

dr. báró Nopcsa Ferenc: Fejlődéstörténeti és örökléstani következtetések a hüüllök tanulmányozásából. *Állattani Közlemények* 24/3–4 (1927) 125–143.  
<http://real-j.mtak.hu/8080/>  
[http://real-j.mtak.hu/8080/1/AllataniKozlemenyek\\_24.pdf#page=135](http://real-j.mtak.hu/8080/1/AllataniKozlemenyek_24.pdf#page=135)

Bevilaqua-Borsody Béla: Adalékok a gellérthegyi „csillagásztorony” történetéhez. *Stella* 4/1 (1929) 15–25.  
<http://real-j.mtak.hu/6783/>  
[http://real-j.mtak.hu/6783/1/MTA\\_Stella\\_1929\\_4.pdf#page=19](http://real-j.mtak.hu/6783/1/MTA_Stella_1929_4.pdf#page=19)

Bevilaqua-Borsody Béla: A Galánthai gróf Eszterházy Károly egri püspök által alapított egri egyetem csillagvizsgálójának története. 1762–1883. *Stella* 4/3–4 (1929) 101–143.  
<http://real-j.mtak.hu/6571/>  
[http://real-j.mtak.hu/6571/1/TermtudKozl\\_1876.pdf#page=105](http://real-j.mtak.hu/6571/1/TermtudKozl_1876.pdf#page=105)

Barnóthy Jenő: Mezonok szerepe a kozmikus sugárzásban. – Apró közlemények. *Csillagászati Lapok* 2/1 (1939) 41–44.  
<http://real-j.mtak.hu/6787/>  
[http://real-j.mtak.hu/6787/1/MTA\\_CsillagaszatiLap\\_02.pdf#page=49](http://real-j.mtak.hu/6787/1/MTA_CsillagaszatiLap_02.pdf#page=49)

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# IFJÚ FIZIKUSOK NEMZETKÖZI VERSENYE 2018 – MAGYAR SZEMMEL – 2. rész

Gyulai Márton – Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc  
Kadlecik Ádám – Tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium, Tata  
Vavrik Márton – Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest  
Hömöstre Mihály – Budapesti Német Gimnázium, ELTE TTK  
Ispánovity Péter Dusán – ELTE TTK  
Vincze Miklós – ELTE TTK  
Jenei Péter – ELTE TTK

A cikk első részében már beszámoltunk 3 érdekes fizikai probléma vizsgálati eredményeiről az Ifjú Fizikusok 31. Nemzetközi Versenyéről. Most 3 újabb kis tanulmányt közlünk. A fejezetek szerzői most is versenyzőink. Minden fejezet egy problémát mutat be és közvetlenül az elején, dőlt betűvel szedve található a versenykiírásban szereplő eredeti problémaírás.

## Tesla-szelep

*A Tesla-szelep egy állandó geometriájú, passzív, egyirányú szelep. A Tesla-szelep egyik irányban sokkal nagyobb ellenállást fejt ki az áramlással szemben, mint a másikban. Készíts egy ilyen eszközt és vizsgáld meg a releváns paramétereit!*

A feladat egy olyan, mozgó alkatrészek nélküli szerkezet megalkotása volt, amelyben víz vagy egyéb folyadék két irányban is – az egyikben lényegesen



Vavrik Márton 2018-ban végzett a Berzsenyi Dániel Gimnázium speciális matematika szakán, jelenleg a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizika szakos hallgatója, és ugyanitt több, mint egy éve foglalkozik fúziós plazmafizikával. A 2017 áprilisában megrendezett Ifjú Fizikusok Osztrák Versenyén (AYPT) a magyar csapattal I. díjat szerzett. 2018 júliusában Pekingben, a bronzérmes magyar csapat tagjaként vett részt az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén (IYPT).

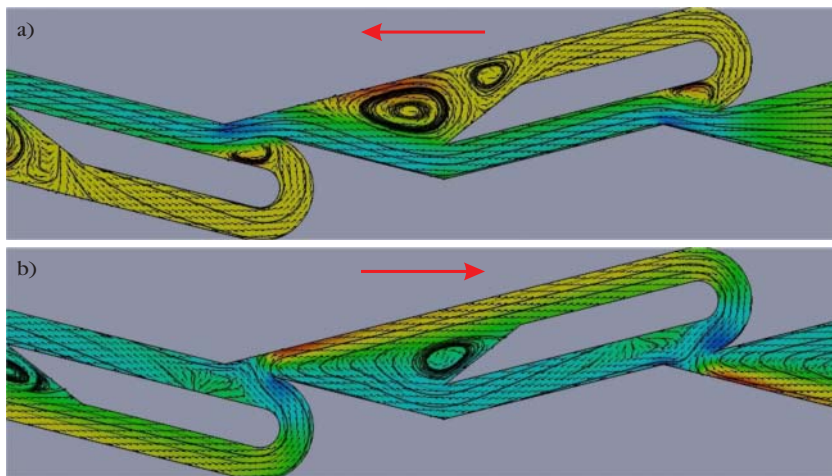
nagyobb ellenállásba ütközve, mint a másikban – áramolhat. Nevéből sejtethetjük, hogy *Nikola Tesla* találta fel 1920-ban [6] és előnye, hogy konstans geometriája miatt a konvencionális szelepeknél nehezebben hibásodik meg és kiválóan alkalmazható nehezen elérhető kutakban. Tesla eredetileg forró, oszcilláló gőz egyenirányítására használta, manapság pedig a mikrofluidikában tűnt fel. Feladatom volt a szelep előállítás, vizsgálata és optimalizálása.

Mint minden áramlástan problémában, az elrendezés geometriája fontos szerepet játszik. A szelep, ha gyors irányban folyik át rajta a folyadék (*16.a ábra*), alig fejt ki ellenállást, enyhén cikk-cakkozó mozgást végez.

Érezhető, hogy minél többet kell fordulnia az áramló közegnek, annál több energiát veszít, éppen mintha egy mozgó autóval kanyarodnánk. Ez az effektus még számottevőbb a lassú irányban, ahol esetenként teljesen meg is fordítjuk a folyadékot, „összeütköztetve” az egyenesen haladó anyagárammal (*16.b ábra*).

Először a Tesla által használt geometriát valósítottam meg (*17.a ábra*) a Solidworks szilárdtest-modellező és tervező programmal, amelyben végtest-ana-

A versenyre való felkészülés és a versenyen való részvétel anyagi háttérét a MOL Nyrt., az Audi Hungaria és az Emberi Erőforrások Minisztériuma biztosította, valamint a nemzeti tehetség program NTP-NTMV-17-B-0001 számú pályázata. A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta. Köszönettel tartozunk a BME Polimertechnikai Tanszékének a Tesla-szelepek legyártásáért.



16. ábra. Szimulációs kép a szelep jellemző áramlása (a) gyors, illetve (b) lassú irányban.

lízissal szimulálni is tudtam az áramlást, és 3D nyomtatásra is alkalmas modelleket tudtam készíteni.

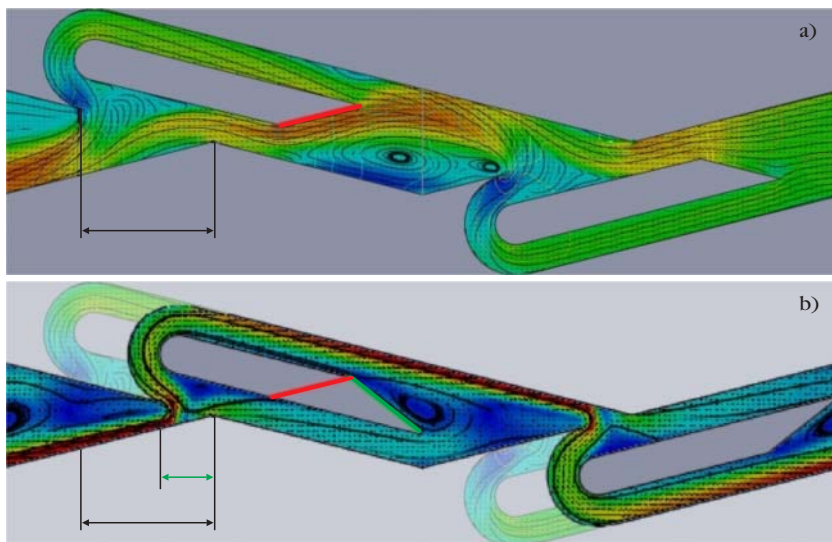
Egy szelep jóságai tényezője a diodicitása, vagyis lassú és gyors irányban, egy bizonyos  $v$  sebesség fenntartásához szükséges nyomásváltozások aránya:

$$D_i = \left( \frac{\Delta p_{\text{lassú}}}{\Delta p_{\text{gyors}}} \right)_v \quad (21)$$

Ez a Tesla-féle geometria esetében 1,7-nek adódott. A továbbiakban az volt a célunk, hogy ezt az értéket minél tovább növeljük.

Észrevehetjük, hogy egy terelő él (pirossal) az áramlás jó részét a főcsatornába tereli (lásd 17.a ábra). Ha ezt az élt az 17.b ábrán vázolt módon megfordítjuk, az áramlás a visszaforgató ágba fog koncentrálni, ahol több energiát veszít. A szimulációk azt mutatták, hogy ez a módosítás valóban jelentősen javította a szelepet. Ha csökkentjük a T-keresztződés kimenetének hosz-

17. ábra. (a) Tesla eredeti terveinek megfelelő áramlási szimuláció (pirossal kijelölve a terelő él, a vízszintes nyilak a T-keresztződés hosszát jelölik), valamint (b) az általam módosított verzió.



szát (vízszintes fekete nyíl), jobban egymásnak szorítjuk a két, ellentétes áramot, amelyek így még több energiát veszítenek. Az így optimalizált szelep szimulált diodicitása 3,22.

Az optimalizált szelepet a BME Polimertechikai tanszékén Polyjet technológiával nyomtattuk, és konstans nyomás alá helyeztük, amelyet egy 107 cm magasan lévő túlfolyós tartállyal biztosítottunk.

Az első mérésekben 2 liter víz lefolyási idejét mértem. Innen megtudtuk határozni az átlagsebességét. De a diodicitást a nyomások arányaként definiáltuk, és ebből a mérésből csak sebességarányt tudunk számolni. A kettő közötti át-

váltásra Bardell [7] adott egy mélyebb bizonyítást, de ha végiggondoljuk, hogy a belépő  $p$  nyomás munkájából a folyadéknak  $v^2$ -tel arányos mozgási energiája lesz, beláthatjuk:  $p \sim v^2$ .

Ezt az összefüggést a szimulációk is megerősítik. Ezáltal a mért 1,8-as sebességarányból a diodicitás  $3,24 \pm 0,02$ , amely hibán belül azonos a szimulált értékkel (3,22).

Az energia elvesztésében igen fontos a turbulencia szerepe is. Ismerhetjük, hogy ezt az  $Re$  Reynolds-szám [8] írja le, ami kiszámolható például a szelep bármelyik belső felületére, amely egy  $a$ - $b$  oldalhosszúságú téglalap:

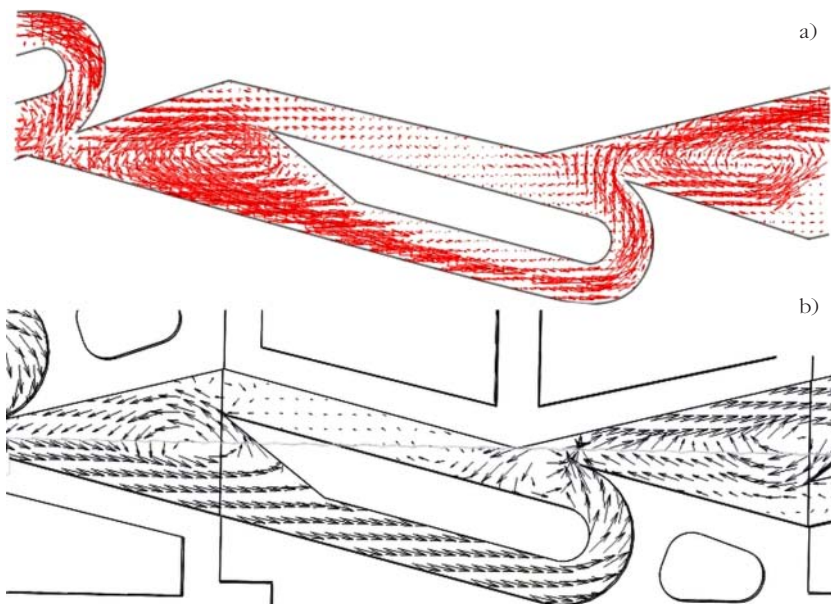
$$Re = \frac{\rho v D_H}{\mu}, \quad (22)$$

ahol

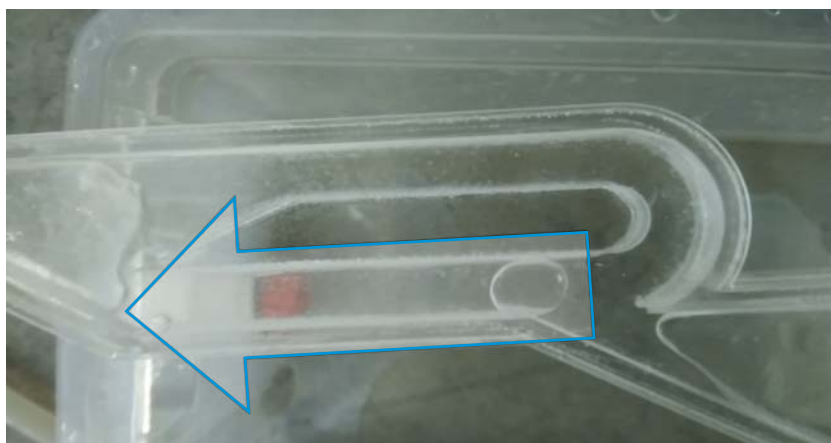
$$D_H = \frac{4 a b}{a + b}. \quad (23)$$

Esetünkben  $a = 1$  cm és  $b = 0,5$  cm a legszélesebb részen,  $a = 0,3$  cm és  $b = 0,5$  cm a legszűkebb részen. A kísérleteinkben kapott értékek  $Re = 700$  és  $5800$  között szóródnak, amelyre a sebességen kívül az is hatással van, hogy melyik keresztmetszetre számoljuk ki, így van, ahol akár kétszeres lehet, mint máshol a szelepből. A lamináris-turbulens átmenet jellemző határszámát a szakirodalom sokféleképpen határozza meg, jellemzően  $2000$  és  $13000$  közötti értékeket találhatunk. Ezek szerint az áramlás általában a lamináris-turbulens átmenet közelében van, olykor egészen lamináris.

Am, ha az áramlás lamináris lenne, akkor sebessége független lenne az irányától. Tehát a diodicitásnak



18. ábra. Vektormező (a) PIV módszerből és (b) szimulációból.



19. ábra. Egy képkocka az általunk készített videóból [9], amely azt mutatja, hogy lassú irányban középen a víz fő áramlással ellentétesen, a nyíl irányában mozog.

1-nek kellene lennie. De nyilván nem ez történik! Léteznie kell – legalább az áramlási tér bizonyos részein – turbulens disszipációnak is, és ennek a lassú irányban kell erősebbnek lennie. Ha ezt akarjuk vizsgálni, időben és térben kevésbé átlagolt sebességmérésre van szükségünk.

Erre egy lehetőség, hogy adott magasságból vízszintesen folyattatjuk ki a szelepből a vízugarat. Ekkor – ha időnként lefotózzuk, majd a pálya egyenletéből meghatározzuk a kiindulási sebességét – a sebesség időbeli változását követhetjük.

Talán a legpontosabb, ha a PIV (Particle Image Velocimetry) módszert használjuk. Az eljárás lényege, hogy a vízbe apró poliamidrészecskéket helyezünk, és egy lézersíkkal felülről megvilágítjuk a szelepet, majd egy kamerával képkockapárokat veszünk fel, amelyek készítése között 1 ms telik el. A képeken a poliamidszemcsék mozgásából kereszt-korrelációval meghatározható mindegyik pontban a folyadék sebességvektora. Ehhez a módszerhez egy ötször nagyobb (3 eleme tartalmazó 80 cm hosszú)

szelepet vágattunk ipari lézerrel, plexiből. Ezt a módszert – többek között – a turbulencia vizsgálatára használtuk.

A PIV módszer másik előnye, hogy vektormezőt ad, ésilyent a szimulációból is tudunk exportálni. Így össze tudjuk hasonlítani a kettőt, mintegy leellenőrizve a szimulációk valóságtartalmát (vesd össze 18.a és 18.b ábrát). Ha ezt megteszük, láthatjuk, hogy valóban hasonló az örvénylés és a visszaforgatás mechanikája, ugyanúgy látunk egy visszafelé folyást a középső csatornában (19. ábra), és úgy általában hasonló a sebességvektorok iránya és mérete.

A folyadék viszkozitása is hatással van a turbulenciára, ezért diodicitást különböző koncentrációjú glicerinvíz keverék átfolyatásával is mértük, és azt vettük észre, hogy nagy viszkozitásnál a diodicitás szinte 1-nek adódott.

Összességében többféle módon építettem és elemeztem a szelepet, amelyekben fontos a geometria és a viszkozitás szerepe, és sikerült előállítanom 3,24-es diodicitású szelepet is, amely igen közel áll az elméleti jöslatokhoz.

Vaurik Márton

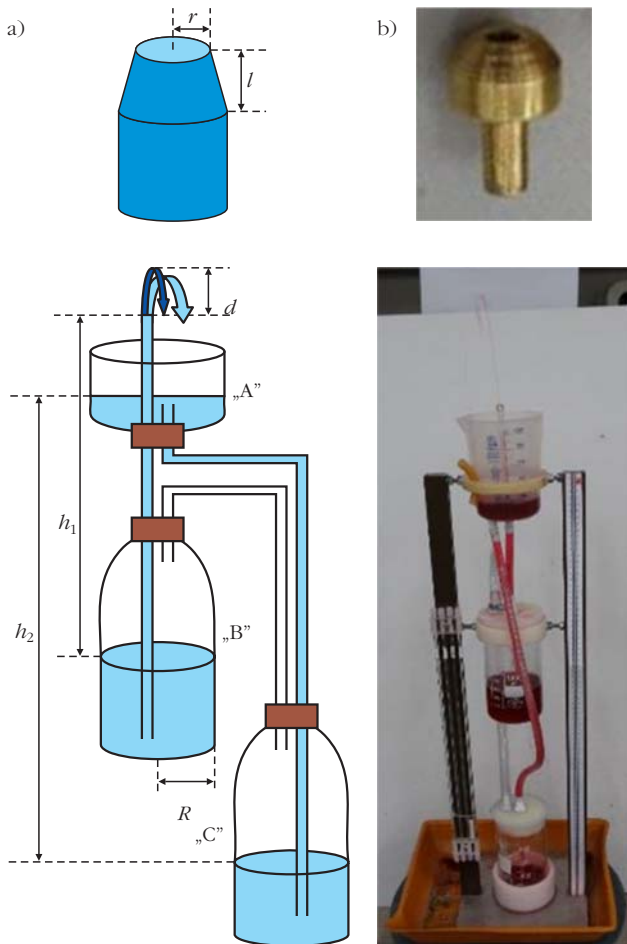
## Hérón szökőkútja

*Építs egy Hérón-szökőkutat és magyarázd meg hogyan működik! Vizsgálj meg, hogy a releváns paraméterek miként befolyásolják a vízszlop magasságát!*

Hérón szökőkútja (20. ábra) a következőképp épül fel: három tartályból áll, amelyeket csövek kötnek össze. A legfelső, „A” tartályból egy cső indul a legalsó, „C” tartályba. Ezt egy másik cső a középső, „B” tartállyal köti össze. A „B” tartályból indul a kimeneti cső, amin keresztül a vízszögár kilövell. Az „A” tartály teteje nyitott, a többi hermetikusan le van zárva. A kék színnel jelzett csövekben víz folyik, a fehérben levegő áramlik.



Kadlecsik Ádám 2015 óta a Tatai Eötvös József Gimnázium és Kollégium tanulója. A 2018-ban megrendezett Ifjú Fizikusok Osztrák Versenyén (AYPT) a magyar csapat tagjaként 2. helyezést ért el. A 2019-ben megrendezett Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén (IYPT) a bronzérmes magyar csapat tagja volt.



20. ábra. Héron-szökőkút (a) sematikus képe és (b) fényképe. Felül a kimeneti cső végére illeszthető szűkítő látható. Kicsi  $r$  a szűkítő sugarát, nagy  $R$  a középső tartály sugarát,  $l$  a szűkítő hosszát,  $d$  a vízszögár hosszát,  $h_1$  és  $h_2$  a két fontos vízszög magasságát jelöli.

A jelenség folyamata: töltjük meg a „B” tartályt, ezután öntsünk vizet az „A” tartályba. Az „A” tartályból a víz lefolyik „C”-be, ott összenyomja a bent lévő levegőt, így nyomása megnő. A levegő egy része átáramlik „B” tartályba. Itt a megnövekedett belső nyomás kinyomja a vizet a kimeneti csövön keresztül.

Két vízszöglet vehetünk észre,  $h_1$ -et, és  $h_2$ -t. Könnyen belátható, hogy míg a  $h_2$ -es vízszöglet hidrosztatikai nyomása kinyomja a vizet a „B” tartályból, addig a  $h_1$ -es nyomása ennek ellen tart. Ebből az következik, hogy a rendszer által létrehozott, a „B” tartályban levő folyadékra ható nyomás:

$$p_{hid.} = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g d, \quad (24)$$

ahol  $d$  a vízszögár – elvi, maximálisan elérhető – magassága. Ezzel az egyenlettel már becslést adhatnánk a szökőkút várható magasságáról, viszont ne feledkezzünk meg a különböző, nyomásvesztéssel járó folyamatokról. Ilyen folyamatok például a viszkózus súrlódás, esetleges turbulens áramlások stb. Ezen  $p_v$  nyomásvesztések levezetése nagyon hosszú, ezért nem részletezzük, de feltehetjük, hogy az összes veszteség nagysága arányos a folyadék  $v_B$  középső tartály-

beli áramlási sebességével, a folyadék  $\rho$  sűrűségével és a nehézségi gyorsulással:

$$p_v = C \rho g v_b, \quad (25)$$

ahol  $C$  a kút ellenállását jellemző – méréssel meghatározható – konstans és  $v_B$  a középső tartálybeli vízszint-változás sebessége, azaz a rendszer egy tipikus áramlási sebessége. A feladat megoldása során azt a lehetőséget is vizsgáltuk, amikor a kimeneti cső végére szűkítőt helyeztünk. Az ottani nyomásvesztés értékét a Hagen–Poiseuille-törvény segítségével közelítettük:

$$p_{sz} = \frac{8 \mu l v_k}{r^2}, \quad (26)$$

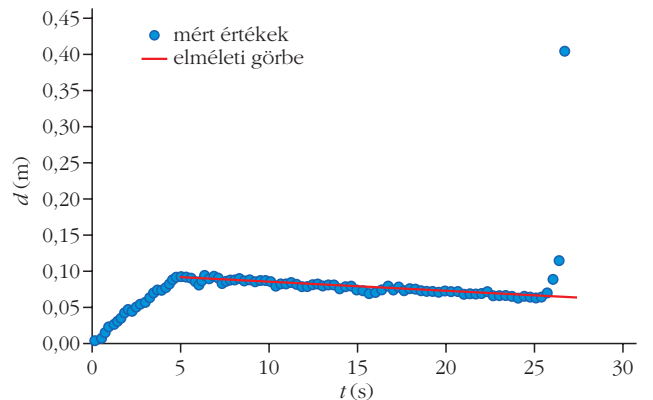
ahol  $\mu$  a dinamikai viszkozitás,  $l$  a szűkítő hossza,  $v_k$  a vízszögár sebessége,  $r$  a szűkítő sugara. A (24)-es egyenletet a (25)-ös és (26)-os egyenletekkel – mint negatív előjelű tagokkal – kiegészítve,  $d$ -re, azaz a vízszögár magasságára átrendezve, kiegészítve egy a légellenállás hatását leíró empirikus  $C_{le}$  konstanssal, a következő egyenletet kapjuk:

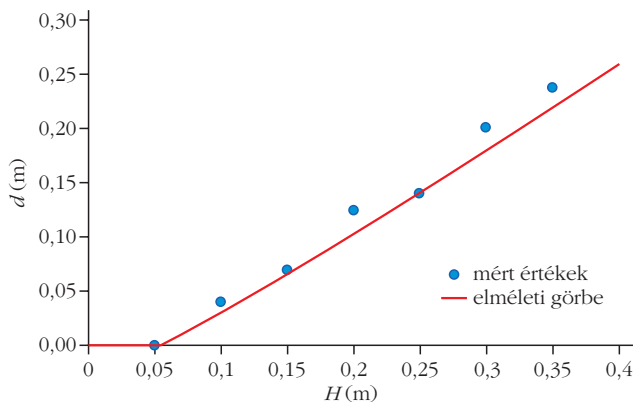
$$d = C_{le} \frac{1}{2g} \left[ - \left( \frac{8 \nu l}{r^2} + Cg \frac{r^2}{R^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{8 \nu l}{r^2} + Cg \frac{r^2}{R^2} \right)^2 + 2gH} \right], \quad (27)$$

ahol  $\nu$  a kinematikai viszkozitás,  $R$  a középső tartály sugara és nettó vízszintkülönbség  $H = h_2 - h_1$ . A (7) egyenlet magában foglalja az összes fontos paraméter hatását  $d$ -re.

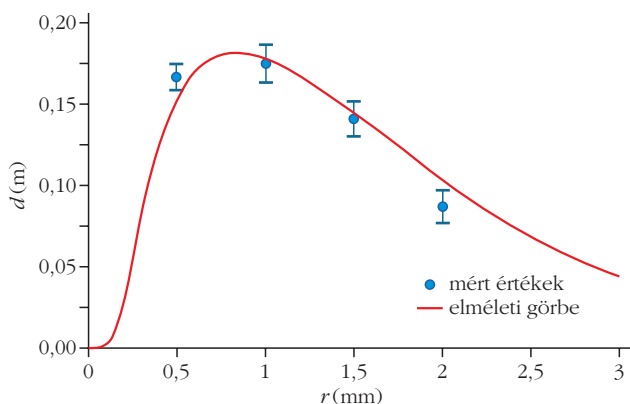
A 21. ábrán egy tipikus mérési eredményt láthatunk a szökőkút  $d$  magasságára az idő függvényében. A függvény alapján három szakaszra bontható: kezdetire, középsőre és végsőre. A kezdetiben  $d$  folytonos

21. ábra. A szökőkút (kiáramló vízszöglet)  $d$  magassága az idő függvényében, amely jól láthatóan 3 szakaszra különül el. Elméletünk a középső, leghosszabb szakaszra érvényes. Erre a részre az elmélet által jósolt egyenest is berajzoltuk.





22. ábra. A szökőkút (kiáramló vízoszlop)  $d$  magassága a  $H$  nettó vízszintkülönbség függvényében.



23. ábra. A szökőkút (kiáramló vízoszlop)  $d$  magassága a szűkítő sugarának függvényében.

növekedését láthatjuk, hiszen ebben a fázisban folyik le a víz „C” tartályba, és alakítja ki a  $h_2$ -es vízoszlopot a csőben. Ebben a szakaszban is érvényesek a korábban bemutatott megfontolásaink, ám azokat még a levegő közel adiabatikus összenyomódásával – amelyet már numerikus módszerekkel számoltunk – is ki kell egészítenünk. A középső szakaszra azonban egzaktul igaz a (27)-es egyenletünk, ami az idő függvényeként

$$d(t) = C_{le} \frac{1}{2g} \left[ - \left( \frac{8vl}{r^2} + Cg \frac{r^2}{R^2} + 2g \frac{r^2}{R^2} t \right) + \sqrt{\left( \frac{16vl}{r^2} + Cg \frac{r^2}{R^2} + 2g \frac{r^2}{R^2} t \right)^2 + 2gH_0} \right]^2 \quad (28)$$

alakban írható fel, ahol  $H_0$  a középső szakasz kezdetén mért nettó vízszintkülönbség. A 21. ábrán látható, hogy ez nagy pontossággal becsli meg a szökőkút magasságát a középső szakaszban. A végső szakaszban egy heves kilövellést tapasztalunk. Ennek oka, hogy a kísérlet végénél a középső tartály szinte üres, és a kimeneti csőbe levegőbuborékok kerülnek, amik megtörik a  $h_1$ -es vízoszlopot, így megszüntetve annak az ellennyomását.

Nézzünk meg néhány paramétert közelebbről. A 22. ábrán a szökőkútból folyamatosan kiáramló vízoszlop  $d$  legnagyobb magasságát – eltekintve a végső kilövelléstől – láthatjuk a két tartály  $H$  nettó vízszintkülönbségének függvényében. A függvényen jól látható, hogy addig nem keletkezik vízszög, amíg  $H < 5$  cm. Ez azért van, mert a kimeneti cső végén egy vízbuborék keletkezik, aminek felületi feszültsége akadályozza a folyadék kiáramlását, ennek az értéke megegyezik 5 cm magas vízoszlop hidrosztatikai nyomásával.

A 23. ábrán a szűkítő  $r$  sugarának függvényében láthatjuk a szökőkút magasságát. Vegyük észre, hogy a túl keskeny és a túl vastag szűkítő is alacsonyabb vízszögat eredményez. Az egyenletről az ideális méretet is leolvashatjuk, ami – a mi esetünkben – körülbelül 0,75 mm.

Hogyan érjük el a legmagasabb szökőkutat? A „B” és „C” tartály között minél nagyobb távolságot kell tartanunk. Az optimális szűkítő mellett – a viszkozitási csökkentésének érdekében – használjunk forró vizet, vagy akár más anyagokat is. Használjunk vastag csöveket, amelyek ne csavarodjanak, hogy  $p_v$ -t a lehető legjobban lecsökkentsük.

Kadlecik Ádám

## Palackdobálás („Bottle flip”) játék

A „Bottle flip” játék során egy részben töltött műanyag palackot a levegőbe dobunk, úgy, hogy egy bukfenc után egy vízszintes felületen stabil álló helyzetben landoljon. Vizsgálj meg a jelenséget és határozd meg milyen paraméterek mellett lesz a dobás sikeres!

A palack sematikus mozgását a 24. ábra mutatja.

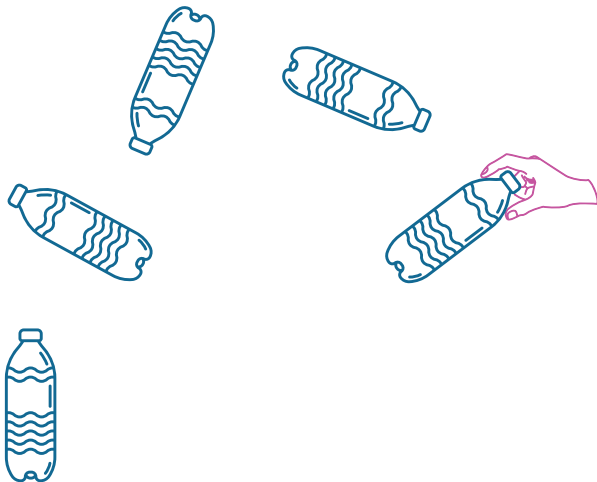
Kísérleteink során rengeteg dobást végeztünk, amelyeket nagysebességű kamerával (500-1000 fps) rögzítettünk [10]. A kiértékelés egy általunk írt követőprogram segítségével történt. Ez Python nyelven íródott az OpenCV könyvtárat felhasználva, amely képkockáról képkockára képes volt megállítani a palack térbeli pozícióját és szögelfordulását.

A jelenséget két fő részre lehet bontani: a palack levegőben repülésére és a földdel való ütközésre.

Az elengedés után a palack kezdeti  $\omega_0$  szögsebességgel kezd el forogni a tömegközéppontja körül, amely pedig egy parabola mentén halad (a közegellenállást a kísérleteink alapján elhanyagolhatónak találtuk). Megfigyelésünk az, hogy a szögsebesség jelentősen lecsökken, amire a palack földet ér (25. ábra).



Gyulai Márton idén fejezte be középiskolai tanulmányait a miskolci Földes Ferenc Gimnázium speciális matematika tagozatos diákjaként. 2018 júliusában Pekingben a bronzérmes magyar csapat tagjaként részt vett az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyén (IYPT). A 2019 áprilisában Malajziában megrendezett Ifjú Kutatók Nemzetközi Konferenciáján (ICYS) bronzérmet és különdíjat szerzett. A tavalyi fizika Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (OKTV) 13., az idei 7. helyezetteje.



24. ábra. A palack sematikus mozgása a palackdobálás-játék közben.

Ennek oka, hogy a víz szétterjed a palackban, így megnöveli a rendszer tehetetlenségi nyomatékát, következőképp lecsökken a szögsebesség. E komplex folyamat leegyszerűsítése végett az alábbi modellt alkottuk meg (26. ábra): legyen a palack szélessége  $2a$ , magassága  $b$ , a bele töltött vízmagasság  $c$ . A vizet  $N$  (körülbelül 100 db) diszkrét vízszintes rétegre osztjuk fel. A rendszer tömegközéppontját a  $TKP$  pont jelölje!

Ha a koordináta-rendszert a  $TKP$  ponthoz rögzítjük és  $\omega$ -val forgatjuk, akkor a centrifugális erőnek köszönhetően valamennyi réteg tapasztalni fog egy origtól ellentétes irányba mutató gyorsulást, amelynek nagysága

$$\ddot{x} = (x - h_{TKP}) \omega^2, \quad (29)$$

ahol  $x$  a kijelölt réteg magassága a palack aljától,  $h_{TKP}$  a tömegközéppont magassága a palack aljától és  $\omega$  a pillanatnyi szögsebesség. A modellben a rétegeket úgy fogtam fel, mintha sűrűlódás nélkül mozgó dugattyúk lennének.

A tömegközéppont magassága a rendszerben lévő tömegek súlyozott átlagaként kapható meg:

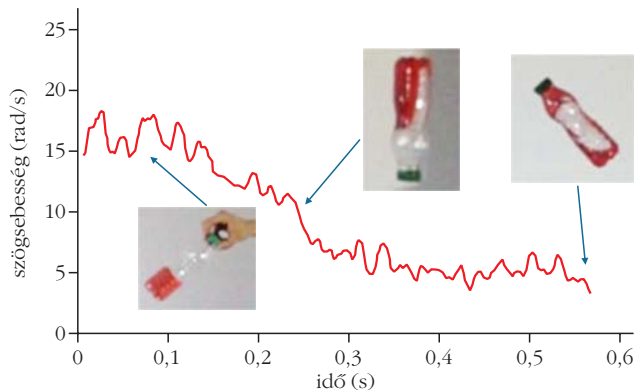
$$h_{TKP} = \frac{M h_{TKP0} + \sum_{i=1}^n m_i x_i}{M + m}. \quad (30)$$

Ahol  $M$  az üres palack tömege,  $h_{TKP0}$  az üres palack tömegközéppontjának magassága,  $m_i$  és  $x_i$  az  $i$ -ik vízréteg tömege és magassága,  $m$  pedig az összes víz tömege.

A szögsebesség időfüggésének meghatározásához az impulzusmomentum-megmaradás tételét hívjuk segítségül:

$$\omega_0 \theta_0 = \omega \theta, \quad (31)$$

ahol  $\omega_0$  a kezdeti szögsebesség,  $\theta_0$  a kezdeti tehetetlenségi nyomaték a  $TKP$  körül,  $\omega$  és  $\theta$  pedig a szögsebesség és tehetetlenségi nyomaték egy későbbi időpillanatban.



25. ábra. A palack szögsebessége az idő függvényében. A kis képek mutatják a folyadék elrendeződését a különböző fázisokban.

A rendszer tehetetlenségi nyomatéka a  $TKP$  körül az üres palack és az egyes rétegek tehetetlenségi nyomatékának összege:

$$\theta = \theta_{\text{palack}} + M(h_{TKP} - H_{TKP0})^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{4} m a^2 + \frac{1}{12} m \left(\frac{c}{N}\right)^2 + m(x_i - h_{TKP})^2. \quad (32)$$

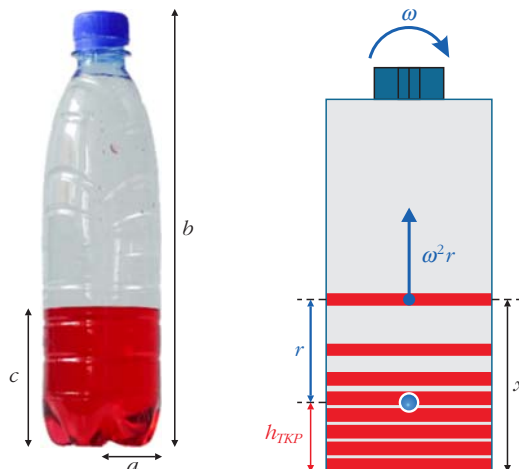
Ahol  $\theta_{\text{palack}}$  az üres palack tehetetlenségi nyomatéka az üres palack tömegközéppontja körül.

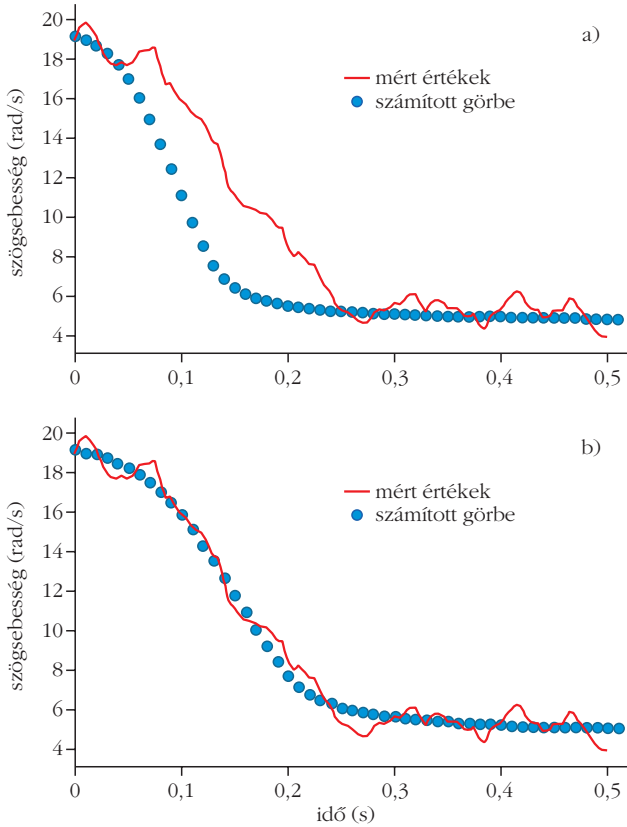
A (29)–(32) egyenleteket felhasználva megkapjuk a kiválasztott réteg gyorsulását adott vízréteg-elrendeződés esetén. Következő lépésként egy programot írtunk, amely kiszámolta minden réteg gyorsulását, és az Euler-módszer alapján a palack szögsebességének időfüggését is megadta (27. ábra)

Ez már egészen jó kvalitatív egyezést mutat a mérési eredményekkel, azonban a még jobb, kvantitatív eredmény eléréséért egy empirikus, mértékegység nélküli konstans vezetünk be a (29) egyenletbe.

$$\ddot{x} = C(x - h_{TKP}) \omega^2. \quad (33)$$

26. ábra. (a) A palack méretének jelölései. (b) A számításoknál használt modell.



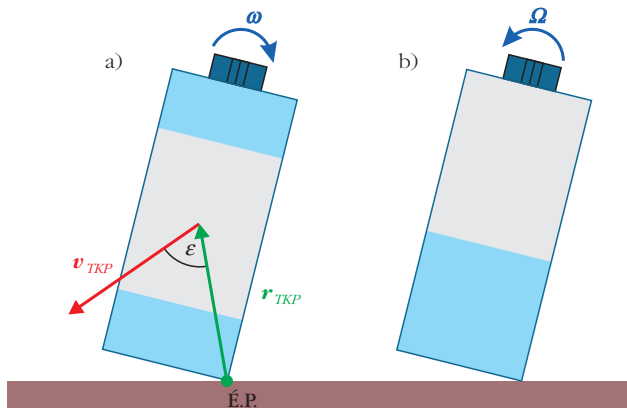


27. ábra. A mért (folytonos vonal) és számolt (pontok) szögsebesség az idő függvényében (a) korrekció előtt és (b) után.

Ennek oka az, hogy a víz nem teljesen úgy rendeződik át, mint ahogy azt modellünk feltételezi. A víz a palack falához nyomódik, a fallal viszkozusan sűrűlódik, ezért és egyéb keveredési jelenségek miatt a víz lassabban rendeződik át.  $C$  paraméter helyes megválasztásával jól illeszkedő eredményeket kapunk (27.b ábra).

Kísérleteink alapján azt kaptuk, hogy a  $C$  paraméter csak a palacktól függő állandó. A 28. ábrán az általunk használt palackok és alattuk a hozzájuk tartozó  $C$  konstansok szerepelnek. Látható, hogy minél vékonyabb a palack,  $C$  értéke annál kisebb, hiszen annál jobban akadályozza a víz átrendeződését.

29. ábra. A palack mozgása (a) ütközés előtt és (b) ütközés után. Az ábra mutatja az elméletben használt jelöléseket is.



28. ábra. A kísérleteinkben használt palackok és a  $C$  paraméter értékei.

A probléma második fontos része a talajjal való ütközés. A kísérletet elvégezve észrevehetjük, hogy a palack (ha nincs teljesen tele, vagy nem teljesen üres) nem pattan vissza földről. Ennek megfelelően az ütközést tökéletesen rugalmatlannak tekintettük. Érdeemes kihangsúlyozni, hogy ez csak a részben töltött palackok esetén áll fenn, hisz a víz energiát nyel el az ütközéskor. Kísérleteink alapján feltevésünk a palack 10%-os és 90%-os töltöttsége között helytálló.

Tegyük fel, hogy a palack  $\mathbf{v}_{TKP}$  translációs és  $\boldsymbol{\omega}$  rotációs sebességgel ér földet (29. ábra).

Ütközéskor a víz lecsapódik a flakon aljára, majd az érintkezési pont körül  $\boldsymbol{\Omega}$  szögsebességgel forogni kezd. Az  $\acute{E}P$  érintkezési pont körül felírható a impulzusmomentum-megmaradás tétele:

$$\mathbf{N}_{előtte} = \mathbf{N}_{utána} \quad (34)$$

$$\mathbf{N}_{transzláció} + \mathbf{N}_{rotáció} = I_{\acute{E}P} \boldsymbol{\Omega}, \quad (35)$$

$$\mathbf{r}_{TKP} \times (M + m) \mathbf{v}_{TKP} + \boldsymbol{\theta}_{TKP} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta}_{\acute{E}P} \boldsymbol{\Omega}, \quad (36)$$

ahol  $\mathbf{r}_{TKP}$  az  $\acute{E}P$ -ből a  $TKP$ -ba mutató vektor,  $\boldsymbol{\theta}_{TKP}$  a rendszer tehetetlenségi nyomatéka a  $TKP$ , és  $\boldsymbol{\theta}_{\acute{E}P}$  a rendszer tehetetlenségi nyomatéka az érintési pont körül.

Az ütközés utáni szögsebességre átrendezve:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r}_{TKP} \times (M + m) \mathbf{v}_{TKP} + \boldsymbol{\theta}_{TKP} \boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\theta}_{\acute{E}P}}. \quad (37)$$

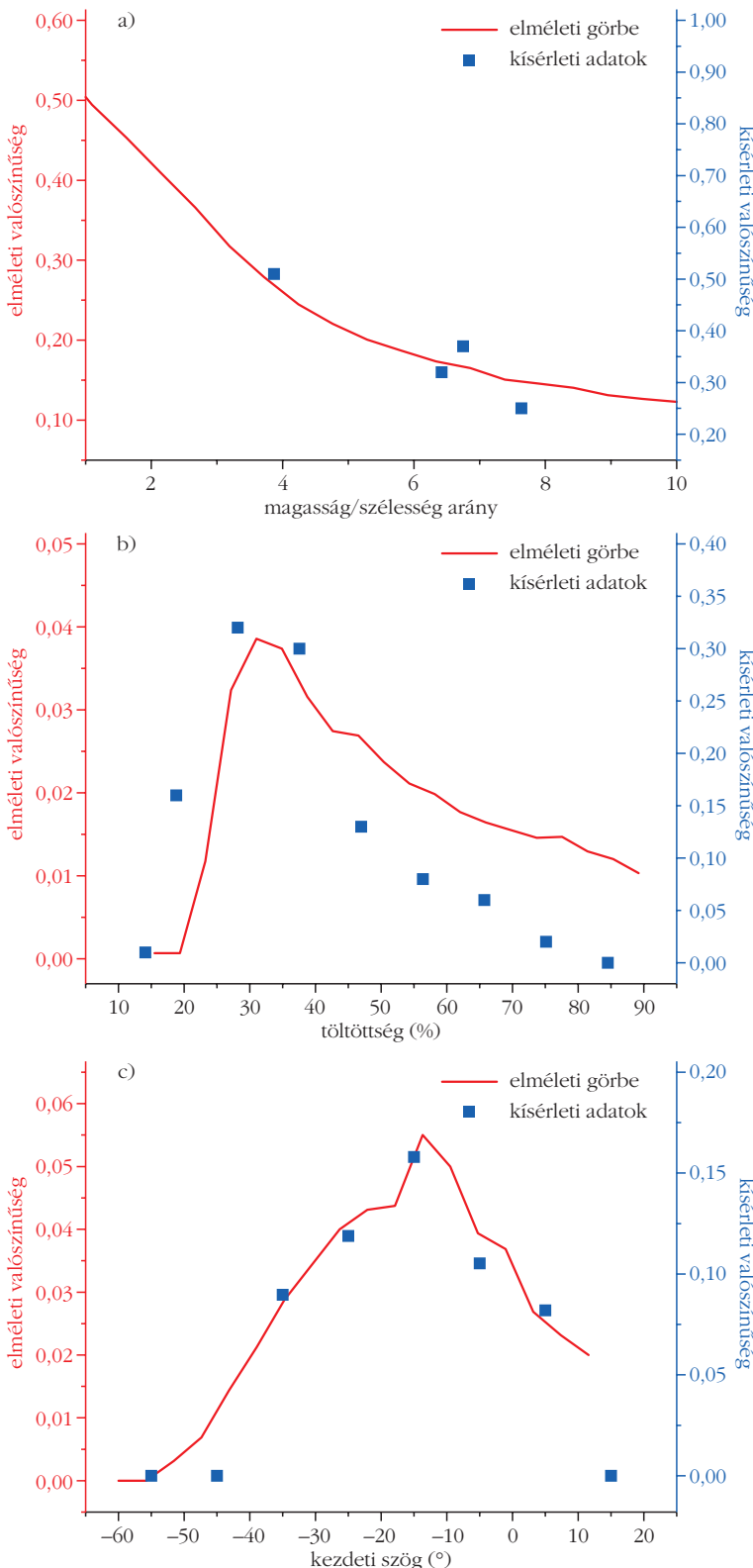
Különböző esetek léteznek attól függően, hogy a palack milyen szögben ér földet. Ha a  $TKP$  a talpa felé esik, és ha nincs túl nagy forgási energiája, akkor talpon is marad. Ha a  $TKP$  nem esik a talpa felé, de eleghően nagy forgási energiával rendelkezik, a talpra állhat a palack. Az elsőre a feltétel (a második esetben fordulna a reláció):

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_{\acute{E}P} \boldsymbol{\Omega}^2 < \frac{1}{2} (M + m) \Delta h, \quad (38)$$

$$\Omega < \sqrt{\frac{(M+m)g}{\theta_{\acute{E}P}}} \sqrt{a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 [1 - \cos(\varphi' - \alpha_1)]}. \quad (39)$$

Ahol  $\varphi'$  és  $\alpha_1$  a leérkezési szög és a palack paramétereinek függvénye. Ezek alapján, ha ismerjük a földet érés paramétereit (szögsebesség, leérkezés szöge, translációs sebesség stb.), akkor el tudjuk dönteni megáll-e a lábán vagy sem.

30. ábra. A sikeres dobások valószínűsége különböző paraméterek mellett, elmélet és kísérlet.



Az elméleti végeredmény meghatározásához a fent leírt modellt egy Python programmal számítottuk ki, amely a kezdeti paraméterek alapján kiszámolta a palack mozgását a levegőben, valamint az ütközés után. Ezek alapján eldöntötte, hogy a dobás sikeres vagy sikertelen lesz, azaz a palack talpon marad vagy sem.

Elméleti modellünk pontosságát több száz felvételt kiemelezve határoztuk meg. Azt tapasztaltuk, hogy 92%-os pontossággal egy sikeres dobást sikeresnek és egy sikertelen dobást valóban sikertelennek jósolt a program.

A feladatunk az volt, hogy a vizsgálatunk alapján határozzuk meg azokat a paramétereket, amelyek növelik a sikeres dobás valószínűségét.

A 30. ábra eredményeink közül mutat be néhányat. A grafikonokon a pontok a kísérleti eredményeket – amelyek mindegyike 100 dobásból megállapított valószínűséget jelent – jelölik. Különböző magasság-szélesség arányú palackokkal dobva (30.a ábra) intuícióinkkal megegyező trendet figyeltünk meg, nevezetesen, hogy minél laposabb a palack, annál valószínűbb a sikeres dobás. Érdekesebb, hogy a tapasztalat és az elméleti jóslás is azt mutatja, hogy a valószínűségnek a töltöttség függvényében – körülbelül az 1/3-ig töltött palacknál – maximuma van (30.b ábra). Végül a palack elengedési szögében is találtunk kedvező értéket (30.c ábra), a vízszintesnél körülbelül 15°-kal lejjebb. Láthatóan ugyanaz a trend figyelhető meg a mért és elméleti értékek között, amely igazolja a modellünk helyességét.

Összefoglalva néhány javaslat a sikerebb dobások eléréséhez:

1. Minél laposabb a palack, annál jobb!
2. Körülbelül 1/3-ig töltsük meg a palackot vízzel!
3. Lendítéskor kicsit a vízszintes előtt engedjük el a palackot (–15°)!

Gyulai Márton

#### Irodalom

6. N. Tesla: *Valvular conduit*. U.S. Patent No. 1,329,559, 1920.
7. R. L. Bardell: *The Diodicity Mechanism of Tesla-type No-Moving-Parts Valves*. PhD dissertation, Univ. of Washington, 2000.
8. [https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number)
9. M. Vavrik: Tesla-szelep visszafelé folyás – videó, <https://goo.gl/RZST4w>
10. Lassított videófelvétel a palackdobás („Bottle flip”) mutatványról: <https://youtu.be/jP0wcQQKz-0>