

Tanulmány

NÉHÁNY GONDOLAT A MATEMATIKÁRÓL

Kroó Norbert

az MTA rendes tagja – kroo@office.mta.hu

George W. Bush, az Egyesült Államok elnöke legutóbbi, az Unió helyzetéről tartott beszédeben meghirdette az *Amerikai versenyképességi kezdeményezés* című programot, amelyben lényeges költségvetési növekedést javasolt az alapkutatások területén, különös tekintettel a matematikai és fizikai tudományokra.

Ebben a javaslatban kiemelkedő fontosságot kapott tehát a matematika és a természettudományok oktatása mint az oktatás minőségének javítása érdekében teendő alaplépés. Azért tervezzük a „matematika most az általános iskola diákjainak” és a „matematika most a gimnáziumok diákjainak” programok beindítását, hogy ígéretes és kutatáson alapuló módszerek vezessenek be a matematika oktatásába, és előkészítsék a diákokat a magasabb színvonalú matematikai kurzusokra.

Ez a fejlemény, továbbá több olyan beszélgetés tanulságai, amelyeket nemzetközi részvétellel folytattam, indítottak arra, hogy fizikusként a matematika fontosságáról fogalmazzak meg néhány gondolatot, a teljesség igénye nélkül.

A fizikai kurzusokat gyakran a régi görögökkel kezdjük, de igaz ez a matematikára is. Pitagoraszra hivatkoznék, akinek fő ér-

deme nem (a mások által valószínűleg már korábban megfogalmazott) a derékszögű háromszögekre érvényes $a^2+b^2=c^2$ tétel, hanem a bizonyítás gyakorlatának bevezetése a matematikába.

A pitagoraszi iskolára jellemző a számok mindenképp fölé helyezése. A régi görögök meg voltak győződve arról, hogy a számok jelentik a kulcsot a világegyetem titkainak megismeréséhez. De jellemző volt rájuk a geometria analitikai megközelítése is. Persze nem ismerték a negatív és komplex számokat, de igazolták az iracionális számok, mint a $\sqrt{2}$ létezését. Ez utóbbi annyira zavarta őket, hogy titokban tartották a felfedezésüket. Sőt, az is előfordult, hogy azt a kollégájukat, aki ezt „kikotyogta” – elnémították.

Pitagoraszt elbűvölte a zene is, különösen a zene és a számok kapcsolata. A kifeszített húr hosszát megfelelően az első felharmonikust kaphatjuk meg és így tovább. Vagyis a zene matematika (is). A hangokat (frekvenciákat) számok hányadosaiként írták le. Úgy gondolták, hogy a csillagászattól a zenéig a számok minden felvetendő kérdésre választ adnak.

E felfogás modern változata ma is megfigyelhető. Magam is csodálattal szemlélem azt a tényt, hogy a matematika, mint az emberi gondolkodás talán legelvontabb termé-

ke, az anyagi világ minden jelenségének leírására képes.

A matematika volt az emberiség történelme során kialakult első, a szó szoros értelmében vett tudomány. Minden „régí” társadalom fejlesztette és megpróbálta mindennapi problémái megoldására alkalmazni. Használták az ókori kultúrák nagy építkezésein, a babiloniak nyilvántartásaiban, amelyeket a modern könyvelés elődjének tekinthetünk, az egyiptomi és maja piramisok terveinek kialakításában, és a hieroglifák vagy pontvonalas jelek is alkalmasak voltak számolási feladatok megoldására.

Az indiaiak rájöttek a π szám „titkaira” az algebra fejlesztése során, és a kör területéhez és területéhez köthető kapcsolatra is. Ismerjük azon kínai, indiai és japán erőfeszítéseket is, amelyek a szám minél pontosabb kiszámítására irányultak. Kínában egyébként mindig is a tízes számrendszert használták, és egyes források szerint a zérus fogalmát is ismerték. A tízes számrendszer hozzánk indiai közvetítéssel kerülhetett.

Az aritmetika és geometria már a görögök által is kiterjedten művelt diszciplínáinak egyesítése, az algebra kultúrából nőtt ki. Igaz, hogy már a babiloniak és a görögök is sikerrel birkóztak meg a másodfokú egyenletek megoldásával, de a középkori arab világnak sikerült az indiai numerikus algebra és a görög geometriai algebra egyesítése útján sokkal előbbre jutni. Magasabb rendű egyenleteket is meg tudtak oldani, de fontos fejlemény az exponenciális és logaritmus fogalmak (és jelölések) bevezetése is. És még meg sem említettük a negatív és az imaginárius számokat!

Ebben az időszakban a fejlődés Európában megtorpant, aminek mai szemmel nézve furcsa magyarázata van.

A rómaiak számrendszerének komoly hiányossága a zérus szimbólum hiánya volt. Ez a tízes számrendszerben a 13. sz.-ban jelent meg Indiában. A zérus fogalma nélkül sokmindent

nem lehetett volna megtenni a csillagászatban, a fizikában, a kémiában vagy az ipari folyamatok modellezésében. De a rómaiak rendszerét az aritmetikai műveletek (szorzás stb.) elvégzésében is nehéz használni.

Éppen ezért kritikussá vált, hogy 1259-ben Európa jelentős részében megtiltották a zérus szimbólum használatát, mint a nem keresztény kultúrából importált jelet. Ennek eredményeként a matematika fejlődése több évszázadig elmaradt, örököül hagyva például egy sor abszurd mértékrendszert. Napóleon mértékrendszer-reformja is ennek felismerésén alapult; egyébként azt is felismerte, hogy a matematika fejlődése és a gazdaság fejlődése között szoros kapcsolat fedezhető fel.

Talán a 16. századtól kezdődően indult az európai matematika fejlődésnek, többek között arab forrásokra alapozva, például magasabb rendű egyenletek megoldásával, az oszthatatlanság módszereinek bevezetésével, amely a Leibniz-féle infinitezimális módszer elődje lehetett. A polinomok matematikáján keresztül vezethetett az út az integrál- és differenciálszámítás felé. De Bolyai János és Nyikolaj Lobacsevszkij munkái a geometriát is új alapokra helyezték, mint ahogy Bolyai az édesapjának írt levélben arról beszélt: „egy új világot teremtettem”.

A 19. és 20. század matematikájának hősei Sir William Rowan Hamilton, David Hilbert, Arthur Cayley, John Canton, Kurt Gödel, Neumann János, Alan Turing és még sokan mások teremtették meg a modern matematika azon gazdag eszköztárát, amely azt nemcsak korunk természettudományának, hanem mindennapi életünk szinte minden folyamatának alapjává tehető.

Ha ezt a még ilyen rövid összefoglaló alapján is csodálatos fejlődést végiggondoljuk, akkor néhány általános következtetést mindenképpen megfogalmazhatunk. Az első megállapítás az lehet, hogy a matematika fejlődése a különböző kultúrákban sok hasonlóságot mutat. Ez valószínűleg az

emberi agy képességeiben gyökerezik és a számokkal és geometriai mennyiségekkel való munkában valósul meg. Sok jel utal arra, hogy az ember „matematikára programozva” születik. A matematika nemcsak a problémák kvantitatív megoldásának, de egyúttal az emberi gondolkodás formálásának eszköze is. A matematikai gondolkodás evolúciós előny, a sikeres vadászat, a modern társadalmak alapját képező munkamegosztás és együttműködés, a logikus tervezés eszköze. Korai megjelenését az egyén fejlődésében a csecsemők pont-vessző képekre való reagálását felmérő kísérletek is igazolják. Ezért a gyermekfejlődés minél korábbi szakaszában kezdődő matematikaoktatás (elsősorban numerikus problémák feloldása formájában) alapvető fontosságú. Ezért is óriási hibának tartom, hogy gyermekeink „kalkulátor fertőzöttek”, nem, vagy csak igen korlátozottan sajátítják el a fejben számolás képességét, ami matematikai analfabetizmushoz vezethet.

Mindezek alapján tehát kijelenthető, hogy a matematika fejlődése az egyén gondolkodásának fejlődésén keresztül párhuzamos a társadalmak fejlődésével. Ez áttételesen azt is jelenti, hogy a tények előbb vagy utóbb, de mindig győznek, hiszen a tények mögött számok rejtőznek. Az új tudományos felfedezések is csak akkor győzhetnek, ha számokká redukálhatók.

Az előzőekből következően kijelenthető – és ezt támasztják alá a történelmi tapasztalatok is –, hogy a felfelé ívelő társadalmak fejlesztik, használják és magas szinten oktatják a matematikát, a lefelé ívelők pedig elhanyagolják az oktatást, különösen a matematika (és az ehhez szorosan kapcsolódó természettudományok) területén.

Ezt a tényt ismerte fel az Amerikai Egyesült Államok politikai vezetése is (természetesen a gazdasági és tudományos elit nyomására), és hirdette meg a már említett versenyképességi kezdeményezést.

De hadd hivatkozzam a múlt század arculatát alapvetően befolyásoló világhírű

magyar tudósok példájára. A néha „marslakóként” emlegetett Wigner Jenő, Teller Ede, Neumann János, Szilárd Leó, Gábor Dénes és a többiek tevékenységét a matematika és a természettudomány (esetükben elsősorban a fizika) szoros kapcsolata jellemezte. Eredményeik bizonyítják, hogy a matematika minden tudomány gyökere – Pitagoraszról Wigner Jenőig –, a nagy felfedezések alapja.

Mivel a technológia és fejlődése a tudományon alapul, a tudomány pedig a matematikán, közvetve a technológiai (és gazdasági) fejlődés alapja is a matematika fejlődése és alkalmazása. Ezért Napóleon azon kijelentése, hogy a matematika fejlődése és tökéletesítése végeredményben az államok prosperitásával hozható kapcsolatba, talán még soha sem volt olyan fontos és időszerű, mint napjainkban, amikor a gazdasági fejlődés a technológiai megújuláson, újabb, a kutatásban gyökerező technológiák megjelenésén és bevezetésén, az innovációs lánc lerövidülésén és az innovációs folyamat felgyorsulásán dől el.

Térjünk vissza egy gondolat erejéig a görögökhöz. Korábban a matematika gyökerei tárgyalásánál Pitagorasz nevét és iskoláját említettem, most egy valamivel későbbi kor óriását, Platont szeretném megidézni. Platón a pitagoraszai tanokra épített, de például nem osztotta annak a számok mindenhatóságán alapuló filozófiáját. Viszont a matematikát az emberi elme elképzelhető legjobb „edzési” módszerének tartotta. Iskolája bejáratát *A matematikában tudatlanoknak a belépés tilos!* felirat díszítette. Azzal is továbblépett elődjénél, hogy a valószínűséget is a matematika fogalmai közé emelte. Azt hirdette, hogy ha egy problémával kapcsolatban nem vagyunk képesek tökéletesen egzakt és szelfkonzisztens megoldást találni, megelégedhetünk olyanokkal is, amelyek valószínűek.

Ez utóbbi áll közel a modern kvantummechanikai gondolkodáshoz is, ezért nem meglepő, hogy Wemer Heisenberg és mások is szívesen nyúltak vissza a platóni filozófia győ-

kereihez. A kvantummechanikai gondolkodás a korábban megszokottól gyökeresen eltérő jellegére jó példa Albert Einstein esete, aki nem hitt a folyamatok valószínűségi jellegében. Ismert mondása, hogy „Isten nem kockajátékos”, ezzel megkérdőjelezte a kvantummechanika valószínűségeken alapuló értelmezését. De egy másik kijelentése kevésbé ismert. Azt mondta, hogy ha a kvantummechanika ilyen, az nagyon furcsa. Erre pedig a legutóbbi évek kísérleteinek fényében, anélkül, hogy a részletekbe belemerénénk csak egyet mondhatunk: valóban nagyon furcsa, de igaz.

Az eddig elmondottaknak természetesen hazánk számára is van üzenete. Mint akár az USA-ban, akár másutt, nálunk is a fel-

emelkedés és így a versenyképesség kulcsa csak a matematikai és természettudományos oktatás és természetesen kutatás erősítése lehet. Kell, hogy fiatalajaink újra érdeklődéssel forduljanak e területek felé, hogy újra hangadók legyenek a nemzetközi versenyeken, hogy megbecsüljük a felkészítést végző tanárokat, és vonzóvá tegyük a hazai kutatói pályát. És az is kell, hogy minél több honfitársunk sajátítsa el a matematikai gondolkodás azon szintjét, amely választott szakmája művelését magasabb színvonalon teszi lehetővé.

Kulcsszavak: *matematika, alapkutatás, versenyképesség, bizonyítás, valószínűség, zérus, gazdasági fejlődés, gondolkodás-formálás, technológia*

