A MATEMATIKAI OBJEKTUMOKRÓL

SÓS VILMOS

1. A PROBLÉMA FELVETÉSE

Egy korábbi – az igazság problémájával foglalkozó – tanulmányomban[1] a matematikát a tudomány igazságának szempontjából vizsgáltam.

A matematika az igazságfogalom elemzésében kiemelt jelentőségű, minthogy olyan tudományág, melynek állításait – nem bármely állításrendszerét – oszthatatlanul megbízhatónak, kétségbevonhatatlannak vagy igaznak tartják. Többen az „igaz" terminust nem tartják alkalmazhatónak a matematikára, mert az semmiképpen sem nyújt a világról ismereteket abban az értelemben, ahogyan ezt a ténytartalmú tudományok teszik, vagyis mert állításai a világra vonatkozóan nem deskriptívek. A matematika operacionális tudomány, és így állításainak megbízhatósága nem más, mint eljárásainak megbízható volta.

A filozófust elsősorban az érdekli, hogy integrálható-e a matematika az emberi tudás egészébe, és mi a szerepe a megismerésben? Ha a matematika valóban operacionális tudomány, akkor e probléma arra redukálható, hogy tartalmaznak-e a világról szóló ismereteket a matematikai állításokban megfogalmazott eljárások?

Ez a matematika és a valóság viszonyának hagyományos kérdése. A matematika valóságeredete önmagában nem ad magyarázatot a matematikai eljárások abszolút megbízhatóságára. Egyrészt a matematika túlnő saját empirikus alapjain, mert nemcsak az őt életre hívó jelenségekre alkalmazható, hanem olyan új jelenségekre is, melyek feltételei kielégítik ugyanazokat az axiómákat, melyeket az eredeti jelenség feltételei is kielégítettek. Másrészt, ha bizonyos matematikai állítások viszonylag közvetlenül kifejeznék is a valóság némely tulajdonságát, még mindig kérdéses, hogy éppen ezek a tulajdonságok lesznek-e érdekesek és relevánsak a további általánosításhoz? Vagyis, hiába léteznének eredetileg tisztán empirikus alapok, nem lenne biztosíték arra, hogy a további általánosítások, extrapolációk, bővítések is ezen empirikus alapra épülnek majd fel.

Ha a matematika állításai a benne használt eljárások nyelvi-szimbolikus rögzítései, akkor viszont csakis a matematika és a valóság *egésze* vethető egybe, vagyis azt kell vizsgálni, hogy az eljárások mennyire adekvátan illeszkednek bele az emberi cselekvés egészébe. Ez esetben a matematikai állítások azért lesznek kétségbevonhatatlanok, mert csupán rögzítik – mégpedig egzaktan – az emberi célok elérésére emberek által teremtett sajátos nyelvi-logikai eljárásokat. Így a matematikai állítások megbízhatósága pusztán és kizárólag az őket tartalmazó rendszeren múlik. Ha a rendszer eljárásai sikeresek – azaz alkalmazásuk során mindig a várható eredményt hozzák –, akkor nem az egyes állítások,

[1] Sós Vilmos: „Modern igazságelméletek", Budapest 1978, V. fej.

hanem maga a rendszer bizonyossági foka növekszik, sikertelenség esetén viszont ismét csak nem az állításokat, hanem a rendszer egészét ésszerű kétségbe vonni. A rendszer – azaz most a matematika – megkérdőjelezése esetén viszont a megismerés lehetőségét is kétségbe kellene vonni, mert a rendszer csupán egzakt és explicit formára hozza a megismerés során alkalmazott eljárásokat. Ez egyfajta – agnosztikus – filozófiai álláspontról ugyancsak lehetséges, de az már semmilyen racionális álláspontról sem lehetséges, hogy az eljárások explicit formára hozásának lehetőségét tagadják, hiszen akkor tagadnunk kellene azt a nyelvet is, melyen kétségeinket előadjuk.

A matematika specifikumára vonatkozó három modern interpretáció – a logicizmus, az intuicionizmus és a formalizmus – elemzéséből arra a következtetésre jutottunk, hogy a filozófust érdeklő problémák éppen ott kezdődnek, ahol a fenti értelmezések véget érnek. Ugyanis a matematika, az emberi tevékenység és a világ viszonya nem interpretációs és még kevésbé technikai probléma. E tekintetben a matematika filozófiai értelmezései mindig is abban különböztek egymástól, hogy platonista vagy nem platonista álláspontról indultak-e ki.

2. A PROBLÉMA TOVÁBBI KÖRÜLHATÁROLÁSA

E vázlatszerű tanulmány címe elvileg takarhat általánosabb és részletproblémát is. Nézzük azonban így vagy úgy, mögötte az a kérdés rejlik, hogy mi is voltaképp a matematika. E kérdésre történetileg adott válaszok eltérő volta abból adódik, hogy rendszerint nem ugyanarra szoktak rákérdezni. A kérdés különböző felbontásai ilyenfélék: „Mivel foglalkozik?", „Mire vonatkozik?", „Miben azonos a többi tudományokkal, miben különbözik tőlük?", „Ismeret-e a matematika?", „Mi köze a köznapi gondolkodáshoz?", „Hogyan viszonyul a nyelvhez, melyen beszélünk?"

A XX. század már említett három irányzata a matematikában kizárólagos megoldásra törekszik, s bár mindegyikük más-más tulajdonságát és vonatkozását hangsúlyozza a matematikának, mégis fő törekvésük a matematikai tudás *alapjainak* a megtalálása. Ettől remélnek választ a „mi is voltaképp a matematika?" kérdésre. Általában kétféle alapra szokás hivatkozni: empirikus és nem empirikus alapokra. A nem empirikus alapok híveinek választ kell adniuk az *a priori* szükségszerű – az analitikus – és a bizonyos állítások viszonyára, mégpedig tisztán logikai és matematikán belüli eszközök és eljárások segítségével. Mindkét felfogás hívei megoszolhatnak a tekintetben, hogy leír-e valamit a matematika a valóságból úgy, ahogyan az ún. empirikus tudományok. Nem lehet megkerülni ezt a kérdést azzal, hogy az empirikus tudományok egy része (pl. az elméleti magfizika) sem ír le közvetlenül semmit a valóságból.[2]

A matematikai ismeret forrása eszerint lehet a megfigyelés és a leírás, ekkor empirikus és *a posteriori* az az alap, melyen a matematika nyugszik, de felfoghatjuk a matematikai ismeretet úgy is, hogy forrása a nyelv, az a mód, ahogyan beszélni szoktunk a világról, amikor is az alap logikailag bizonyos és nem empirikus.[3]

[2] Ez utóbbi Heyting álláspontja. Vö. Heyting: Disputation és The Intuitionist Foundation of Mathematics; „Philosophy of Mathematics", N. Y. 1965, 61., 42–50.

[3] Vö. Hahn: „Logik, Mathematik und Naturkennen", Bécs 1933, 218–233.

E felosztás mögött az a kérdés rejlik, hogy a matematika tényismeret-e a valóságról, vagy pedig ezen ismeretek megszerzésének eszköze csupán? Semmi sem indokolja, hogy a matematika eszköznek tekintése ne támaszkodhatna empirikus meggondolásokra, hiszen eszköz és valóság viszonya éppúgy tartalmazhat és tartalmaz is empirikus mozzanatokat, mint a leírás, a megfigyelés és a valóság viszonya. A különbség másban áll, tudniillik abban, hogy az eszközfelfogásban fel sem merül – bár elvileg felvethető – az a kérdés, hogy vannak-e matematikai objektumok, míg a leírás-megfigyelés felfogásban nem kerülhető meg a matematikai objektumok létének a kérdése. Nem kerülhető meg, de adható rá igenlő és tagadó válasz egyaránt. Igenlő választ viszont nemcsak az empirizmus adhat, hanem a logicizmus is, például ha platonista.

3. PLATONIZMUS A MATEMATIKA ÉRTELMEZÉSÉBEN

Jóllehet a matematika egy bizonyos interpretációját jellemezve platonizmusról szoktak beszélni, mégsem Platón eredeti, tisztán filozófiai álláspontjára kell gondolni. Akár a „Menon"-ban, akár „Az állam"-ban, akár a „Theateitosz"-ban és más műveiben Platón arra keres választ, hogy „mi a tudás", és ezzel kapcsolatban veti fel a gondolati vagy konstruált – közte a matematikai – objektumok kérdését. Kevés az olyan matematikus és nincs a matematikával foglalkozó olyan filozófus, aki azt állítaná, hogy a matematika a való világ reális dolgait vagy eseményeit közvetlenül írná le. Nincs azonban olyan empirikus természettudomány sem, melynek ne lennének ebben az értelemben a matematikához hasonló részei, fejezetei, melyek ugyancsak nem a való világ dolgainak és eseményeinek közvetlen leírására szolgálnának. Hiszen például minden elvileg axiomatizálható természettudományos elméleti rendszerben – de legalábbis előfeltevéseiben, axiómáiban – több analitikus állítást találunk. Például bizonyos törvényeket kifejező állításokról nem mondhatjuk azt, hogy nincs közük az empíriához, bár kifejezhetők analitikus állításokban, és így logikailag nem falzifikálhatók.

De hát akkor hogyan jellemezhető röviden a matematika filozófiájában a platonizmusnak nevezett álláspont?

A logicista álláspont egyik nehézsége pl. azzal függ össze, hogy nem tisztázza egyértelműen, mivel is foglalkozik a matematika, hiszen ha alkalmazott logika, akkor valamire alkalmazzák. Nem véletlen, hogy a matematika különböző, értelmezői között éppen a logicisták azok, akik a matematikai fogalmakat platonista módon sajátos objektumoknak tekintik.[4]

A platonizmus a matematikában realitást tulajdonít a klasszikus matematika minden egyes infinit konstrukciójának. Ilyen objektumok például a számok. Ezeket az ún. matematikai entitásokat megismerésünk során egyre nagyobb mértékben leírjuk, éppúgy, ahogyan a természettudományok leírják a fizikai világ tárgyait. Ne tévesszen meg bennünket az a tény, hogy a formalizmus is beszél időnként matematikai entitásokról, ezeket egyrészt absztrakt entitásoknak, másrészt minden esetben emberi tevékenység konstruálta entitásoknak tekinti.[5]

[4] Uo. 236–242.

[5] Haskell B. Curry: Remarks on the Definition and Nature of Mathematics; „Philosophy of Mathematics", B. I. 1969, 152–155.

A matematikai platonizmus elsősorban azon alapul, hogy ha a matematikai állítások ismereteket reprezentálnak, akkor valaminek a leírásai. Ehhez van szükség a matematikai entitásokra, melyeket a matematikai állítások leírnak. Nyilvánvaló, hogy ha éppoly értelemben beszélünk a matematikában objektumokról, mint a fizikai világban, akkor a korrespondencia-elmélet híve azt mondhatná, hogy a matematikai állítás igaz, ha valamilyen értelemben adekvát objektumával. A megfelelési elmélet hívét nem rettenthetné vissza még az sem, ha ezek az objektumok kissé másfajták lennének, mint a fizikai objektumok, hiszen nem minden állítás ír le fizikai entitást. Például a pszichológiai állítások empirikusak és tekinthetők tényállításoknak, mégis inkább emberi viselkedésformákat vagy pszichikus megnyilvánulásokat írnak le, mint fizikai objektumokat. Mondhatnánk pl. azt, hogy a logikai vagy matematikai állítások állításokról szólnak, azaz ezen állítások objektuma maga is állítás. Az állítás pl. ilyen gondolati objektum. Mindenesetre ha nem léteznek matematikai objektumok, akkor a matematika esetében biztos, hogy a korrespondencia-elméletnek semmi értelme nincs. Amikor matematikai objektumokról beszélnek, akkor mindenki valami olyasmire gondol, mint „a szám", „a pont", „a halmaz" „az elem" stb. Ezeket az objektumokat vagy pontosan definiálják, vagy definíció nélkül primitív fogalmakként bevezetik. A matematikust joggal az érdekli, hogy az axiómák, valamint a primitív fogalmak bevezetése után tételei levezethetők lesznek-e a fentiekből? Milyen természetűek lennének a matematikai objektumok? Ha valóságos, azaz a világban található dolgok lennének, és a matematikai állítások a valóságos dolgok tulajdonságait fejeznék ki, akkor sok vita nem lenne e kérdésben, ugyanis érthető lenne, mivel adekvát egy matematikai állítás. Mivel azonban ezek az objektumok matematikán belüliek, azaz egy elméleti rendszerben valamilyen módon konstruált objektumok, ezért a rájuk mint forrásra való visszahivatkozás nem vezetne ki abból a körből, melynek áttörése végett bevezették, feltételezték a matematikai objektumokat.

A kiúttalan circulust talán az alábbi megfogalmazás mutatja legjobban: „Az osztályokat és fogalmakat ... felfoghatjuk reális objektumokként ... mint amelyek definícióinktól és konstrukcióinktól függetlenül léteznek ... Nekem úgy tűnik, hogy éppoly jogos az effajta objektumok feltevése, mint a fizikai testeké, és éppannyi okunk van hinni létezésükben is."[6]

A platonista realista érzi, hogy nem jelent kiutat, ha a matematikán vagy a logikán belül keresi az objektumokat, de jól tudjuk, hogy a fizikai testekkel vont analógia a logicisták egy részénél – mármint azoknál, akik nem konstruktíve előállított objektumokat tételeznek fel – csupán a teoretikus fizikai fogalmak valóságos fizikai világbeli megfelelőjére való hivatkozásra vonatkozik. Csakhogy a teoretikus fogalmak nem feltétlenül reprezentálnak fizikai világbeli entitásokat. Nem minden fizikai fogalomnak van valóságos entitás-megfelelője, hiszen a teoretikus fizikai fogalmak nemritkán csakis a magyarázó állításokhoz szükségesek. Ilyenkor nem tételezünk fel közvetlen mögöttük álló fizikai realitást. S a fenti Gödel-álláspontot vallók közül némelyek nyíltan kifejezésre is juttatják, hogy miért kell matematikai (és fizikai) objektumokat feltételezni. „Mindkét feltételezés azért jogos, mert a legjobban képes megmagyarázni, hogy érzeteink miért formálják úgy módszereinket, ahogyan formálják."[7]

[6] Gödel: Russell's Mathematical Logic; „The Philosophy of Bertrand Russell', N. Y. 1944, 137.

[7] S. F. Barker: Realism as a Philosophy of Mathematics; „Foundations of Mathematics", 1960, 3.

Ha a logika szabályai, eljárásai, princípiumai, fogalmai és állításai alkotják a matematika alapját, akkor – ha nem akarnak a logikában abszolúte végső fundamentumot látni – szükség van a kör áttörésére, fel kell tételezni matematikai objektumokat is. Az említett nehézséggel azonban csak úgy tudnak megbirkózni, ha a valóságos objektumokat is hasonlóvá teszik az ún. matematikai objektumokhoz, azaz nem a matematikai „entitások" objektum mivoltát indokolják, hanem a fizikai entitások objektum mivoltát teszik hasonlóvá a konstrukciós eljárás során létrejött „objektumokéhoz". Hogy konstruáltak az objektumok – amit Gödel sem tagad, hiszen csupán az individuális konstrukciótól függetleníti őket –, arra Carnap mutat rá, amikor hangsúlyozza, hogy a logicizmust „... az intuicionizmussal a fogalomképzésben jelentkező konstruktivista tendenciák kötik össze ..."[8]

A fentiekben a logicista állásponton át jellemeztük a matematikai platonizmus témánk szempontjából talán legfontosabb jellegzetességét. Csupán jellemeztük, és nem részletesen elemeztük. Az ún. matematikai objektumok léte, de főként mibenléte, jellege az izgalmas kérdés. Ha erre választ tudnánk adni, akkor feltárulna valami a matematikai tudás sajátosságából is. Valamely diszciplína objektumának jellege némiképp jellemzi magát az illető tudományt is. Már az eddigiekből is látható, hogy a matematikai objektumok platonista interpretációját ismeretelméleti és logikai okokból nem tudjuk elfogadni. Van-e más megoldás? Cikkünk végén visszatérünk mind a platonizmus, mind a matematikai objektumok problémájára, ehhez azonban előzetesen kissé részletesebben kell szólnunk a matematikai tudás ún. alapjairól.

4. AZ ÚN. „ALAPOK" PROBLÉMÁJA

Amikor valamely tudomány alapjai után kutatunk, akkor rendszerint arra szoktunk gondolni, hogy létezik az adott tudománynak egy olyan háttere, amely biztosítékot nyújt a szóban forgó tudásterület bizonyosságára, de legalábbis valószínűséggel megalapozott voltára. A filozófus úgy gondolja, hogy ez a háttér ismeretelméleti, de vitathatatlan, hogy sok szaktudós saját tudományán belüli biztos alapok után kutat. Különösképpen igaz ez a matematikusok jó részére, akik a matematika alapjai után nem a matematikán kívül kutatnak. Áll még ez a logicistákra is, akik a logikára óhajtják redukálni a matematikát, hiszen a logika mint formális rendszer e tekintetben nem kerül kívül a matematikán. De még ha kívül kerülne is, akkor is legfeljebb csak kitolná a kérdést, mert a logika megalapozása már biztosan extralogikai természetű lesz.

És itt már azonnal eredeti kérdésfeltevésünknél tartunk, hogy tudniillik miként kapcsolódik a matematika az emberi tudás egészéhez, a megismerő tevékenységhez. Az alapvető probléma – hiszen mi más értelme lenne az alapok kutatásának –, hogy lehetséges-e biztos tudás. Ha igen, akkor mitől lesz a tudás biztos? Egészen a múlt századig a tudást azonosították a biztos tudással, a nem biztos vagy valószínű tudást belsőleg inkonzisztens fogalomnak tekintették, mely circulus vitiosus-t eredményez. Ma már nem ritka az a kísérlet, hogy a tudást és a bizonyosságot legalábbis függetlenül definiálják.

[8] Carnap: Die logizistische Grundlegung der Mathematik; „Erkenntnis", B. I. 1931, 93.

A bizonyosság mindennapi nyelvben használatos terminusa meglehetősen homályos. Gyakran használják ezt a kifejezést a bizonyosság érzésére vonatkoztatva, mely bizonyos hiteket illetően mindenkinél gyakran előfordul. Ugyanakkor használják viszonylag objektív kritériumként is, amikor az ismeretek, ismeretrendszerek alapjaira kérdeznek rá.

A nyugati kultúrában már viszonylag igen korán a bizonyos ismeretek fő példájaként tartották számon a matematikai ismereteket. Ebből az adódott, hogy ha a biztos ismereteket vagy tudást akarták elemezni, akkor abból a *feltevésből* indultak ki, hogy elismerten van legalább egyfajta biztos ismeretünk, a matematikai tudás. Ennek alapján elemezték azután a matematikának a természetét, és ugyanerre vezették vissza a többi fajta ismeret bizonyosságát is. Tehát a többi fajta ismeretet a bizonyosság szempontjából a matematikai tudáshoz mint példaképhez kezdték viszonyítani.

Ugyanakkor e meggyőződés ellenére sokan a matematikai tudást sem tekintették biztosnak. Érveik nagyjából ilyesfélék voltak: Csak a közvetlenül észlelt jelenségek biztosak, a matematika viszont általános és absztrakt lévén nem ilyen. Vagy, csakis az általános állítások, melyek nem képviselnek ismeretet vagy tudást, lehetnek biztosak, és így a bizonyosság és a tudás teljességgel különálló fogalmak, tehát egyáltalán nem létezik olyan ismeret, mely biztos lehetne, hanem csak nagyon valószínű hitek és vélemények lehetnek. Egy másik fajta ellenvetés viszont úgy hangzik, hogy a matematika csak egy igen absztrakt játék, jelentés nélküli szimbólumokkal való manipuláció és operáció, s így egyáltalán nem beszélhetünk matematikai ismeretről, minthogy a matematikának egyáltalán nincsenek objektumai.

Ezen különféle ellenvetésekkel most nem foglalkozunk, mert eleve abból indulunk ki, hogy a matematika tudást jelent – s mint majd indokolni fogjuk, biztos tudást –, tehát az érdekel bennünket, hogy min alapul ez a tudás, és mi a természete.

Ha valami egyáltalán „biztossá" teheti a tudást, akkor az szerintünk mindenképpen valamely általánosabb episztemikus háttérben keresendő. Ha ez így van, akkor a matematikai tudás sokat emlegetett „bizonyossága" csakis másodlagos, specifikus bizonyosság, feltéve ha kimutatható, hogy vannak másfajta, a matematikaitól eltérő biztos tudásfajták is.

Alig hisszük, hogy a XX. század ismeretelméleti kísérletei között van figyelemre méltóbb, mint Ludwig Wittgenstein késői munkássága. Így alábbi fejtegetéseink bizonyos kiegészítésekkel és kisebb kritikai módosításokkal Wittgenstein ez irányú elemzéseire támaszkodnak.[9]

Wittgensteinnek a bizonyosságról írott könyve – bár lényegesen különbözik korábbi munkáitól – az „Untersuchungen" bizonyos fejtegetéseire mégis erősen támaszkodik. Az „Untersuchungen" vizsgálódásainak van egy előfeltevése, melyre az egész koncepció épül, az ún. nyelvjáték-elmélet. „Mit jelölnek a nyelv szavai? Miben is mutatkozna meg, hogy mit jelölnek, ha nem használatuk módjában?"[10] „És egy nyelvet elképzelni annyit tesz, mint elképzelni egy életformát."[11]

[9] Elsősorban az alábbi két munkára támaszkodunk: Wittgenstein: „Über Gewissheit – On Certainity", Oxford 1969; Wittgenstein: „Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik – Remarks on the Foundations of Mathematics", Cambridge, Mass., London 1967. A matematikai megjegyzések 1937–1944 között íródtak, és elsősorban a „Philosophische Untersuchungen – Philosophical Investigations" c. könybe illeszkednek bele (Oxford 1958), de nagyrészt mégsem kerültek bele ebbe a műbe.

[10] Wittgenstein: „Untersuchungen", id. kiad. 10.

[11] Uo. 18.

Ha azt mondjuk, hogy „itt van egy kéz", akkor mondhatjuk, hogy „tudom, hogy itt van egy kéz", és ha ezt elfogadom (mármint azt, hogy tudhatom ezt), akkor ismeretünkben a többi garantált. A „tudom" itt annyit jelent, hogy ez a kijelentés nem bizonyítható. Ez utóbbi állítás nem azt jelenti, hogy ezt a kijelentést nem vezethetjük le más kijelentésekből, de mindenképpen azt jelenti, hogy ettől a szóban forgó kijelentés nem lesz biztosabb, mint amennyire biztos önmagában volt. Mondhatja valaki, hogy nem tudom, hogy az ott egy kéz-e, de erre csak annyit válaszolhatunk, hogy nézze meg közelebbről. Ez a lehetőség része a nyelvjátéknak. A „tudás" és a „bizonyosnak lenni" fogalmak különbsége csakis ott válik fontossá, ahol például az „én tudom" kifejezésnek azt kell jelentenie: nem lehet, hogy tévedek. Vagyis ezt a kifejezést akkor van értelme használni, ha semmiféle kétely nem merül fel. Mondhatjuk: „Azt hiszi, de nincs úgy", de azt már semmiképpen sem mondhatjuk: „Tudja, de nincs úgy". Ez a hit és a tudás episztemikus különbsége.

A nyelvjáték-elmélet kiindulása, hogy a szó jelentése nem más, mint alkalmazásának, használatának módja. Ezt akkor tanuljuk meg, amikor a világot nyelvünkbe beépítjük. Világképemhez nem úgy jutok el, hogy meggyőződöm helyességéről, hanem világképem egy olyan szociálisan örökölt hátteret reprezentál, melynek fényében különbséget teszek igaz és téves között.

Ha egy empirikus kijelentést ellenőrizhetőnek tartok, akkor valamilyen alap után nézek, melyen az ellenőrzés alapul. Az alapok azonban egyszercsak a végére érnek, ha nem akarunk egy végtelen regresszust. Az alapozásnak tehát csak akkor van értelme, ha ez a vég nem valamely megalapozatlan előfeltevés vagy állítás, hanem inkább egy *cselekvésmód, amely már lehet megalapozatlan.*

A kételkedés mint a nyelvjáték része feltételezi a bizonyosságot. Amikor először kezdünk hinni valamit, akkor az, amit hiszünk, nem egyetlen kijelentés, hanem kijelentések egész rendszere. Csak mellékesen jegyezzük meg, hogy ha van egy axiómarendszerünk, akkor valamely kijelentés nem azért lesz axióma, mert nyilvánvaló önmagában és egyedül, hanem az egész rendszer lesz evidens: a következmények és a premisszák kölcsönösen támogatják egymást.

Ha egy gyereknek azt mondják, hogy sok éve valaki megmászta a Mont Blanc csúcsát, akkor a gyerek ezt elhiszi. Később természetesen megtanulja, hogy vannak megbízható és megbízhatatlan informátorok, de ezt jóval később tanulja meg, mint azokat a tényeket, melyeket a különböző hitelességű informátorok elmondanak neki. Kezdetben a gyermekben fel sem merül az a kétely, hogy egyáltalán létezett-e ez a hegy. Miért nem győződöm meg arról, hogy van-e két lábam, amikor felkelek egy székről? Itt nincs miért, egyszerűen nem teszem. Ugyanis *ez a mód, ahogyan cselekszem.*

Bizonyos helyzetben az ember nem követhet el hibákat. A hiba elkövetéséhez ugyanis az szükséges, hogy korábban az egyes ember az emberiséggel összhangban ítéljen. A gyerek például úgy tanul, hogy hisz a felnőtteknek. A kétely csak a hit után következik. Rendszerint hiszünk abban, amit az emberek bizonyos módon közölnek velünk. Így hisszük el a földrajzi, a fizikai, a kémiai, a történelmi tényeket stb. Így tanuljuk meg a tudományokat is. Tanulásunk tehát a hiten alapul. A bizonyos szóval azt fejezzük ki, hogy teljességgel meg vagyunk győződve, nem kételkedünk. Ez persze egy szubjektív bizonyosság. De mi a helyzet az objektíve bizonyossal, amikor elvileg nem lehet hiba?

A racionális embereknek nincsenek bizonyos fajta kételyeik. Nem kételkedhetünk mindenben. Az, hogy nem kételkedünk mindenben, egyszerűen ítélésünk és főként cselekvésünk módja. Az, hogy normális feltételek mellett két kezem van, éppoly bizonyos, mint bármi egyéb, amit csak fölhozhatunk bizonyítékul mellette. *Nem csupán* arról van szó, hogy *én* hiszem, hogy két kezem van, *hanem minden racionális ember* ugyanígy jár el, így viselkedik. Amikor azt mondom, hogy „én tudom, hogy két kezem van", a „tudom" azt jelenti, hogy ezt a tényt bizonyosként ismerem. Ez az objektíve bizonyos, amiből adódik, hogy számunkra sok kijelentés bizonyosnak tekinthető. Ha bizonyosságunk alapja a tapasztalat, akkor ez természetesen csak a múlt tapasztalata lesz, vagyis főként nem az én tapasztalatom, hanem másoké, amit én megtudok. Hogyan is tudná a gyermek kétségbe vonni rögvest azt, amit megtanítanak neki. Ez éppenséggel azt jelentené, hogy képtelen lenne megtanulni bizonyos nyelvjátékokat. Amit hiszünk, az függ attól, amit megtanulunk. Nem csupán azt tanuljuk meg, hogy ilyen és ilyen kísérleteknek ilyen és ilyen eredményei vannak, hanem a belőlük levonható konklúziókat is. Ha azt mondjuk, hogy „teljesen biztosak vagyunk benne", akkor ez nem azt jelenti, hogy minden egyes személy biztos benne, hanem főként azt, hogy egy olyan közösséghez tartozunk, melyet a nevelés és a tudomány egybeköt. Valaki azt mondja „én nem tudom, hogy ez egy kéz", joggal kérdezhetjük meg tőle, hogy de tudod-e, mit jelent a „kéz" szó? És ez nem egy empirikus tény, hogy ezt a szót így használják? Furcsa, hogy teljesen biztosak vagyunk abban, miként használják a szavakat, és nem kételkedünk ebben, még sincs alapunk arra vonatkozóan, hogy miért járunk el így. Megkísérelhetünk megadni több ilyen alapot, de egyik sem lesz oly bizonyos, mint maga az, ami állítólag megalapozásra szorul.

Életünk abban áll, hogy néhány dolgot egyszerűen elfogadunk. Kételkedés csak akkor van, ha van nem kételkedő viselkedés is.

Amikor a gyereket tanítjuk, akkor azt mondjuk, hogy „ez a kezed", és nem pedig azt, „talán ez a kezed". Így sajátítják el a gyerekek a nyelvjátékot, és ezért nem kérdéses vagy kétséges számunkra, hogy valóban „kéz-e ez"? Éppúgy a gyermek azt sem tanulja meg, hogy „tudja azt, hogy ez egy kéz". Éppoly kétségbevonhatatlanul tanulja meg a gyermek azt, hogy „ez egy kéz", mint azt, hogy „$2 \times 2 = 4$".

Mindezek alapvetők az ember életében, és így nem változhat meg a véleményünk róluk életünk során. Éppen ezért alapvetők.

Egy angol, aki a szóban forgó színt „pirosnak" nevezi, nem fogja azt mondani, hogy ezt a színt „angolul biztosan ‚pirosnak' hívják". Éppígy az a gyermek sem, aki jól és helyesen használja a szót. Senki nem mondhatja a gyerekről, hogy amikor beszélni tanul, akkor azt tanulja meg, hogyan hívják a szóban forgó színt. Tegyük fel, hogy valaki megkérdezi, hogyan mondják a „pirosat" magyarul. Ha megmondom neki, és ezután mégis megkérdezi, hogy biztos vagyok-e benne, akkor csak ennyit mondhatok: „Tudom, a magyar az anyanyelvem". A gyereknek ugyanis meg kell tanulnia a színnevek használatát, mielőtt érdeklődhetne valamely szín neve után.

Azzal kezdtük, hogy sokan a matematikából mint a biztos tudás példájából indulnak ki, és a többi tudásfajta bizonyosságát is a matematikához hasonlítják. Azzal folytattuk, hogy van ennek episztemikus háttere, de ez a háttér olyan, hogy nem csupán a matematikai tudásra vonatkozik, és mindenképpen matematikán kívüli. Továbbá azt állítottuk, hogy ha a matematikai kijelentéseken kívül másfajta, ugyancsak biztosnak

tekinthető kijelentéseket mutatunk fel, akkor a feltevés legalábbis valószínűsíthető. Láttuk, hogy Wittgenstein rámutat effajta kijelentésekre. A Wittgenstein-féle kijelentések biztosnak tekintése kötelezően azzal jár, hogy el kell fogadnia azt a feltevést, miszerint a matematikai kijelentések bizonyosak. Az a kijelentés, hogy „ez egy kéz" – mondja Wittgenstein – éppoly bizonyos, mint hogy a „2 X 2 = 4" kijelentés az.

Igen ám, de Wittgenstein érvelése először csak abból indul ki, hogy *ha* a „2 X 2 = 4" kijelentés nem vonható kétségbe, *akkor* szükségképpen kell lenniök ugyanilyen bizonyos, nem matematikai kijelentéseknek is. Valaki azt mondhatja ezzel szemben, hogy a „2 X 2 = 4" kijelentés matematikai, és csakis a matematikai kijelentések bizonyosan igazak. Ha ez az ellenvetés fennáll, akkor kell lennie legalább egy, például az adott kiszámítási eljárásra vonatkozó, éppoly biztos, ám mégsem matematikai kijelentésnek is. Ilyen kijelentés lehet például a következő: „Ha számolni tudó emberek hajtják végre a ‚2 X 2' szorzást, akkor az esetek nagy többségében a szorzás a ‚4' eredményt adja". Aligha kívánna bárki is tiltakozni az ilyen állítás ellen, holott ez biztosan nem matematikai.

Ugyanis a számolás természetét úgy ismerjük meg, hogy megtanulunk számolni. Ha megtanultam mondjuk szorozni, akkor szorozhatok kétszer egymás után, hogy ne tévedjek, de biztosabb lesz-e számolásom, ha mondjuk még hússzor szorzok? Az, amit számolásnak nevezünk, fontos része élettevékenységünknek, és mint technikát a számolást életünk számos műveletében nap mint nap használjuk. Ha egy számítást megismétlünk, akkor mindig egy *számításmódot* ismétlünk, és így az ismétlés csak a számítás és nem a számításmód ellenőrzésére szolgál. Tudjuk, hogy a szorzás mindig ugyanazt az eredményt fogja adni, egyébként nem fogadnánk el. Ezt biztosan várjuk a szorzástól mint számításmódtól, és az, amit biztosan várunk, lényeges egész életünk szempontjából.

Úgy gondoljuk, hogy ezek a fejtegetések nem támadják, cáfolják és logikailag nem tartják hibásnak azokat a próbálgatásokat, melyek akár a köznapi kijelentéseknek, akár és főként az egyes tudományos kijelentéseknek tudományos és végső megalapozást kívánnak adni egy másfajta, állítólagos mélyebb tudásalap révén. A matematika alapjait illetően ilyen próbálkozást képvisel a logicizmus. A logicizmus nem állítja azt – bár gyakran tulajdonítják a logicistáknak –, hogy a matematika alapja mindig is a logika volt, hanem csupán azt, hogy a matematika alapul*hat* a logikán: így a matematikai fogalmak és kijelentések logikai fogalmakkal és kijelentésekkel explikálhatók, illetve erősebben: az utóbbira visszavezethetők. Nem mutatható ki ellentmondás vagy hibás kör – bár számos súlyos elméleti-technikai nehézség igen – abban a próbálkozásban, hogy mondjuk az aritmetikát visszavezessék a halmazelméletre. Mégis, a részünkről elfogadott wittgensteini gondolatmenet azt kétségbe vonja, hogy értelme lenne az ilyenfajta lehetséges és időnként realizálható redukciónak a *bizonyosság szempontjából.*

Egyszerűen azért, mert nem tekinthetjük megalapozásnak. Ha tudományos és logikai szempontból például a számelmélet kétségbe vonható, akkor ez megtehető a halmazelmélettel is. A megalapozottság szempontjából a számelmélet nem kevésbé alapvető, mint a halmazelmélet.[12]

[12] Vö. Benaceraff: What Numbers Could Not be; Mark Steiner: „Mathematics of Knowledge", London 1975.

Úgy tűnik, hogy értelmetlennek tartjuk bizonyos fajta tudás és e tudást képező kijelentések végső alapokra való visszavezetését, mégis a már említett kijelentések bizonyosnak nyilvánításával mintha magunk is „alapok" után kutatnánk. Nem kutatunk alapok után abban az értelemben sem, hogy az egyes tudásfajták bizonyossága ezekre formálisan visszavezethető, és abban az értelemben sem, hogy a tudás bizonyossága ilymódon igazolható. Ellenben jeleztünk bizonyos filozófiai-ismeretelméleti megfontolásokat, melyek szerintünk támogatják azt a véleményt, miszerint az emberi élet és tevékenység része és alapja (nem logikai vagy tudományos, de azért egyiknek sem ellentmondó) az, hogy bizonyos kijelentéseket szilárdnak tekintünk, jóllehet ezek a tudomány vagy a logikai igazolhatóság szempontjából korántsem tekinthetők bizonyosabbaknak a többinél. Ez utóbbi azt jelenti, hogy ezeknek a szilárdnak tekinthető kijelentéseknek is van logikai alternatívájuk, azaz másképp is lehetségesek, másképp is elképzelhetők. Ezen „alapok" megkérdőjelezése azonban több kockázattal járna életünk – és ebbe most beleértjük a tudományos tevékenységet is – szempontjából, mint az, ha biztosnak, kétségbevonhatatlannak tekintjük őket.

Kétségkívül mindeddig csak arról volt szó, hogy az emberi élettevékenység során szerzett tudást kifejező bizonyos kijelentések biztosnak tekinthetők, pontosabban biztosnak tekintik őket. Ezen kijelentések között voltak nem matematikai és matematikai kijelentések egyaránt. Mindegyikükre áll azonban az, hogy olyan kijelentések, melyek elsősorban – de nem egyformán – azt a nyelvet jellemzik, melyen a világról beszélni szoktunk, azt a nyelvjátékot „írják le", melyet a világban való orientációnk és egymás közti kommunikációnk céljára használunk.

A biztosnak tekintett kijelentések közül a matematikaiak valamiben mégis különböznek a többitől. E különbség lényege éppen az, hogy semmiképpen sem bírnak úgy empirikus tartalommal, mint a többi. Nem azt állítjuk, hogy semmiféle empirikus tartalmuk sincs, hanem azt, hogy empirikus tartalmuk jellege más. Röviden, az e problémával foglalkozók többségével együtt azt állítjuk, hogy a matematikai kijelentések analitikusak.

Az analicitás fogalmát többféleképpen használják. Említett tanulmányunkban érveltünk amellett, hogy egy teljességgel formalizált rendszerben az analicitás fogalma azonos lenne a rendszer következmény-fogalmával. Egy pusztán analitikus állításokat tartalmazó rendszerben ugyan ez nem vezetne paradoxonokhoz, viszont nem is lenne értelme e rendszerben az analicitás fogalmát definiálni, sőt, ez logikai hiba nélkül csakis a rendszer metarendszere révén lenne lehetséges.

Ez persze csak azt mutatja, hogy az analitikus és a szintetikus kijelentések megkülönböztetésének éppen nem valamely formális rendszeren belül van jelentősége.

Quine az analitikus állítások két fajtáját különbözteti meg: 1. „Egyetlen nőtlen férfi sem nős"; és 2. „Egyetlen agglegény sem nős". A nőtlen férfi és az agglegény kifejezések kognitív szinonimák. Quine az analitikus és a szintetikus állítások különbségét a nyelvi és a nyelven kívüli tényezők meghatározó szerepével definiálja. A kétfajta analitikus állítás különbsége abban áll, hogy a második fajta analitikus állítások az elsőtől eltérően implicite utalnak a nyelv gyakorlati használatára, ami már nem sorolható a tisztán lingvisztikai tényezők közé. Ezek az analitikus állítások rendelkeznek empirikus mozzanattal, a nyelvhasználat empíriája nélkül nem értelmezhetők. „Az agglegény nőtlen férfi" analitikus állításból adódik, hogy a nyelvi gyakorlatban az

„agglegény" és a „nőtlen férfi" kifejezéseket ugyanúgy használjuk. Ez azt mutatja, hogy az analitikus állításoktól is vezethet út az empíria felé. Ez azért lehetséges, mert az analitikus állítások is rögzíthetnek bizonyos információkat a valóságról. Nevezetesen olyanféléket, hogy élettevékenységünk során a külvilágról ilyen és ilyen formában beszélünk, és ez a beszédmód hasznos ahhoz, hogy a világról szóló információkhoz juthassunk.

Abban az értelemben a matematika analitikus állításai is rögzítenek információkat a valóságról, hogy a valóság – az emberi élettevékenység, beleértve a tudományos tevékenységet is – bizonyos dolgai és eseményei éppen ilyen módon rendezhetők racionálisan. Tehát a matematikai rendezés mint emberi tevékenység ebben az értelemben már adekvát lehet a világgal. Valószínűleg – legalábbis így sejtjük – ennél többet is rögzítenek a matematikai formák, tudniillik azt, hogy másfajta rendezések is elvileg lefordíthatóak lesznek az általunk használt rendezés nyelvére. Attól, hogy emberi, ember-szempontú rendezésről beszélünk, effajta tevékenységünk még nem lesz önkényes vagy tetszőleges. Csupán annyit mondunk, hogy a matematikai rendezések nem a természetben eleve adott elrendezések, melyeket saját rendezéseink csupán leírnak. Az „önkényes" vagy az „akaratlagos" csak az emberi tevékenységformák megkülönböztető sajátossága, és nem vonatkozhat a természet és az emberi tevékenység közti különbségre. Ha az utóbbira vonatkozna, akkor azt kellene feltételeznünk, hogy az embertől független valóságban is van akarat és önkény.

Tehát a matematika sajátos módon rendezi a világot, de elméleti rendszerei közvetlenül nem a világról szólnak, hanem arról a módról, ahogyan megismerő tevékenységünkben rendezzük azt.

Abból, hogy az eddigiekben elvetettük a platonizmust mint olyan koncepciót, mely a matematikának szilárd és végső alapot biztosítana, még nem következik, hogy minden értelemben eleve elutasítjuk a matematikai objektumok létét. Ha viszont megengedjük a matematikai objektumokat, akkor kérdés, hogy elkerülhető-e a platonizmus?

5. A MATEMATIKA OBJEKTUMAI (ISMÉT A PLATONIZMUS)

„A matematikus feltaláló, nem pedig felfedező" (Ludwig Wittgenstein). Ha léteznek valamiképpen matematikai objektumok, akkor az a kérdés, hogy független létük van-e az emberi szellemtől, vagy pedig az emberi elme hozza létre őket. Az előbbi esetben a matematikus felfedező, a másodikban feltaláló. Ha a matematikus felfedező, akkor ez azt sugallja, hogy a matematikai objektumok a megismerőtől független entitások, és a matematikai elméletek is függetlenül léteznek az egyes megismerő szubjektumoktól. Ha a matematikus feltaláló, akkor ez arra utal, hogy a matematikai objektumok, illetve az elméletek vagy akár mindkettő egyaránt az emberi intellektus korrelátumai.

Nyilvánvaló, hogy elkerülhetetlen az absztrakt entitások jellegének tisztázása. Egészen pontosan itt most nem tisztázhatjuk az univerzálék problémájával összefüggő kérdéseket, hanem csupán a matematikai absztrakció létéről beszélhetünk. A görög antikvitásban senki nem kételkedett abban, hogy a matematikai entitások reálisak-e, csupán az entitások realitásának fokában volt a görögöknél nézeteltérés. A matematika ontológiai irányzata szerint a matematika a Létező tudása. A pythagoreusok szerint a számok anyagi dolgok (például a négyzetek és háromszögek pontjait reprezentálják). Platón szerint viszont a

szám – és az idea – nem anyagi, hanem olyan intelligibilis objektum, mely az érzetek számára hozzáférhetetlen.

A matematikusok ezen eszmék hatására az olyanfajta objektumokat, mint a szám, a pont, az egyenes stb., valamiféle magánvalónak tekintették, mely önmagában létezik és értelmes. A XIX. században viszont már a matematikusok egy jó része feladja ezt az álláspontot,és arra a felismerésre jut, hogy az effajta objektumokra érvényes megállapítások nem vonatkoznak valamiféle szubsztanciális realitásra, mert elsősorban matematikailag definiálatlan objektumok közti összefüggéseket szögeznek le és e definiálatlan objektumokkal végzett műveletek szabályait rögzítik. Eszerint nem lehet és nem is kell a matematikusnak arról beszélnie, hogy mik „valójában" ezek a pontok, egyenesek, számok stb.

Platóntól kezdve mindazok, akik folytatták ezt a filozófiai hagyományt, a matematikai elméletek posztulátumait és tételeit úgy tekintették, mint amelyek egy reális világban igazak, ami természetesen nem jelenti azt, hogy koncepcióik ne térnének el jelentősen egymástól. A platonizmus azt még elismerheti, hogy a matematikai kijelentések lehetnek empirikus kijelentések idealizációi, de azt már figyelmen kívül kell hagynia, hogy a különböző koidentifikálható idealizációk sokfélék lehetnek, és azt kell állítania, hogy a valóságra vonatkozóan közülük csupán egy lehet igaz.

Megkülönböztethetjük a platonizmus ontológiai és episztemikus válfaját. Az ontológiai platonizmus szerint a matematikai igazságok végtelenül sok reális matematikai objektumot írnak le. Éppen ezért nem lehetnek anyagi objektumok. A matematikai állítások tehát csak azáltal lehetnek igazak, hogy adekvátan leírják az effajta objektumokat. Akár tartható az ontológiai platonizmus, akár nem, visszajutunk ahhoz a kérdéshez, hogy igazak-e és milyen értelemben igazak a matematikai axiómák. Az episztemikus platonizmus szerint a matematikai entitásokra vonatkozó tényeket csupán az érzéki észlelés révén tudhatjuk. Az effajta észlelésben éppúgy megbízhatunk, mint abban az érzéki észlelésben, melyre például fizikai elméleteket építünk fel. Az episztemikus álláspont viszont elkerülhetetlenül sugallja a legrégibb ellenvetést mindenfajta platonizmussal szemben: ha a matematikai entitások reálisan léteznek, akkor nem megismerhetők, minthogy nem gyakorolnak kauzális benyomást érzékeinkre. Ebből adódik, hogy vagy a matematikai axiómák nem igazak (hiszen az előbbiek alapján felteszik, hogy a matematikai entitások nem léteznek), vagy pedig az axiómák nem megismerhetők. Az ontikus platonista szerint az absztrakt entitások sokkal távolabb esnek az érzékeléstől, mint a mikroentitások. Éppen ezért revideálhatók a matematikai elméletek könnyebben, mint a természettudományok. Ez azonban csak fokozati különbség. Hiszen az ontikus platonistával szemben mondhatjuk, hogy például az elemi részecskékre vonatkozó elméletek is könnyebben revideálhatók, mint pl. az a fizikai elmélet, mely a vákuumban levő nagy hőmérsékletű fémekre vonatkozik.

Csupán ismételten jeleztük a platonista koncepciók kapcsán fellelhető nehézségeket. Mégis azt gondoljuk, hogy a matematika értelmezésében nem kerülhető el a matematikai objektumok elismerése, és nem kerülhető el *egy igen mérsékelt* platonizmus sem.

Ugyanis ha léteznek bármiféle értelemben is matematikai objektumok, akkor ez azt jelenti, hogy léteznek absztrakt entitások is, hiszen ezek a matematikai objektumok a már említett érvek miatt semmiképpen sem lehetnek úgy a világban levő dolgok, események vagy relációk, ahogyan például a köznapi dolgok vagy akár azok a dolgok melyeket az

empirikus természettudományok írnak le. Egyszóval, a matematikai objektumoknak szubsztanciális létük semmiképpen sincs.

Ezek után miért hajlunk arra, hogy egyáltalán feltételezzük a matematikai objektumokat? Nem vitatjuk, sőt elfogadjuk, hogy mindazok a dolgok, relációk, melyek a matematikában megtalálhatók, nem léteznek a megismerő szubjektum alkotó tevékenysége nélkül, sőt, Wittgensteinnel együtt azt tartjuk, hogy éppen az alkotó ember, a matematikus hozza létre őket. Az azonban kétségtelen, hogy miután az emberi intellektus feltalálja őket, más intellektusok számára független vizsgálódások tárgyai lehetnek, és újfajta matematikai fogalmak, állítások kiindulópontját alkotják. Továbbá nem egyszerűen alkalmazhatók más, tőlük függetlenül létező valóságos dolgok és események egzakt leírására, hanem maguk az ideák minden gyakorlattól függetlenül a fizikai világban maguk is modellezhetők. Következésképpen olyan tulajdonságaik is leírhatók, melyeket feltalálójuk eredetileg nem gondolt hozzájuk tartozónak. Ebben az értelemben a matematikában sem hiányzik az elméletek deskriptív funkciója. Az a különbség természetesen megmarad, hogy a matematikai deskripciók nem az embertől független világ leírásai. Még abban az értelemben sem, ahogyan az absztrakt fizikai elméletek azok.

A továbbiakban csupán egyetlen példán szeretnénk bemutatni, hogy mit is értsünk a matematikai objektumon. Úgy gondoljuk, hogy ez a példa egyrészt választ ad a már említett nehézségek kiküszöbölésére – bár nem tagadjuk, hogy esetleg újabb nehézségeket vet fel –, másrészt megmutatja, hogy milyen értelemben beszélhetünk a matematikai objektumok létezéséről.

Példánk a „halmaz"-fogalom egy lehetséges értelmezését nyújtja. A gondolatmenet túlnyomórészt Max Black tanulmányára támaszkodik.[13]

A „halmaz" fogalma ma az egész matematikában alapvető szerepet játszik. A halmazt éppúgy matematikai objektumnak szokás tekinteni, mint a pontot, az egyenest stb. E fogalom jelentésének elemzése éppen ezért megvilágító lehet a többi matematikai objektum jelentése szempontjából is. A halmazt definiálatlan fogalomként szokták kezelni, mint bármely axiómarendszer tetszőleges primitív fogalmát. Ezeknek a primitív fogalmaknak az esetében nem is fontos a definíció, de elengedhetetlen a rendszerben játszott funkcióik körülhatárolása, és ez helyettesítheti a definíciót. Minimális követelményként adódik a halmaz fogalmával szemben, hogy úgy használjuk: tudjuk, mikor és hogyan tárjuk fel a speciális halmazokat, hogyan operáljunk velük, és hogyan jussunk a premisszákból a kívánt konklúzióhoz.

Vegyük kiindulásul Cantor 1895-ben adott megfogalmazását. „‚Halmazon' értünk bármit, mely intuíciónk (Anschauung) vagy gondolkodásunk határozott és jól megkülönböztethető *m* objektumait (elemeit) valamely *M* egészbe összegyűjti, egyesíti."[14]

Az „intuíció" és a „gondolkodás" szavak a megfogalmazásból nyugodtan elhagyhatók, hogy az ide nem tartozó nehézségeket elkerüljük. Az „objektum" vagy az „elem" kifejezéssel pedig az a helyzet, hogy egésszé egyesíteni őket csak akkor lehet, ha ezek az objektumok vagy az elemek a számokhoz hasonló absztrakt entitások. Az elemek elválasztása, körülhatárolása, a köréjük és a közöttük húzható vonal vagy határ éppoly képzetes, mint például az Egyenlítő. Cantor megfogalmazásában nagyon sok a misztikus elem, hiszen ha maga az „egész" kifejezés is problematikus, akkor mennyire misztikus az, hogy például

[13] Max Black: The Elusivness of Sets; „The Review of Metaphysics", 1971/4, 614–636.

[14] Cantor: „Gesammelte Abhandlungen", Hildesheim 1962, 282.

„összegyűjtünk" vagy „egyesítünk" egyetlen dolgot, mely így egy új entitást alkot (ilyen az ún. „egységhalmaz"), vagy mennyire misztikus az, hogy „összegyűjtjük" vagy „egyesítjük" a semmit, hogy az ismét valami egységes egyedi objektumot (az ún. null-halmaz) alkosson, a végtelen halmazokról már nem is szólva.

Nézzünk egy másik megfogalmazást: „A halmazok, ahogyan általában azokat értik, nem mások, mint amit a filozófusok univerzáléknak hívnak."[15] Mások, például Frege, tulajdonságnak vagy valamely fogalom extenziójának tartják a halmazt.

Mindenféle megfogalmazással szemben különböző nehézségek merülnek fel. A halmazfogalom bevezetésének az az értelme, hogy a világ rendezése során, illetve annak során, ahogyan beszélünk a világról, felmerül az a kérdés, hogy miként beszélhetünk több dologról egyszerre. Ha beszédünk során egyetlen dologra referálunk, akkor általában használunk egy nevet vagy egy definit leírást. Például „Carter", vagy az „Egyesült Államok elnöke". Vannak a nyelvben azonban eszközeink arra is, hogy *több dologra együtt* referáljunk. Például „Berkeley és Hume", vagy „a kormány és az ellenzék", vagy „Napóleon testvérei" stb. Ez a fajta felsorolás bizonyos esetekben hasonló szerepet játszik, mint az egy dologra referáló nevek és szinguláris leírások. Ezt a fajta beszédmódot nevezhetjük *plurális leírásnak.* A köznyelvben akkor értelmes rákérdezni a referenciára, ha valami kétely merül fel azzal kapcsolatosan, hogy ugyanarról beszélünk-e? Az ily módon bevezetett plurális referencia fogalma, mely számos dologra egyszerre vonatkozik, már nem tekinthető misztikusnak, hiszen egy reálisan és értelmesen használt és igen hasznos beszédmódot vezet be. Van az effajta használatnak olyan alkalmazása is, amikor arról van szó, hogy az ilyen együttes beszédmód nem meglevő ismereteket foglal egybe csupán, például akkor, amikor a szóban forgó számos dolog pontos identifikációját nem ismerjük. Tegyük fel, hogy a határon a hangszóró a következő bejelentést sugározza: „Kérünk minden érkező utast, hogy jelentkezzék vámvizsgálatra!" Ekkor ismeretlen az érkezők személye, de nincs is jelentősége, hogy kik azok, akik érkeznek, hiszen csak az a fontos, hogy mindannyiuknak szól a tájékoztatás. Nyilvánvaló, hogy az effajta leírásnak van bizonyos haszna a szinguláris leírásokhoz képest, de az mindenképpen biztos, hogy éppoly értelmesen használható.

A „halmaz" szó primitív használata, pontosabban köznyelvi használata éppen ezekre a fentebb tárgyalt plurális referáló kifejezésekre érvényes.

Egy sor nyelvre jellemző, hogy kollektív kifejezéseknek vagy gyűjtőfogalmaknak tekinti az olyan kifejezéseket, mint a „Bartók vonósnégyes", a „Kormány", az „ellenzék" stb. Ezek a kifejezések – legalábbis néha – úgy funkcionálnak, mintha szinguláris nevek vagy leírások lennének. Talán ezzel magyarázható leginkább az, hogy a „halmazt" hajlamosak vagyunk úgy tekinteni, mint saját elemeiből konstituált, de azokkal mégsem azonos önállóan létező entitást. Különösen jó akkor alkalmazni a halmazt, ha számunkra érdektelen az elemek identifikálása, mert csupán azok számszerűsége érdekel minket. Például tegyük fel, hogy számos bizottság működik egy szervezetben. Előfordulhat, hogy e bizottságok száma egy bizonyos embercsoportból tevődik össze, és mindegyik bizottságnak külön-külön van titkársága és ülésterme, akkor minket esetleg csak az érdekelhet, hogy mekkora a halmazok száma, vagy pedig különböző elemeik száma. Ekkor egy olyan felsorolást kapunk, melyben a plurális referáló kifejezések egymást követik. Például: pénzügyi bizottság, szabályozó bizottság, mandátumvizsgáló

[15] Fraenkel–Bar-Hillel: „Foundations of Set Theory", Amszterdam 1958, 333.

bizottság stb. Ekkor használhatjuk a „bizottságok halmaza" kifejezést is. Ez a halmazok halmaza. És ezzel a módszerrel tovább leírhatnánk a „halmaz" kifejezés különböző használatait. Mindeddig csupán köznyelvi kifejezésekre utaltunk csupán azért, hogy eljárásunkat megvilágítsuk. Természetesen az olyan fogalmakra, mint „null-halmaz" vagy az „egységhalmaz", már köznyelvi megfelelőt nem találhatunk. Bevezetésüknek csakis a matematika, illetve a logika világán belül van helye. Még inkább áll ez az ún. „végtelen halmazokra".

A „halmaz" a matematikai objektumokat képviselte általában, de ez ideig csak a köznapi életből vett példákkal próbáltuk megvilágítani. Az „egységhalmaz", a „null-halmaz" és a „végtelen halmaz" esetében azonban már kilépünk a köznyelvből, és ezeknél már a matematikán belül kell megmutatnunk, hogy értelmezésük legalábbis lehetséges.

Különösképpen áll ez a null-halmazra és a végtelen halmazokra, hiszen az egységhalmaz semmiképpen sem játszik a másik kettőhöz hasonló fontos szerepet, másrészt pedig a köznapi szemlélethez is közelebb áll.

Ezek után a matematikán belül próbáljuk röviden megmutatni, a null-halmaz és a végtelen halmazok esetében, hogy valami hasonlóról van szó, mint amire a köznyelvben már utaltunk. A matematikában is csak akkor kapcsolják össze az elemeket halmazzá, ha bizonyos problémákat a halmazon meg tudunk oldani, mégpedig úgy, hogy a halmaz elemeiről külön-külön semmit sem tudunk. Tehát a matematikán belül is az szorul indoklásra, hogy valóban egy újfajta hasznos beszédmód kialakításáról és nem pedig valamiféle újfajta absztrakt entitás felfedezéséről van szó.

Vezessünk be néhány egyszerű matematikai fogalmat. A $d \in H$ jelölés semmi egyebet sem jelent, mint hogy d H-hoz tartozik, vagy más szóval hogy d *eleme* a H-nak. Azt mondjuk, hogy két halmaz csak akkor *azonos,* ha az egyik halmaz minden eleme a másiknak is eleme, és a másik halmaz minden eleme az előbbi halmaznak is eleme. Két halmazt viszont egymással *ekvivalensnek* mondunk, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Nyilvánvaló, hogy két véges halmaz esetében akkor beszélünk ekvivalenciáról, ha elemeik száma egyenlő. Ha valóban egy új beszédmód kialakítására törekszünk, akkor szükséges, hogy ez a beszédmód valamennyi halmazra vonatkozzék, beleértve a null-halmazt és a végtelen halmazt is. Tehát amíg véges halmazok esetében azt mondtuk, hogy a halmazok ekvivalensek, ha ugyanannyi elemük van, két végtelen halmaz esetében ezt mondani nincs értelme, így találnunk kell egy új fogalmat, mely mindkettőre alkalmazható lesz. Azért vezetjük be a halmazelméletbe a számosság fogalmát, hogy a halmazok ekvivalenciájáról szóló tételünk alkalmas legyen végtelen halmazokra is. Két ekvivalens halmazról nem azt fogjuk mondani, hogy ugyanannyi elemük van, hanem azt, hogy a két halmaz számossága egyenlő. A halmazok számossága tehát egy jel, melyre vonatkozólag kikötjük, hogy először is az ekvivalens halmazok számossága egyenlő legyen, másodszor pedig azt, hogy a véges halmazok számossága egyenlő legyen elemeik számával.

Így nagyjából már látható, hogy miként jutunk el a végtelen halmazhoz. Hiányzik még a null-halmaz. Az $A \cup B$ jelölje a két halmaz unióját, mely semmi egyebet nem jelent, mint azon elemek halmazát, mely elemek közül mindegyik legalább az egyik halmaznak az eleme. Ez tetszés szerint bármely két vagy több halmazból képezhető. Az $A \cap B$ jelölje a két halmaz metszetét, mely azon elemek halmaza, mely elemek mindkét halmaznak egyidejűleg elemei. Vagyis a két halmaz elemeinek közös halmazáról van szó. Ha két

halmaznak nincs közös eleme, akkor az $A \cap B$ metszethalmaz az üres halmaz, ami a köznyelvben körülbelül annyit jelent, hogy nincs olyan dolog, ami az üres halmaz eleme lenne. Az üres halmaz véges, mert számossága természetes számmal adható meg. A null-halmaz számossága $\overline{\overline{0}} = 0$.

Csak egyetlenegy üres halmaz van, ami rendkívül egyszerűen belátható. Legyen 0_1 és 0_2 két üres halmaz, akkor azon definíció értelmében, hogy két halmaz akkor és csak akkor azonos, ha az egyik minden eleme a másiknak is eleme – és fordítva –, könnyen belátható, hogy 0_1 és 0_2 egyenlő.

Könnyű lenne ellenvetésként felhozni, hogy minek beszélni olyan halmazokról, amelyeknek nincsen elemük. Ha a halmazok éppúgy objektív entitások lennének, mint a fizikai tárgyak, akkor az ellenvetés jogos lenne. De éppen azt próbáltuk bebizonyítani, hogy a halmaz egy újfajta hasznos beszédmód bevezetését jelenti, és ekkor már nemcsak matematikai, hanem a köznapi életből vett példákat is hozhatunk e beszédmód értelmes voltára. Pl. azt mondom, hogy ma mindenkivel beszélni fogok, aki felhív telefonon, de nyilvánvalóan üres halmazt kapok, ha senki sem fog felhívni telefonon. Vagy mondhatom, hogy útlevelemben a kilépő ablakok száma mindig 5 darab lesz, de ha nem lesz benne egy ablak sem, annak az is lehet az oka, hogy nincs útlevelem. Vagy beszélhetek arról, hogy egy következő háborúban hány ember venne részt, de alkothat ez a kijelentés üres halmazt is, ha pl. nem lesz háború.

Az axiomatikus halmazelmélet definiálatlan alapfogalmai és levezethető tételei, eljárási szabályai ugyancsak értelmezhetők ily módon. Minthogy azonban az alapfogalmak és az axiómák rendszerenként némileg eltérők, témánk szempontjából túl bonyolult lenne tárgyalásukba e tanulmányban belefogni. Az axiomatikus rendszerek elemzése amúgy sem nyújthat többlettudást a matematikai objektumok jellegének tisztázásához.

Úgy gondoljuk, hogy a „halmaz"-fogalom ilyen bevezetése és értelmezése kiküszöböl számos olyan kérdést, melyre csak misztikus válasz volt adható. Ilyen kérdés például az, hogy a halmaz maga is egy dolog-e? A „Péter, János, István" kifejezést nincs értelme azonosítani akár Péterrel, Jánossal, Istvánnal vagy akárki mással. Ha a kérdést így értjük, akkor mondhatjuk, hogy a halmaz egy dolog. De ugyan miféle dolog? Mondhatjuk, ha tetszik, bár semmiféle értelemben nem lesz informatív, hogy a halmaz – halmaz. A régi elképzelések alapján felvethető volt az a kérdés, hogy mi az, ami a halmaz elemeit egyáltalán halmazzá egyesíti. Úgy gondoljuk, semmi. Hiszen az ég egy világon semmi sem történik Péterrel vagy Jánossal attól, ha egyszerre és együtt referálok rájuk. Csupán arról van szó, hogy a plurális referáló kifejezés lehetővé teszi, hogy egyidejűleg, egyetlen állításban referálhatok rájuk. *Nem újfajta dolgot, hanem újfajta hasznos beszédmódot konstituáltunk.* Létezik-e ebben az esetben egyáltalán halmaz? Ha arról van szó, hogy Péter és János létezik-e, akkor természetesen igen. Miért kell többet kívánnunk ennél egy hasznos és alkalmas beszédmód bevezetése esetén?

A halmazok csak akkor kelnek életre, amikor a plurális referáló kifejezéseket használjuk. De *ha használjuk* őket, akkor természetesen *már nem csupán arra a célra alkalmasak,* melyre létrehoztuk őket, hanem egy olyan beszéd- és rendezési módot hoznak létre, melyek nemcsak az eredeti leírásra alkalmasak, hanem maguk is *további kutatás tárgyai lehetnek.*

Ebben az értelemben már tekinthetők objektumoknak, azaz a használt beszéd vagy nyelvi leírásmód társadalmilag rögzített – a továbbiakban relatíve függetlenné vált – tárgyainak.