglalás.**

Ha algebrai egyenlet a (6) segédegyenletekkel megoldható, ezeknek Galois-testjei tartalmazzák az egyenlethez tartozó G test összes relativ normális tényezőit. Ezeknek a száma a segédegyenletek összes Galois-testjeinek egyszerű relativ-normális tényezőire nézve *minimum*.

Ha az egyszerű relativ-normális tényezők épen minimális számmal vannak jelen, mindenik segéd-egyenletnek összes gyökei ráczionális függvényei az egyenlet gyökeinek.

Föltévén, hogy a segédegyenletek eredetileg egyszerűek, q a szükséges segédegyenletek számának a *minimuma*.

Igazítások:

7. lap. 1 sor alulról „mely egy másiknak" helyett: „melynek a többi."

8. lap 3 sor felülről. „y_i az y_k-nak" után beiktatandó:

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$