

Egy test mozgása az állandó nagyságú, centrális vonzóerő hatása alatt

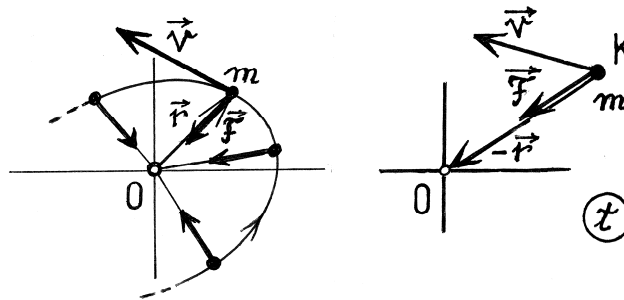
- Ismeretes, hogy a bolygók a Nap nehézségi erőterében mozognak. A rájuk ható vonzóerő (F) mindig a Nap felé mutat, erőssége a távolságuk (r) négyzetével fordítottan arányos ($F \sim 1/r^2$), vagyis a Naphoz közeledve erősödik. A bolygó pályája egy *ellipszis*, melynek egyik fókuszpontjában – a centrumban – van a Nap; (Kepler törvényei...).

- Bizonyítható, hogy szintén *ellipszis* pályán fog mozogni a rugalmassági vonzóerő terébe helyezett test is. Ekkor a centrumpont éppen az ellipszis középpontja, ehhez közeledve a vonzóerő csökken, távolodáskor arányosan növekszik. Nyilván, az ideális rugó ($F \sim r$) egyik vége a testhez, a másik a centrumponthoz rögzített.

Feladat: Képzeljük el, hogy *létezne* egy olyan erőter, amelyben a benne levő testre mindig *azonos nagyságú*, egy bizonyos pont – *centrum* – *felé mutató vonzóerő* hatna. Az ebben elindított test milyen pályán mozogna? Tanulmányozzuk!

A feladatnál elképzelt centrális vonzóerő – függetlenül attól, hogy ez hogyan lehetne megvalósítható – állandó nagyságú, vagyis erőssége nem függ a test centrumtól mért (r) távolságától.

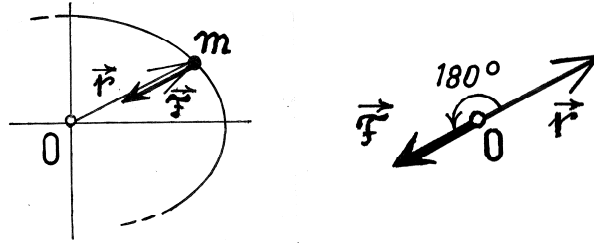
A pálya jellemzőinek megkeresése: Legyen a mozgó test tömege m , a ráható \vec{F} erő mutasson mindig egy *rögzített* O centrum – esetünkben – éppen egy koordinátarendszer kezdőpontja felé. Az állandó F nagyságú vonzóerő terébe helyezett testet meglökvé elindítjuk \vec{v} sebességgel. Milyen alakú lesz a test pályája?



1. ábra

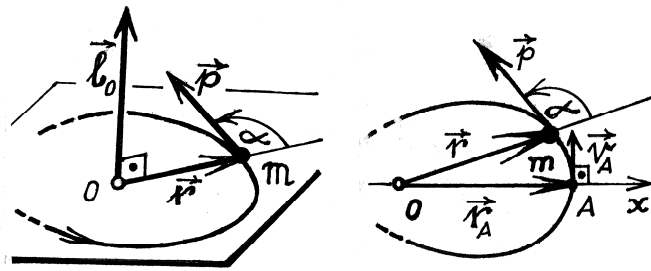
- A test helyzeti energiája egy adott helyzetében $E_{pot}(K)$ egyenlő azzal az $L_{K-O}(\vec{F})$ munkával, amelyet az \vec{F} erő végezne miközben a $(-\vec{r})$ mentén az origóba vinnénk. Az O -ban $E_{pot}(O) = 0$; máshol $E_{pot}(K) = L_{K-O}(\vec{F}) = |\vec{F}| \cdot |-\vec{r}| \cdot \cos 0^\circ = F \cdot r$; (1. ábra). Az r távolságra található, v sebességgel mozgó test mozgási energiája $E_{kin}(\vec{v}) = m \cdot v^2/2$, így a *mechanikai energiája* $E(\vec{r}, \vec{v}) = E = E_{pot} + E_{kin} = F \cdot r + (m \cdot v^2/2)$; nyilván $E > 0$.

• Centrális erőről lévén szó, az O centrumra vonatkoztatott forgató nyomatéka mindig nulla: $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ és $|\vec{M}_O| = F \cdot r \cdot \sin 180^\circ$, vagyis $\vec{M}_O = 0$; (2. ábra).



2. ábra

• A \vec{p} impulzussal mozgó testnek az O -ra vonatkoztatott $\vec{l}_O(\vec{p})$ impulzusnyomatéka $\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$, ahol $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ és $|\vec{l}_O| = l_O = m \cdot r \cdot v \cdot \sin \alpha$. Az \vec{l}_O impulzusnyomaték vektor merőleges az α szöget alkotó \vec{r} és \vec{p} vektorok alkotta síkra; (3. ábra).



3. ábra

• Amennyiben $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$, például az A pontban: $l_O(A) = m \cdot r_A \cdot v_A$, mert ekkor $\alpha = 90^\circ$
 • A test impulzusnyomatékának *változási sebességét* a ráható erő forgatónyomatéka határozza meg: $\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{M}_O$. De mivel – esetünkben – mindig $\vec{M}_O(\vec{F}) = 0$, és így $\frac{d\vec{l}_O}{dt} = 0$, következik, hogy $\vec{l}_O = \text{állandó!}$ Tehát a test mozgásakor az impulzusnyomaték-vektora változatlan marad, minek következménye, hogy a pályája egy *síkgörbe*.

• Nem lévén súrlódás, a test, mozgása során megőrzi mechanikai energiáját, $E = \text{állandó!}$ Ha az indításkor, a t_0 kezdőpillanatban $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ és $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ és majd, a t -ben, \vec{r} és \vec{v} : $F \cdot r + \left(m \cdot \frac{v^2}{2}\right) = F \cdot r_0 + \left(m \cdot \frac{v_0^2}{2}\right) = E$; és innen: $r = \left(E - \frac{m \cdot v^2}{2}\right) / F$. Mivel, $r \geq 0$ következik, hogy az r nem lehet több mint (E/F) , így $r \leq (E/F)$. Tehát a pálya *végig* méretű, nem nyúlik a végtelenbe!

- Vegyük fel úgy az Ox koordináta tengelyt, hogy menjen át a pálya legtávolabbi (A) pontján (legyen $|\vec{r}_A| = OA = r_{max} = a$)! Mivel a test az A -ban vált át a távolodásról a közeledésre, ott sebességvektora a \vec{v}_A éppen merőleges az Ox tengelyre: $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$.

- Ha a testet az A -ból a $(-\vec{v}_A)$ sebességgel éppen ellentétes irányba indítanánk – ez az erőrendszer Ox -re való szimmetriája miatt – fordított irányba ugyancsak e pályán haladna. Ezért, a pályának *közvetlenül az A -n áthaladó két szára* szimmetrikus az Ox tengelyre; (3. ábra).

- Legyen a pálya legközelebbi pontja B ; itt $OB = |\vec{r}_B| = r_{min} = b$, a sebessége \vec{v}_B .

Milyen összefüggés van a pálya alakját meghatározó a és b , valamint a \vec{v}_A és \vec{v}_B sebességek között? (Ismert: $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$, $\vec{v}_B \perp \vec{r}_B$ és $r_A = r_{max} = a$, $r_B = r_{min} = b$.)

Az impulzusnyomaték és a mechanikai energia megmaradási törvényei szerint:

$$\vec{l}_o(A) = \vec{l}_o(B) \Rightarrow m \cdot v_A \cdot r_A = m \cdot v_B \cdot r_B \Rightarrow v_B = \frac{a}{b} \cdot v_A \text{ és}$$

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{m \cdot v_A^2}{2} + F \cdot a = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + F \cdot b \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = \frac{2 \cdot F}{m} \cdot (a - b).$$

- Ha a pálya legtávolabbi A pontjánál ismert az a és a v_A , mekkorák lesznek ezek a legközelebbi B pontnál: $b=?$, $v_B=?$. Az előbbi összefüggésekkel:

$\frac{a^2}{b^2} \cdot v_A^2 - v_A^2 - \frac{2 \cdot F}{m} \cdot a + \frac{2 \cdot F}{m} \cdot b = 0 \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot F}{m}\right) \cdot b^3 - \left(v_A^2 + \frac{2 \cdot F \cdot a}{m}\right) \cdot b^2 + v_A^2 \cdot a^2 = 0$. Tehát a b -t e harmadfokú egyenlet gyökei között kell keresnünk.

- Az egyenlet felírásánál az A és B azon közös tulajdonságát használtuk fel, hogy legyenek a pályán (E és \vec{l}_o állandó) és ezeknél van a pálya visszafordulása

($\vec{v}_A \perp OA$ és $\vec{v}_B \perp OB$). Így, mivel a harmadfokú egyenlet *egyik gyöke* épp a megadott a , osztható $(b - a)$ -val, amely elvezet egy másodfokú egyenlethez:

$$\left(\frac{2 \cdot F}{m}\right) \cdot b^2 - v_A^2 \cdot b - v_A^2 \cdot a = 0. \text{ Ennek megoldásai: } b_{1,2} = \frac{m \cdot v_A^2}{4 \cdot F} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8 \cdot a \cdot F}{m \cdot v_A^2}}\right);$$

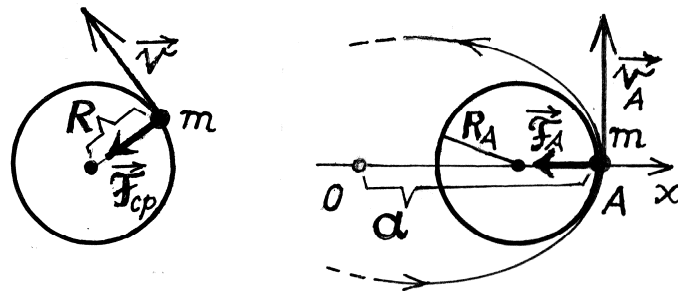
viszont, mivel $b > 0$ kapjuk, hogy: $r_{min} = b = \frac{m \cdot v_A^2}{4 \cdot F} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot a \cdot F}{m \cdot v_A^2}}\right)$, és még ismert, hogy $v_B = \frac{a}{b} \cdot v_A$.

- Az E és \vec{l}_o megmaradása segítségével összefüggést kaphatunk a pálya alakját meghatározó a, b – valamint – az A és B pontokban v_A, v_B sebességek között is:

$$v_A^2 - v_B^2 = \frac{2 \cdot F}{m} \cdot (b - a); \quad b \cdot v_B = a \cdot v_A. \text{ Az egyenletrendszer megoldva:}$$

$$v_A = b \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot F}{m \cdot (a+b)}} \quad \text{és} \quad v_B = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot F}{m \cdot (a+b)}}.$$

- A pálya alakjának könnyebb megismeréséhez határozzuk meg bizonyos pontjaiban a *görbületi sugarát*. Legyenek ezek az A és B , a pálya visszatérési pontjai. Például, a pálya A pontján való áthaladás pillanatában a test egyben az ott *hozzásimuló* R_A sugarú *körön* is mozog, amelyre itt éppen az \vec{F}_A erő – mint középponti (centripetális) erő – kényszeríti; (4. ábra). (Körmozgásnál a középponti erő: $F_{cp} = m \cdot v^2/R$)



4. ábra

Mivel az A-ban $\vec{F}_{cp} = \vec{F}_A$, $R = R_A$ és $F_A = m \cdot v_A^2 / R_A$, nyilván $R_A = m \cdot v_A^2 / F$; hasonlóan a B pontnál $R_B = m \cdot v_B^2 / F$.

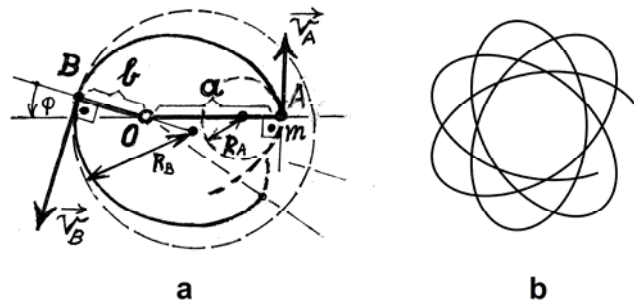
• Érdekes összefüggés van az e pontokban a *görbületi sugarak* és a test pályájának az alakját meghatározó $a = r_{max}$ és $b = r_{min}$ között. E sugarak hányadosa, illetve szorzata:

$$\frac{R_B}{R_A} = \left(\frac{m \cdot v_B^2}{F} \right) \cdot \left(\frac{F}{m \cdot v_A^2} \right) = \frac{v_B^2}{v_A^2} = \left(\frac{a}{b} \right)^2, \text{ valamint, } R_A \cdot R_B = \left(\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \right)^2.$$

• Az arányuk és a szorzatuk kifejezéseiből kapjuk, hogy: $R_A = \frac{2 \cdot b^2}{a+b}$ és $R_B = \frac{2 \cdot a^2}{a+b}$.

Innen adódik, hogy R, a pálya görbületi sugara, annak bármely pontjában, a visszatérési pontokban lévő értékei között van: $R_A \leq R \leq R_B$.

Ebből következik, hogy a pálya formája leginkább egy „*tojásgörbéhez*” hasonlítható, lévén neki hegyesebb és tompább részei; (5. ábra).

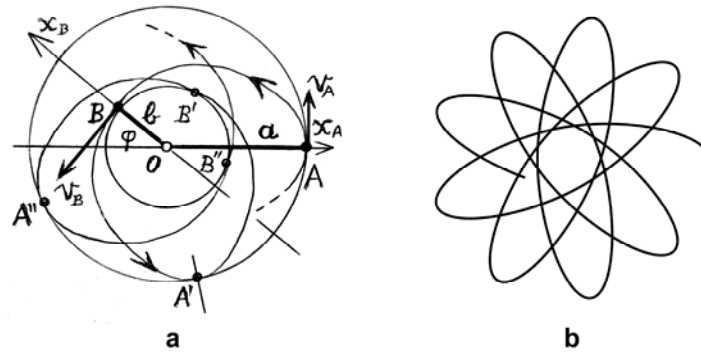


5. ábra

Nyilván, a pálya benne fekszik az O középpontú, $r_{max} = a$ és $r_{min} = b$ sugarakkal határolt *körgyűrűben*.

A pálya általában nem egy egyszerű-zárt görbe, kivétel csak az elején említett két eset, amikor is a vonzóerő arányos az $1/r^2$ -tel, vagy az r -rel. Ilyenkor ugyanis, a pálya egy ellipszis.

- Az általános esetben – amint ez az 5. ábrán is látható – az A -ból indított test az \widehat{AB} görbeszakasz megtételével, $T/2$ idő alatt, a B -be jut. Ezután szintén $T/2$ idő elteltével elérkezik egy másik $r_{max} = a$ távolságra lévő A' pontba, ($A \rightarrow B \rightarrow A' \rightarrow \dots$), és így tovább. Mivel a B is fordulópont, az OB szintén szimmetria tengelye lesz az \widehat{AB} és $\widehat{BA'}$ pálya részeknek (az Ox_B -tengely). Az \overline{OB} és az $\overline{OA'}$ nem egyirányúak, φ szöveget alkotnak, ezért az A' és A nem esnek egybe. A $T/2 + T/2 = T$ ismétlődési idő alatt egy ide-oda $r_{max} \rightleftharpoons r_{min}$ mozgás történik. Ez állandóan ismétlődik, és így a pálya – idővel – betölti az $r_{max} \leftrightarrow r_{min}$ határokat szabó körgyűrűt. Kezdetben a pálya hasonlítani fog egy „virág szirmolevelei” rajzolatához; (6. ábra).



6. ábra

- Mivel a φ szög függ a test indításától, ez a „virágszerű” pálya lehet zárt, vagy éppen nem-zárt görbe is. Ez utóbbi esetben, az idő teltével a pálya teljesen ki fogja tölteni az ennek határt szabó körgyűrűt; (lásd: [1.] és [2.]).

- **Egy számpélda:** Találomra adjunk számértékeket, majd számítsuk ki a test mozgására jellemző mennyiségeket!

Legyen például: $m=10 \text{ kg}$, $F=50 \text{ N}$, és az indításnál $v_A = 40 \text{ m/s}$, $a = 1.000 \text{ m}$.

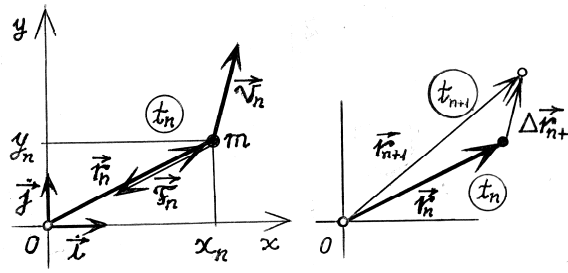
A behelyettesítések, majd a számítások után kapjuk:

$$b \approx 487,9 \text{ m}, \quad v_B \approx 82 \text{ m/s} \text{ és } R_A = 320 \text{ m}, \quad R_B \approx 1344 \text{ m}$$

Az arányaik: $\frac{b}{a} \approx 0,49$, $\frac{v_B}{v_A} \approx 2,05$ és $\frac{R_B}{R_A} \approx 4,20$.

- **Pályarajzolás;** a test pályájának pontról-pontra való megrajzoltatása számítógéppel.

A kezdőpillanat \vec{r}_0, \vec{v}_0 adataiból kiindulva egymás utáni, rövid, egyenlő ($\Delta t \ll$) időközökben kiszámítjuk a test $\Delta \vec{r}$ elmozdulásait, majd ezekkel kirajzolatjuk a pályát.



7. ábra

A t pillanatban a test: --- helyzetvektora: $\vec{r}(t) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$,

--- a ráható állandó nagyságú, centrális vonzóerő: $\vec{F}(t) = -|\vec{F}| \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -F \cdot \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

--- gyorsulása: $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} = -\frac{F}{m} \cdot \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, (7. ábra).

Kezdjük az első lépéssel, a $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ idő alatt befutott pályarész esetével.

A *kezdeti* t_0 pillanatban adottak a \vec{v}_0 és az \vec{r}_0 , így az \vec{a}_0 is, határozzuk meg ezeket a *végző* t_1 pillanatban. Nyilván a t_0 -ban a gyorsulás $\vec{a}_0 = -\frac{F}{m} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r_0}$, így a t_1 -ben a végsebesség $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot \Delta t_1 = \vec{v}_0 - \frac{F}{m} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r_0} \cdot \Delta t_1$. A Δt_1 alatti elmozdulás $\Delta \vec{r}_1 = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_1}{2} \cdot \Delta t_1$, segítségével a test t_1 -beni helyzete: $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0 + (\vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot \Delta t_1)}{2} \cdot \Delta t_1$, vagyis: $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot \Delta t_1 + \frac{\vec{a}_0}{2} \cdot \Delta t_1^2$. Részletesen vektorkomponensekkel:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + v_{x0} \cdot \Delta t_1 - \frac{F}{2m} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta t_1^2 \\ y_1 = y_0 + v_{y0} \cdot \Delta t_1 - \frac{F}{2m} \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta t_1^2 \end{cases}, \text{ és } \begin{cases} v_{x1} = v_{x0} - \frac{F}{m} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta t_1 \\ v_{y1} = v_{y0} - \frac{F}{m} \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot \Delta t_1 \end{cases}$$

Kiszámítva, megkapjuk a test helyzetét a t_1 pillanatban. Ezzel – teljesen hasonlóan – eljutunk a t_2 -beli helyzethez, és így *tovább-tovább*... Az n . lépésnél, a $t_n \rightarrow t_{n+1}$, idő alatti mozgásnál a *rekurziós képlet*: $\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n \cdot \Delta t + \frac{\vec{a}_n}{2} \cdot \Delta t^2$ és $\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}_n \cdot \Delta t$.

Sorra kirajzolva az (x_n, y_n) pontokat, fogalmat alkothatunk a pálya alakjáról. Csökkentve a Δt -t, a rajzolt pálya alakja pontosabbá válik. (Az egyszerűség kedvéért az időközöket mind egyenlőnek vesszük: $\Delta t_n = \Delta t$ ha $n = 0, 1, 2, \dots$)

• Ilyen *pályarajzok* láthatók az 5.b és a 6.b ábrákon. Mindkettőnél: $m=10$ kg, $F=50$ N, $a=1000$ m, azonos, viszont különböző az indítósebesség: $v_A = 40$ m/s (5.b ábra), valamint $v_A = 20$ m/s (6.b ábra).

Könyvészet:

[1.] LANDAU – LIFSIC: *Elméleti fizika I.* (Tankönyvkiadó – Budapest, 1974)

[2.] V. I. ARNOLD: *Modele matematice ale mecanicii clasice* (Editura Științifică și Enciclopedică – București, 1980)

Bíró Tibor