

A FELFELE MENŐ LÁNCZTÖRTEK ALKALMAZÁSA.

Dr. Gerevich Emiltől.

Mult évben volt szerencsém a tekintetes Szakosztály előtt a felfelé menő láncztörtek elméleti tanának mai állását bemutatni; ¹⁾ szabadjon ezúttal azoknak alkalmazásáról szólnom.

1. §. Vizsgáljuk, miképen lehet fl. ltört segítségével valamely számnak a négyzetgyökét kikeresni. Legyen a szám, melynek négyzetgyökét keresni akarjuk, N. Téve

$$\sqrt{N} = m_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots$$

feladatunk lesz $m_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ értékeket keresni. A fenti ltörtet sorrá alakítva lesz:

$$\sqrt{N} = m_0 + \frac{1}{a_1} \left[1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots \right], \text{ miből}$$

$$(N - m_0^2) a_1 = 2 m_0 \left[1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right] + \frac{1}{a_1} \left[1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right]^2.$$

Czélunknak megfelelően m_0 -t úgy kell választani, hogy az

$$N - m_0^2 > 0 > N - (m_0 + 1)^2$$

feltételnek megfeleljen.

¹⁾ L. Orvos-Természettudományi Értesítő 1889. év. Természettudományi szak II. füzet, 107—128. lap.

Mivel $(N - m_0^2) > a_1 > 2m_0$,

ezen egyenlőtlenségnek a_1 -re az által nyerünk egy megfelelő legkisebb értéket, ha

$$\frac{2m_0}{N - m_0^2}$$

osztásnál a hányadost a rendesenl egy egységgel nagyobboknak vesszük. Legyen rövidség okáért $2m_0 = d_1$ és $N - m_0^2 = \delta_1$, téve továbbá a_1 helyett m_1 -et, mit az osztás által nyerünk, akkor a fenti egyenlet ily alakú lesz:

$$\delta_1 m_1 - d_1 = \frac{d_1}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right] + \frac{1}{m_1} \left[1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots \right]^2.$$

Ha azon maradékot, melyet $\frac{d_1}{\delta_1}$ osztásnál nyerünk, r_1 -el jelöljük, akkor $\delta_1 m_1 - d_1 = r_1$ lévén, lesz:

$$\begin{aligned} r_1 m_1 &= \frac{d_1 m_1}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right] + \left[1 + \frac{1}{a_2} \left(1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right) \right]^2 \\ &= \frac{d_1 m_1}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right] + 1 + \frac{2}{a_2} \left(1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{a_2^2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right]^2, \end{aligned}$$

vagy a megfelelő összevonások után:

$$\begin{aligned} (r_1 m_1 - 1) a_2 &= d_1 m_1 + 2 + (d_1 m_1 + 2) \left[\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right] + \\ &\quad + \frac{1}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right]^2. \end{aligned}$$

Ha a fentihez hasonlóan itt is $d_1 m_1 + 2 = d_2$ és $r_1 m_1 - 1 = \delta_2$ fétetik, s ha $a_2 > \frac{d_2}{\delta_2}$ egyenlőtlenségnek megfelelően az osztás há-

nyadosa egy egységgel nagyobbának vétetik a rendesnél, ha továbbá $m_2 \delta_2 - d_2$ maradékot r_2 -vel jelöljük, akkor a_2 helyébe m_2 -t téve, a_3 meghatározására következő egyenletet nyerjük:

$$(r_2 m_2 - 1) a_3 = d_2 m_2 + 2 + (d_2 m_2 + 2) \left[\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_4 a_5} + \dots \right] + \frac{1}{a_3} \left[1 + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_4 a_5} + \dots \right]^2.$$

A további szükséges egyenleteket ezekből a mutatók egyszerű felcserélése által nyerhetjük. Így az a_4 meghatározására szolgáló egyenlet lesz:

$$(r_3 m_3 - 1) a_4 = d_3 m_3 + 2 + (d_3 m_3 + 2) \left[\frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_5 a_6} + \dots \right] + \frac{1}{a_4} \left[1 + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_5 a_6} + \dots \right]^2.$$

Hasonló könnyűséggel leszünk képesek bármely osztót és osztandót feltalálni a következő képletek segítségével:

$$\delta_{p+1} = r_p m_p - 1 \text{ és } d_{p+1} = d_p m_p + 2.$$

Az $m_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ ily módon megtalált értékeit behelyettesítve, megkapjuk az N szám keresett gyökét.

2. §. A számítás menete sokszor kényelmesebb, ha m_0 értékét úgy választjuk, hogy az

$$m_0^2 - N < N - (m_0 - 1)^2$$

feltételnek megfelelően. E feltételnek megfelelően tétessék:

$$N = m_0^2 - 2 m_0 \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dots \right] + \frac{1}{a_1^2} \left[1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right]^2,$$

miből (-1) -el való szorzás után lesz:

$$(m_0^2 - N) a_1 = 2 m_0 + 2 m_0 \left[\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right] - \\ - \frac{1}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right]^2.$$

Téve rövidség okáért $2 m_0 = d_1$ és $m_0^2 - N = \delta_1$, a_1 értékét $a_1 > \frac{d_1}{\delta_1}$ miatt az által kapjuk meg, ha a hányadost a közönségesnél egy egységgel nagyobbobbnak vesszük. Téve a_1 helyébe m_1 -et, s figyelembe véve, hogy a maradék: $\delta_1 m_1 - d_1 = r_1$, lesz:

$$r_1 m_1 = \frac{d_1 m_1}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right] - 1 - \frac{2}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right] - \\ - \frac{1}{a_2^2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right]^2,$$

vagy:

$$(r_1 m_1 + 1) a_2 = d_1 m_1 - 2 + (d_1 m_1 - 2) \left[\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right] - \\ - \frac{1}{a_2} \left[1 + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right]^2,$$

mely egyenlet az a_2 meghatározására szolgál. A mutatóknak egy egységgel való nagyobbítása által az $a_3, a_4 \dots$ meghatározására szolgáló többi egyenleteket nyerjük. A tetszés szerinti osztandó és osztó meghatározására itt a következő képletek szolgálnak:

$$d_{p+1} = d_p m_p - 2_1 \text{ és } \delta_{p+1} = r_p m_p + 1.$$

A négyzetgyök kikeresésére igen ügyes módot alkalmazott Ma-thiessen az által, hogy azon szám segélyével, melynek négyzetgyöke keresendő, egy másodfoku egyenletet képezett, mely egyenlet megoldása által nyerte a keresett irrációnális négyzetgyököt.

3. §. Lássuk most, miképen lehet a fl. ltörtek segélyével köbgyököt vonni. Legyen a szám, melynek köbgyökét tudni akarjuk:

N. Tegyük

$$\sqrt[3]{N} = m_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots$$

Feladatunk itt is az $m_0, a_1, a_2 \dots$ értékek meghatározásában fog állani. Sorrá alakítva e ltörtet, köbreemelés után lesz :

$$N = m_0^3 + 3 m_0^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots \right) + 2 m_0 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots \right)^2 + \\ + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots \right)^3,$$

miből

$$N - m_0^3 = \delta_1, \quad 3 m_0^2 = d_1 \quad \text{és} \quad 3 m_0 = c_1$$

jelzés után :

$$\delta_1 a_1 = d_1 + d_1 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right) + \frac{c_1}{a_1} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right)^2 \right] \\ + \frac{1}{a_1^2} \left[1 + 3 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right) + 3 \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots \right)^3 \right]$$

Mivel $\delta_1 a_1 > d_1$, a feltételnek megfelelő értéket az által fogunk nyerni, ha az osztási hányadost egy egységgel nagyobbak vesszük a rendesnél. A nyert hányadost m_1 -el jelölve, $\delta_1 m_1 - d_1$ maradékot pedig r_1 -el, egyenletünk

$$(r_1 m_1 - c_1) m_1 - 1 = \delta_2,$$

$$(d_1 m_1 + 2c_1) m_1 + 3 = d_2 \quad \text{és}$$

$$c_1 m_1 + 3 = c_2$$

jelzések után, ily alakú lesz:

$$\begin{aligned} \delta_2 a_2 = & d_2 + d_2 \left[\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} \right] + \frac{c_2}{a_2} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{a_2^2} \left[1 + 3 \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right) + 3 \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots \right)^3 \right], \end{aligned}$$

mely már az a_2 meghatározására szolgál. A további szükséges egyenletek ebből a mutatóknak egy egységgel való nagyobbítása által nyerhetők.

Bármely hányados megkeresésére a következő képletek szolgálnak:

$$\begin{aligned} (r_p m_p - c_p) m_p - 1 &= \delta_{p+1}, \\ (d_p m_p + 2c_p) m_p + 3 &= d_{p+1} \text{ és} \\ c_p m_p + 3 &= c_{p+1}. \end{aligned}$$

4. §. A kiszámítás sokszor kényelmesebbé tehető az által, ha m_0 -nak egy egységgel nagyobb számot veszünk, mint a melynek köbe az N -ben található. Az eljárás ez esetben teljesen hasonló ahhoz, melyet a 2. §-ban láttunk. U. i. az első osztandó $d_1 = 3m_0^2$, az első osztó $\delta_1 = m_0^3 - N$, és a másodhatvány hányadosa $c_1 = 3m_0$. Az egymásra következő hányadosok kikeresésére a következő képletek szolgálnak:

$$\begin{aligned} (d_p m_p - 2c_p) m_p + 3 &= d_{p+1}, \\ (r_p m_p + c_p) m_p - 1 &= \delta_{p+1} \text{ és} \\ c_p m_p - 3 &= c_{p+1} \end{aligned}$$

5. §. Az előbbiekhöz hasonló módon képesek leszünk a fl.ltörtek segélyével valamely számnak bárhányadik gyökét kikeresni. Ha N számnak n -ik gyöke volna kikeresendő fl.ltörtek segélyével m_0 egész szám úgy választandó, hogy az

$$m_0^n < N < (m_0 + 1)^n$$

feltételnek megfeleljen. Az $N - m_0^n$ maradék lesz az első osztó: δ_1 ; a neki megfelelő osztandó d_1 , következő kifejezés által lesz meghatározva:

$$\binom{n}{1} m_0^{n-1} = n \cdot m_0^{n-1}.$$

Ha a második hatvány együttthatóját $\overset{1}{C}$, a harmadikét $\overset{2}{C}$, a negyedikét $\overset{3}{C}$, stb. jelöljük, akkor

$$\overset{1}{C}_1 = \binom{n}{2} m_0^{n-2},$$

$$\overset{2}{C}_1 = \binom{n}{3} m_0^{n-3},$$

.....

$$\overset{n-2}{C}_1 = \binom{n}{n-1} m_0^1$$

$$\overset{n-1}{C}_1 = \binom{n}{n} m_0^0 = 1.$$

Ha mindegyik $\frac{d}{\delta}$ osztásnál a hányadost a közönségesnél egy egységgel nagyobbak vesszük, a második, harmadik, negyedik, stb. osztandó s osztó a következő kifejezések által lesz adva:

$$\delta_{p+1} = \left[\left\{ \left[\left(r_p m_p - \overset{1}{C}_p \right) m_p - \overset{2}{C}_p \right] m_p - \overset{3}{C}_p \right\} m_p \dots - \overset{n-2}{C}_p \right] m_p - 1,$$

$$d_{p+1} = \left[\left\{ \left[\left(d_p m_p + \binom{1}{i} \overset{1}{C}_p \right) m_p + \binom{2}{i} \overset{2}{C}_p \right] m_p + \binom{3}{i} \overset{3}{C}_p \right\} m_p + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{n-2}{i-1} \overset{n-2}{C}_p \right] m_p + \binom{n-1}{i}$$

$$\overset{r}{C}_{p+1} = \left[\left\{ \left[\left(\overset{r}{C}_p m_p + \binom{r+1}{i} \overset{r+1}{C}_p \right) m_p + \binom{r+2}{i} \overset{r+2}{C}_p \right] m_p + \binom{r+3}{i} \overset{r+3}{C}_p \right\} m_p + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{n-2}{r+i} \overset{n-2}{C}_p \right] m_p + \binom{n}{r+i}.$$

Könnyű átlátni, mikép alakítandók át e kifejezések az esetben, ha m_0 -t úgy választjuk, hogy az

$$m_0^n > N > (m_0 - 1)^n$$

feltételnek feleljen meg. U. i. az osztók képletében a páros rendű hatványok együtthatóinak mindig tevőlegeseknek, a páratlan rendűekének pedig nemlegeseknek kell lenni; az osztandók képletében pedig a páros hatványok együtthatói mindig nemlegesek, a páratlanoké pedig tevőlegesek.

6. §. A fl. ltörtek segítségével igen pontosan lehet kiszámítani valamely számnak bárminő alpra vonatkoztatott logarát. Legyen kiszámítandó az N szám logara egy tetszésszerű Q alpra. Akkor, feltéve, hogy $N > Q$, legyen

$$N = Q^{m_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots} \\ = Q^{m_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \dots},$$

miből

$$\log N = m_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dots$$

Feladatunk tehát csak az $m_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ értékek meghatározásában áll. A

$$Q^{m_0} < N < Q^{m_0+1}$$

egyenlőtlenségből m_0 értékét könnyen kitalálhatjuk. Legyen

$$\frac{N}{Q^{m_0}} = N_1, \text{ akkor}$$

$$N_1^{a_1} = Q^1 \cdot Q^{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots}$$

Ha most egy mértéket úgy választunk, hogy

$$N_1^m < Q < N_1^{m+1}$$

feltételnek elég tétessék, akkor $m_1 = a_1$. Ha ismét

$$\frac{N_1^{m_1}}{Q^1} = N_2, \text{ akkor}$$

$$N_2^{a_2} = Q^1 \cdot Q^{\frac{1}{a_2}} \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \dots \right)$$

mely kifejezésből az

$$N_2^{m_2} < Q < N_2^{m_2+1}$$

feltétel szemeltartásával az a_2 értéke is, az előbbihez hasonló módon, könnyen meghatározható.

Könnyű belátni, miképen határozhatók meg ily úton a többi részletnevezők is. Így a felvett számnak bármely alapra vonatkoztatott logara tetszés szerinti pontosságig számítható ki.

7. §. A fl.törteknek tág alkalmazásuk van az egyenletek megoldásánál. Vizsgáljuk először, miként lehet általuk két ismeretlennel bíró elsőfokú határozatlan egyenletet megoldani. Legyen a megoldandó egyenlet:

$$1) \quad a x - b y = c.$$

Az abszolút tagot tekintve, két esetet kell megkülönböztetni:

$$c > b \text{ és } c < b.$$

A $c = b$ esetet bátran figyelmen kívül hagyhatjuk, mert ekkor

$$a x = b(y + 1).$$

Ha $c > b$, akkor az 1) egyszerű átalakítás által könnyen adhatunk oly alakot, hogy benne az abszolút tag kisebb legyen az y együtthatójánál. E czélból u. i. c ily alakra bontandó fel:

$$c = \mu \cdot b + c_1, \text{ hol}$$

$$c_1 < b.$$

Ha 1)-be $y = y_1 - \mu$ tétetik, az ilyen alakot vesz fel:

$$a x = b y_1 + c_1,$$

melyben már $c_1 < b$. Az első feltételt tehát bátran mellőzhetjük s a szorosán vett elméletnek tökéletesen eleget teszünk, ha az 1) egyenletet csak az esetre vizsgáljuk, a mikor benne

$$c < b.$$

Tartsuk számon az evidens tényt., hogy ha h és k két oly egész szám, mely az 1) egyenletbe x és y helyébe téve, annak eleget tesz, akkor

$$x = h \pm n \cdot b \quad \text{és}$$

$$y = k \pm n \cdot a$$

kifejezések által adott értékek is gyökei lesznek a felvett egyenletnek. Ezek előrebocsátása után már hozzáfoghatunk az 1) egyenlet megoldásához. Fejezzük ki azt ily alakban:

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{a} + \frac{c}{b},$$

hol $c < b$ miatt $\frac{c}{b}$ valódi tört. Ha $\frac{c}{b}$ törtet oly két részlettörtből álló ftörtté alakítjuk át, melyek elsejének részletnevezője a , és másodikának b , akkor

$$\frac{c}{b} = \frac{ca}{b} = \frac{d}{a} + \frac{c_1}{b}.$$

Ha $c_1 = c$, akkor a felvett 1) egyenletnek c és d két gyöke lesz, vagyis:

$$x = c \quad \text{és} \quad y = d.$$

Ha azonban $c_1 > c$, akkor $\frac{c_1}{b}$ hasonló átalakulásnak vetésék alá. Lesz u. i.

$$\frac{c_1}{b} = \frac{c_1 a}{b} = \frac{d_1}{a} + \frac{c_2}{b}.$$

Ha $c_2 = c$, akkor $x = c_1$ és $y = d_1$; ha pedig $c_2 > c$, akkor ismét

$$\frac{c_2}{b} = \frac{d_2}{a} + \frac{c_3}{b},$$

ha még $c_3 \gtrless c$, akkor tovább folytatva ez átalakítást, végre oly

$$\frac{c_{m-1}}{b} = \frac{d_{m-1}}{a} + \frac{c_m}{b}$$

egyenlethez jutunk, miként azonnal látni fogjuk, melyben $c_m = c$, a mikor is a felvett egyenlet két gyöke:

$$x = c_{m-1} \quad \text{és} \quad y = d_{m-1}$$

lesz.

Most azt kell bizonyítanunk, hogy vajjon a folytatólagos számítások útján okvetlenül kell-e oly

$$\frac{c_{m-1}}{b} = \frac{d_{m-1}}{a} + \frac{c_m}{b}$$

kifejezéshez jutunk, melyben $c_m = c$. Arra, hogy ily kifejezéshez okvetlenül jutnunk kell, következő okoskodással jövünk rá.

c, c_1, c_2, c_3, \dots számok mindig kisebbek, mint b . Továbbá sem c_1 , sem c_2 , sem c_3, \dots nem lehet $= 0$, mert a és b viszonylagos törzsszámok, $c_r < b$ és d_r egész számot jelent. Tehát

$$0 < c_r < b.$$

Ha így bebizonyítottuk, hogy ha

$$c_1 \gtrless c \quad \text{és} \quad c_2 \gtrless c, \quad \text{akkor megfelelően} \quad c_2 \gtrless c_1,$$

$$\text{továbbá ha} \quad c_3 \gtrless c, \quad \text{akkor} \quad c_3 \gtrless c_2 \quad \text{és} \quad c_3 \gtrless c_1,$$

$$\text{továbbá ha} \quad c_4 \gtrless c, \quad \text{akkor} \quad c_4 \gtrless c_3 \quad \text{és} \quad c_4 \gtrless c_1,$$

könnyű belátni, hogy végre kell, hogy legyen: $c_r = c$.

Ha

$$a x = b y + c \quad \text{és}$$

$$a \cdot c = b \cdot d + c_1, \quad \text{aztán legyen}$$

$$a \cdot c_1 = b \cdot d_1 + c_2.$$

Ha $c_2 = c_1$, volna, akkor

$$a(c - c_1) = b(d - d_1).$$

Mivel azonban a és b viszonylagos törtszámok, ezen egyenlet csak következő két esetben lehet helyes:

- 1) ha $a = d - d_1$ és $b = c - c_1$, és
- 2) ha $c - c_1 = d - d_1 = 0$.

Mivel $b > c$ és c_1 tevőleges szám, $b = c - c_1$ egyenlet nem állhat fenn és $c_1 > c$ miatt $c - c_1 = 0$ sem lehet.

Az $a \cdot c_2 = b \cdot d_2 + c_3$

egyenlet vizsgálatánál, ha $c_3 = c_2$, akkor

$$a(c_1 - c_2) = b \cdot (d_1 - d_2) \text{ volna.}$$

De $c_1 > c_2$ miatt ezen egyenlet csak akkor volna helyes, ha $a = d_1 - d_2$ és $b = c_1 - c_2$, a mi ismét képtelenség. Hasonló ok miatt kevésbé lehet $c_3 = c_1$; tehát kell, hogy $c_3 = c$ legyen. Ép így következik, hogy ha $c_r > c$, akkor

$$c_r > c_{r-1},$$

$$c_r > c_{r-2},$$

...

$$c_r > c_2,$$

$$c_r > c_1.$$

És mivel $0 < c_r < b$, végre kell, hogy legyen $c_r = c$; a mi azt mondja, hogy okvetlenül kell oly

$$\frac{c_{m-1}}{b} = \frac{d_{m-1}}{a} + \frac{c_m}{b}$$

kifejezéshez jutnunk, melyben $c_m = c$.

8. §. Az előbbi pontban nyert eredményhez jutunk akkor is, ha a megoldásnál a szakaszos fl. ltörtekre támaszkodunk. Ha tehát ismét

$$ax = by + c$$

volna megoldandó s ha a fentebb jelzett feltételek itt is állanak, akkor $\frac{c}{b}$ egy közönséges tört legegyszerűbb alakja; mert nem csak a és b, de b és c is viszonylagos törtszám. Ha $\frac{c}{b}$ köz. törtet oly szakaszos fl. ltörtté alakítjuk át, melynek részletnevezője a, akkor — mint tudjuk *) — a nyert szakaszos fl. ltört mindig tiszta szakaszos lesz. És mivel $c < b$, az átalakításnál c-t okvetlenül maradékul kell nyernünk. De az átalakítás, ismeretesen, a következő egyenletek segítségével történik:

$$\frac{ca}{b} = s + r_1$$

$$\frac{r_1 a}{b} = s_1 + r_2$$

$$\frac{r_2 a}{b} = s_2 + r_3$$

.

$$\frac{r_{m-1} a}{b} = s_{m-1} + c,$$

miből következik, hogy $x = r_{m-1}$ és $y = s_{m-1}$ értékek a felvett egyenletnek megfelelnek. Vagyis az átalakításnál nyert utolsó előtti maradék és az utolsó részletszámláló fogják adni a megoldandó egyenlet két gyökét.

9. §. A számítás menete egyszerűsíthető az esetben, ha

$$ax = by + c$$

egyenletben $a > b$. Ekkor u. i.

$$a = \lambda \cdot b + \alpha \text{ és}$$

$$y = \lambda \cdot x + \beta$$

*) Dr. Gerevich Emil: A felfelé menő láncztörtek analízise. Besztercebánya, 1889. 66. l.

helyettesítések által a fenti egyenlet ily alakot vesz fel :

$$\alpha x = b \cdot \beta + c.$$

Ezen egyenletből meghatározzuk x -et és β -t, melyekből aztán y értéke is könnyen nyerhető. A műveleteknek, melyek a fl. tört szakaszainak meghatározására szükségesek, felét u. i. megtakaríthatjuk, ha a számítás közben oly maradékhoz jutunk, mely c -vel együtt a nevezőt, a -t adja. Ha ezen eset beálltánál a megelőző maradék r_n , és az ebből nyert részletszámláló s_n , akkor a teljes szakasz utolsó előtti maradéka $b - r_n$, és utolsó részletszámlálója a $-1 - s_n$ lévén,

$$x = b - r_n \text{ és}$$

$$y = a - 1 - s_n$$

kifejezések a felvett egyenlet két gyökét fogják adni.

10. §. A magasabb foku egyenletek számtani megoldása — ismeretesen — két feladatot foglal magában: először az adott egyenlet gyökeit kell határok közé szorítani, s aztán ezen gyökök számtani értékei keresendők. Ha pl. a Fourier által („Analyse des équations“) feltalált jelváltozások módszerével rájövünk, hogy az adott egyenlet gyökei α_1 és β_1 ; α_2 és β_2 ; α_3 és β_3 ; . . . határok között foglaltatnak, akkor még az is megvizsgálandó, vajjon a gyökök az ismert határok között reálisok-e, vagy képzetesek. E módszerek néha hosszú próbálgatásokat igényelnek. Gyakran azonban e próbálgatások teljesen feleslegesek, főképen ha pl. Cartesius,¹⁾ vagy Olivier²⁾ módszerét használjuk. A Sturm³⁾ tételével minden esetben azonnal megmondhatjuk, mennyi reális gyöke foglaltatik az adott egyenletnek α és β határok között.

Ezek előre bocsátása után, s az erre vonatkozó elmélet ismeretének feltételezése mellett, keresni fogjuk, miképen oldhatók meg

1) J. A. Grunert: Supplemente zu G. S. Klugel's Wörterbuch der reissen Mathematik. II. Leipzig. 1836. 443 l.

2) L. Olivier: Ein Kennzeichen der Greuzen der Zahl der reellen Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung. Crelle: Journal, I. köt. 223 l. Berlin, 1826.

3) Bulletin des sciences mathematiques, physiques et chimiques de Ferussac. 419. l.

a számbeli egyenletek a fl. ltörtek segélyével. Legyen a megoldandó egyenlet :

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Legyenek az adott együtthatók reális értékek ; m legyen egész szám, és tegyük fel, hogy az egyenletnek egyenlő gyökei nincsenek. Legyenek oly határok, melyek között az egyenletnek gyökei foglaltatnak α és $\alpha + 1$. Tegyük fel, hogy ezen határok között csak egyetlenegy reális gyök foglaltatik. A számok összehasonlítása után könnyen ki fog tűnni, hogy valjon α , vagy $\alpha + 1$ által lesz-e nagyobb a közeledés a kifejtendő gyök valódi értékéhez. Ha ez α által történik, s ha α tevőleges szám, tétessék :

$$x = \alpha + \frac{1}{x_1} ;$$

ha pedig α nemleges : $x = \alpha - \frac{1}{x_1}$. *)

Ha azonban a nagyobb megközelítés $(\alpha + 1)$ által éretik el és ezen $(\alpha + 1)$ tevőleges szám, akkor tétessék :

$$x = (\alpha + 1) + \frac{1}{x_1} ;$$

ha pedig $(\alpha + 1)$ nemleges, akkor

$$x = (\alpha + 1) - \frac{1}{x_1} .$$

Helyettesítve

$$\frac{\alpha x_1 + 1}{x_1} \text{ illetve } \frac{\alpha x_1 - 1}{x_1} ; \text{ vagy}$$

$$\frac{(\alpha + 1)x_1 + 1}{x_1}, \text{ illetve } \frac{(\alpha + 1)x_1 - 1}{x_1}$$

értékeket x helyett $f(x) = 0$ egyenletbe,

$$F_1(x_1) = 0$$

*) Mi végre ez a megkülönböztetés és az analog később következők ?
(Szerkesztőség.)

új egyenletet nyerünk, a melynek az α és $\alpha + 1$ szerinti új határok közt csak egy reális gyöke lehet. Mert ha két értéke volna, pl. m_1 és m_2 , akkor magának x -nek is két reális értéke volna α és $(\alpha + 1)$ határok között; t. i.

$$\alpha \pm \frac{1}{m_1}, \text{ illetve } (\alpha + 1) \pm \frac{1}{m_1}, \text{ és}$$

$$\alpha \pm \frac{1}{m_2}, \text{ illetve } (\alpha + 1) \pm \frac{1}{m_2};$$

a mi a feltevésnek ellentmond.

Keressünk most ismét két határt α_1 és $(\alpha + 1)$, melyek között $F(x_1) = 0$ egyenletnek x_1 gyöke foglaltatik. Itt is könnyű eldönteni, hogy α_1 vagy $(\alpha + 1)$ érték választásával lesz-e e kívánt megközelítés nagyobb. Ha ez α_1 érték által történik, tétessék

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{x_2}, \text{ vagy } x_1 = \frac{\alpha_1 x_2}{x_2 - 1};$$

ha pedig $(\alpha + 1)$ értékkel éretnék el a nagyobb megközelítés, akkor tétessék:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\alpha_1 + 1} + \frac{1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{1}{x_2}, \text{ vagy } x_1 = \frac{(\alpha_1 + 1)x_2}{x_2 + 1}.$$

Behelyettesítve x_1 értékét $F(x_1) = 0$ egyenletbe,

$$F_2(x_2) = 0$$

új egyenlet nyeretik. Ezen egyenlet ugyanazon oknál fogva, mint $F_1(x_1) = 0$ a megfelelő határok közt csak egy reális gyökkel bír. Ha azt találjuk, hogy ezen gyök α_2 és $(\alpha_2 + 1)$ határok között van, ismét

$$x_2 = \frac{\alpha_2 x_3}{x_3 - 1}, \text{ vagy } x_2 + \frac{(\alpha_2 + 1)x_3}{x_3 + 1}$$

helyettesíthető a szerint, a mint egyik vagy másik helyettesítéssel éretnék el nagyobb megközelítés. Így haladva tovább, a keresett gyök értéke a megfelelő helyettesítések után oly fl. ltört által lesz kife-

jezve, melynek mindegyik részletszámlálója az egység, részletnevezői pedig az alkalmazott határok. Minél több részlettört határoztatik meg, annál több tizedes számjegyig lesz a megfelelő közelítő tört által a gyök keresett értéke kifejezve. Ily módon tehát a kifejtett gyök valódi értékét annyira megközelíthetjük, hogy nem lesz szám, mely kisebb legyen, mint a keresett gyök valódi értéke s a talált érték között levő különbség. Könnyü belátni, hogy ha a kisebb határt választjuk, a következő részletszámlálónak mindig ellenkező jel adandó, mint minővel az előtte való bír; a következő előjel azonban egyenlő lesz az előző részletszámláló előjelével, ha az egységgel nagyobb érték használtatott.

Hogy mikép kell eljárni abban az esetben, ha az adott egyenletnek α és $(\alpha + 1)$ határok között több gyöke van, vagy hogy ha ezek bizonyos számú tizedesig megegyeznek, s hogy mennyi ezen gyökök között a reális, s mennyi a képzetes: az egyenletek elméletével ismerős előtt — a mondottak után — világos lesz.

11. §. Hogy az egyenleteknek fentebb adott megoldási módszerét, mely Heis Eduardtól származik,¹⁾ könnyebben áttekinthessük, vegyünk fel egy speciális esetet. Legyen az előbbeni §-ban említett feltételek mellett megoldandó

$$1) \quad x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

egyenlet. Ha $a =$ egy határérték, akkor

$$x = a + \frac{1}{y}$$

helyettesítés által

$$2) \quad \frac{1}{y^3} + \frac{A_1}{y^2} + \frac{B_1}{y} + C = 0$$

alakú egyenletet nyerünk, melyben

$$A_1 = A + 3a$$

$$B_1 = 2Aa + 3a^2 + B$$

$$C_1 = a^3 + Aa^2 + Ba + C.$$

¹⁾ N. Ruland: Praktische Anleitung zum gründlichen Unterricht in der höhern Mathematik. III. Th. 306. l. Bonn 1880.

Ha 2) egyenletre nézve a_1 ismét egy oly egész számot jelent, mely

$$y + 1 > a_1 > y$$

feltételnek eleget tesz, akkor

$$y = a_1 \frac{z}{z+1}, \text{ vagy}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{z+1}{a_1 z} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 z}$$

helyettesítés által 2)-ből

$$3) \quad \frac{1}{z^3} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{B_2}{z} + C_2 = 0$$

alakú egyenletet nyerünk. Ha itt ismét a_2 egy

$$z + 1 > a_2 > z$$

feltételt kielégítő egész szám, akkor

$$z = a_2 \cdot \frac{t}{t+1}, \text{ vagy}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{t+1}{a_2 t} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot t}$$

helyettesítés által a 3)-ből

$$\frac{1}{t^3} + \frac{A_3}{t^2} + \frac{B_3}{t} + C_3 = 0$$

alakú egyenletet nyerünk, melyre nézve, ha a_3 ismét egy

$$t + 1 > a_3 > t$$

feltételt kielégítő egész szám, akkor

$$t = a_3 \cdot \frac{u}{u+1}, \text{ vagy}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{u+1}{a_3 u} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot u}$$

helyettesítés által ismét egy új

$$\frac{1}{u^3} + \frac{A_1}{u^2} + \frac{B_1}{u} + C_1 = 0$$

alaku egyenletet nyerünk. Így folytatva tovább a műveletet, a megfelelő helyettesítések után, a felvett 1) egyenlet egy reális gyöke a következő kifejezés által lesz adva:

$$x = a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \dots$$

vagy fl. ltörtben kifejezve:

$$x = a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \dots$$

Ezen kifejezés a felvett egyenlet egyik reális gyökét fl. ltört alakjában adja, melynek segítségével a keresett gyököt tetszésszerű pontosságig számíthatjuk ki.

12. §. Lehet a numerikus egyenletek gyökeit oly fl. ltört segítségével is meghatározni, melyeknél a részletnevező 10. Ez az előbbieknél mi nehézséget sem fog okozni. Ebben az esetben az eljárás a következő: Ha $f(x) = 0$ egyenletre nézve α és $\alpha + 1$ határok között csak egy reális gyök foglaltatnék, akkor tétessék, ha α pozitív szám:

$$x = \alpha + \frac{x_1}{10},$$

s ha α nemleges:

$$x = \alpha - \frac{x_1}{10}.$$

Mindkét esetben: $10 > (x_1) \overline{=} 0.$

Ezen helyettesítés által tehát $F_1(x_1) = 0$ egyenlet fog nyeretni, melynek csak egy gyöke reális, melynek abs. értéke $\overline{=} 0$ és < 10 . Állíttassanak fel ismét a határok, melyek között x_1 foglaltatik. Legyenek ezen határok α_1 és $\alpha_1 + 1$; és tétessék

$$x_1 = \frac{10 \cdot \alpha_1 + x_2}{10}$$

Helyettesítve ezen értéket $F_1(x_1) = 0$ egyenletbe, $F_2(x_2) = 0$ egyenletet fogjuk nyerni, melynek — hasonló okokból mint fentebb — csak egy reális gyöke lehet, mely $\overline{=} 0$ és < 10 . Ismét felállítjuk az α_2 és $\alpha_2 + 1$ határokat; és így haladva, a keresett gyök értékét tetszésszerű pontossággal határozhatjuk meg.

13. §. A numerikus egyenletek megoldására fl. ltörtek segélyével *Mathiessen*¹⁾ is adott egy igen csinos módszert. *Mathiessen* módszere feltételezi annak az eljárásnak az ismeretét, hogy miképen kell valamely egyenletet olyanná alkotni át, melynek gyökei az adott egyenlet gyökeinek másod, negyed, nyolczad, . . . hatványai. Legyen

$$x^2 - ax + b = 0$$

egyenlet adva, s tétessék feladatunkká ezt egy oly egyenletté alakítani át, melynek gyökei az előbbi gyökeinek négyzetei. Tétessék e végből x helyébe \sqrt{x} , akkor

$$x - a\sqrt{x} + b = 0, \text{ miből}$$

$$x^2 - (a^2 - 2b)x + b^2 = 0,$$

mely egyenletnek gyökei, a felvett alapegyenlet gyökeinek négyzetei. Hasonlóan járván el az utóbbi egyenlettel, oly egyenletet fogunk kapni, melynek gyökei az alapegyenlet gyökeinek negyedhatványai lesznek stb.

Egy másodfoku egyenlet pl.

$$x^2 + ax - b = 0$$

egyik gyöke *Mathiessen* szerint ezek alapján a következő alaku fl. ltört által lesz meghatározva:

¹⁾ Dr. L. *Mathiessen*: Anwendung der oscillirenden Kettenbrüche zur gleichzeitiger Bestimmung zweier Wurzelwerthe einer Gleichung *Zeitschrift für Math. u. Physik.* 6. köt. Leipzig. 1861. 51. l.

$$x = \frac{b-x^2}{a} = \frac{b}{a} - \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots$$

$$\text{vagy: } x = \frac{b}{a} - \frac{b_1}{a a_1} + \frac{b_2}{a a_1 a_2} - \dots$$

hol a_1 és b_1 azon átalakított egyenlet együtthatóit jelentik, melynek gyöke az alapegyenlet gyökeinek négyzetei; a_2 és b_2 pedig azon levezetett egyenlet együtthatói, melynek gyökei az alapegyenlet gyökeinek negyedhatványai stb. Tehát az alapegyenlet:

$$x^2 + ax - b = 0,$$

az átalakított egyenletek pedig:

$$x_1^2 - (a^2 + 2b)x_1 + b^2 = 0, \quad (x_1 = x^2),$$

$$x_{II}^2 - (a_1^2 + 2b_1)x_{II} + b_1^2 = 0, \quad (x_{II} = x_1^2)$$

.

Például legyen megoldandó

$$x^2 + x - 1 = 0$$

egyenlet. Akkor az átalakított egyenletek ezek lesznek:

$$x_I^2 - 3x_I + 1 = 0$$

$$x_{II}^2 - 7x_{II} + 1 = 0$$

$$x_{III}^2 - 47x_{III} + 1 = 0$$

$$x_{IV}^2 - 2207x_{IV} + 1 = 0$$

.

s így a felvett egyenlet egy gyöke lesz:

$$x = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{47} + \dots, \text{ vagy}$$

$$x = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 47} - \dots = 0.619033988750748 \dots$$

mely érték 14 számjegyig egészen pontos.

14. §. Eddig az egyenleteknek csak realis gyökét határoztuk meg. A fl. ltörtek segélyével lehet azonban a képletes gyököket is kikeresni. Erre vonatkozólag több módszer ismeretes. ¹⁾ Serret ²⁾ pl. geometriai fejtegetésekre támaszkodva, a képletes gyök értékét úgy keresi meg, hogy először mind a realis, mind a képzetes gyökök határait állítja fel.

A fl. ltörtek használatához juttató módszer a következő: Egy egyenlet képzetes gyökei, melyek tudvalevőleg csak páros számban fordulhatnak elő, ily alakúak:

$$p \pm q \sqrt{-1}$$

Ha tehát valamely egyenletnek $p + q \sqrt{-1}$ alakú gyöke vane kell, hogy $p - q \sqrt{-1}$ is legyen, ahol p és q értéke mindkét esetben ugyanaz. Ha tehát az adott egyenletben az ismeretlen helyébe $p \pm q \sqrt{-1}$ értéket teszünk, akkor egy oly új egyenletet nyerünk, mely két lényegesen különböző részből fog állani; az egyik rész u. i. tartalmazni fogja a valós, a második a képzetes mennyiségeket, vagyis az új egyenlet ily alakú lesz:

$$P + Q \sqrt{-1} = 0,$$

mely tudvalevőleg csak úgy állhat fenn, ha

$$P = 0 \text{ és}$$

$$Q \sqrt{-1} = 0$$

Az utolsó egyenletből fejezzük ki q -t p által, s helyettesítsük q -nak megtalált értékét $P = 0$ egyenletbe, akkor egy egyenletünk lesz P -ben kifejezve, mely a már ismert módszerek valamelyikével könnyen lesz megoldható.

¹⁾ Grunert: Supplemente. II. k. 569—579. l.

²⁾ J. A. Serret: Handbuch der höheren Algebra. Deutsch bearbeitet von G. Wertheim. I. Bud. Leipzig, 1868. 105—115, 233—237, 253. 254, 293, 294. l.

15. §. Nem lesz érdektelen bemutatni e helyütt a következő, Günther-től származó törvényt: Ha

$$\frac{b}{m} + \frac{b_1}{m} + \frac{b_2}{m} + \dots + \frac{b_{n+1}}{m}$$

ltört értéke = 0, akkor

$$F = b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_n x + b_{n+1} = 0$$

egyenletnek m egy gyöke lesz. Mert ha ezen $x = m$ tétetik, akkor baloldala a ltörttel együtt eltűnik; vagyis, ha

$$F = 0 \text{ és} \\ x = m$$

egyenletekből x kiküszöböltetik, akkor Sylvester dialytikus módszere szerint kell, hogy legyen:

$$\begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & m & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & m & -1 \\ b_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m \end{vmatrix} = 0.$$

De ezen eredményhez, feltételünk mellett akkor is eljutunk, ha a felvett fl. ltörtből indulunk ki; mi által tételünk be lesz bizonyítva. A felvett fl. ltört ugyanis, ha részletnevezőjét végesnek veszszük, csak akkor lehet = 0, ha a számlálója = 0; ez pedig — mint tudjuk — nem egyéb, mint a fentebb nyert determinans. S így a Günther tételének igazsága világos.

16. §. Az előbbeni § alapján csinos bebizonyítását lehet adni a Siaccitól származó következő törvénynek: Ha

$$F = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

akkor

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_0} + x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{a_0} & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_3}{a_0} & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n-1}}{a_0} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ \frac{a_n}{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = \frac{F}{a_0}$$

és

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} x & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} x & 1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \frac{a_{n-3}}{a_n} x & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_1}{a_n} x & 0 & 0 & \dots & 1 & -x \\ \frac{a_0}{a_n} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{F}{a_n}$$

Az első relációt az által kapjuk meg, ha a determinanst

$$\frac{a_1}{a_0} + x$$

összeg szétbontása által hasonlóképen két rész összege által fejezzük ki. Ekkor u. i. az első összeadandó az előbbeni § szerint

$$\frac{1}{a_0} (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n)$$

lesz, a másik pedig: x_n .

Hogy a második relációt bebizonyítsuk, osszunk az összes so-

rokat x -el, s aztán hasonló eljárással bontsuk szét a determinanst, akkor az első összeadandó a következő fl. ltört lesz:

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{a_{n-1}}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{\frac{1}{x}} + \dots + \frac{a_1}{\frac{1}{x}} + \frac{a_0}{x}$$

ez pedig nem egyéb, mint:

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{a_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \dots + a_1 \left(\frac{1}{x}\right) + a_0}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}, \quad \text{vagy}$$

$$\frac{1}{a_n} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x).$$

A második összeadandó pedig:

$$\frac{1}{a_n} x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{a_n}$$

s így az összeg gyakugyan $= \frac{F}{a_n}$.

Ezen törvényt Siacci adta először „Intorno ad una serie e aduna fouzione dei cefficienti binomiali“ czimü értekezésében,¹⁾ azonban minden bizonyítás nélkül. Az itt adott bebizonyítást Günther közölte.²⁾

17. §. A fl. ltörteket igen előnyösen lehet használni a kettős tételhez tartozó oly feladatok megoldásánál is, melyekben nagy számok fordulnak elő. Egy egyszerű példa az eljárást fel fogja világosítani. Legyen pl. a feladat ez: Ha valamely áruból 5720 kgr. 1200

¹⁾ Battaglioni: Giornali di Mathematiche. Vol. XI.

²⁾ Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXI. köt.

frt és 80 krba kerül, mennyibe fog kerülni ugyanazon áruból 1301 kilogramm?

$\frac{1301}{5720}$ közönséges törtet fl. ltörtté alakítva át.

$$\frac{1301}{5720} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{5.8.3} + \frac{1}{5.8.11.13}$$

a feladat megoldása szétbontás útján következőképen eszközölhető:

5720 × {	Ha 5720 klgr. ára 1200 frt 80 kr.
	$\frac{1}{5}$ " " 240 " 16 "
	$\frac{1}{5.8}$ " " 30 " 2 "
	$\frac{1}{5.8.11}$ " " 2 " 72.9 "
	$\frac{1}{5.8.11.13}$ " " — " 20.9 "

Tehát 1301 kgr. ára lesz: 273 frt 11.8 kr.