HÉRAKLEITOSZ TANÍTÁSA A HARMÓNIÁRÓL. I.

FALUS RÓBERT

Mérték, rend, törvény, harmónia, szabály — megannyi jellegzetes, fontos és folyamatos utóéletű fogalom az ókori görög gondolkodásban. Kozmológiai, politikai, erkölcsi, logikai, esztétikai, orvostudományi, matematikai érvelésekben egymást kiegészítve, olykor hasonló jelentéssel vagy éppen szinonimákként (pl. *ἁρμονία-συμφωνία)* fordulnak elő,[1] jelentésük fejlődéstörténete és — korszakok, témák, írók szerint való — variálása pedig a gondolkodási rendszerek viszonyát fejezi ki. Különösen fontos a filológiai hitelű fogalomvizsgálat[2] a vallásos és racionális gondolkodásmód vagy — mint az esztétika kezdetei esetében — a spontaneitás és egzaktság-igény összefüggéseinek, valamint a tudatszférák kapcsolatainak — mind differenciálódásának, mind pl. platóni integrációjának — megértéséhez. A lexikai vizsgálat természetesen sem öncélú, sem önmagában — vagyis formálissá merevítve — kielégítő nem lehet: a jelentésváltozások *miért?*-jének kutatása és lehetőség szerinti megválaszolása adja e stúdiumok igazi értelmét; ez éppen úgy érvényes egy-egy auctor interpretálására, mint a formailag azonos fordulatok (pl. *νόμῳ — φύσει)* nagyon is különböző funkcióinak megmagyarázására.

Az alábbi tanulmány témája nem csupán a harmónia hérakleitoszi felfogása szempontjából tűnik jelentősnek, hanem — konkrét példán — a görög fogalmak jelentésváltozásainak történeti vizsgálata érdekében is. A *ἁρμονία* főnév, amely „kapcsolat, megállapodás" jelentésben fordul elő már Homérosznál,[3]

[1] A görög filozófia — különösen pedig a Platón előtti filozófia — terminológiájának diakronikus és szinkronikus vizsgálata az ókortudomány fontos és ezután is sokat ígérő feladatai közé tartozik. A párhuzamos vizsgálatok szakirodalmából kiemelendő: *J. Kerschensteiner:* Kosmos. Quellenkritische Untersuchungen zu den Vorsokratikern. München 1962.; *C. J. Classen:* Sprachliche Deutung als Triebkraft platonischen und sokratischen Philosophierens. München 1959.; *G. Redlow:* Theoria. Theoretische und praktische Lebenauffassung im philosophischen Denken der Antike. Berlin 1966.; Wissenschaft und Weltanschauung in der Antike (szerk.: *G. Kröber).* Berlin 1966. (Rövidítése az alábbiakban: WuW.) Elsőrendű segédeszköz: *Ch. Mugler:* Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs. Paris 1958. Gazdag anyagot ad *P. H. Michel:* De Pythagore à Euclide. Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidiennes. Paris 1950.

[2] Részletesen: *Szabó Á.:* Anfänge der griechischen Mathematik. Budapest 1969., 11 skk. Ennek a fontos vonatkozásokban radikális jelentőségű és a szerző korábbi tanulmányait új szinten rendszerező munkának a méltatása és — hol szemléleti, hol interpretációs kérdésekben — vitatása végigvonul egész dolgozatomon. Egyes véleménykülönbségeink ellenére, kötelességem kinyilvánítani, hogy nagyon sokat köszönhetek könyvének, amely nélkül aligha lehet tájékozódni s előbbre lépni az egzakt gondolkodás kezdeteinek vizsgálatában.

[3] *G. S. Kirk:* Heraclitus. The Cosmic Fragments. Cambridge 1954, 207.

primér fokon ugyanúgy mesterségbeli szakkifejezés volt (az ácsok és fegyverkovácsok *techné*-jében: „összeillesztés, pontos összefüggés, kapcsolat"), mint az *αρ*-tőből származó igék *(ἀραρίσκω, ἁρμόζω)* s ezek főnévi derivátumai (pl. *ἅρμα, ἁρμός, ἁρμογή)*. A metaforikus jelentésbővülés és a fogalmi absztrakció — amelynek árnyalatairól s fázisairól minden jobb szótár ad tájékoztatást, tehát mellőzhető — szerves és magától értetődő mozzanata a görög civilizálódás technikai, tudományos, művészi, filozófiai meggyorsulásának; a „mérték" és „józanság" társadalmi s erkölcsi elvével párhuzamosan — melyeknek konzervatív-arisztokratikus nyomatékát az „ismerd meg önmagadat!" apollóni parancsa fejezte ki, de amelyek nagyon is különböző, sőt ellentmondásos tartalmat nyertek a drámairodalomban — a „kiegyensúlyozottság" kifejezésére szolgált és — Platón filozófiájában érve el a csúcsra — etikai és esztétikai eszménnyé nemesedett. Művészeti, elsősorban zenei szakkifejezésként való alkalmazása a *lüra* húrjainak pontos (arányos) összeillesztéséből eredt,[4] Harmonia istennő múzsai kultusza pedig a homéroszi Apollón-himnusztól (195) és a hésziodoszi Theogoniától (937) kezdve állandósult.[5] Kiváltképp fontos és gyakori kategóriává lett a harmónia a püthagoreusok tanaiban, mint a matematikai-zenei arányosság, a számokban megragadott világtörvény és a lelki tökéletesség kifejezése.[6]

Hérakleitosz — bármily heves indulattal támadja is Püthagoraszt — két vonatkozásban is kapcsolódik ezekhez a tanokhoz: *1.* terminológiájából is nyilvánvaló, hogy a harmóniát a zenei összhangzás elméletével kapcsolja egybe (vö. VS 22 B 10-ben: *συνᾷδον διᾷδον)*, „az eltérőkből való harmónia a legszebb" elv alapján (B 8), ami a későbbi zeneelméletben úgy rögződött, hogy a hangok különbözősége mindenféle harmóniának elvi előfeltétele, *2.* a világrend lényegének s szüntelen változásainak törvényét, a *logosz*-t (eredetileg: „halmazat, csoport"[7]) számszerűségben érvényesülő és megragadható princípiumnak tartotta, részint az „ión triász" nyomán, részint a püthagoreusok spekulációhoz hasonlóan. — Hérakleitosznak ez a „matematizáló" törvényértelmezése világlik ki a közvetett forrásokból is, a kortársi komédiaköltő, Epikharmosz paródiájából (VS 23 B 2) éppúgy,[8] mint a hérakleitoszi filozófiából sok mindent merítő, sztoikus Kleanthész Zeusz-himnuszából.[9]

[4] Pl.: *ἁρμόζειν ἔπεα* (Pind. *P.* III. 114), *λύραν* (Plat. *Phaid.* 85 E).

[5] A legfontosabb mítoszváltozatokról l. *R. Graves:* A görög mítoszok. Budapest 1970., a mutató szerint.

[6] Görög vonatkozásban pontatlan, de művelődéstörténetileg sok érdekességet tartalmaz: *Matila C. Ghyka:* Le nombre d' or I—II. Paris 1931. A dolgozat folytatásában többször kerül szóba a jelenkori tudománytörténet egyik kiváló alkotása: *B. L. van der Waerden:* Erwachende Wissenschaft. Basel—Stuttgart 1966.[2] — Vö. 1. és 2. jz.

[7] Részletesen *Ch. Mugler:* id. mű, 272 skk.; *Szabó Á.:* id. mű, 193 skk., 221 skk. — A számszerűség nem mindig és nem okvetlenül tartozott a *logosz*-nak (akár mint „halmaz"-nak, akár mint a mennyiségek közötti „viszony"-nak) a jelentéséhez, de a Püthagorasz utáni korokban — mint a Hérakleitosz-töredékekből is kiviláglik — magától értetődőnek tűnt a köznyelvben is (vö.: számbavenni és besorolni).

[8] Elsősorban *K. Reinhardt* és *Szabó Á.* eredményeit hasznosítottam és igyekeztem kritikailag továbbfejleszteni egyik korábbi cikkemben: Epicharmos 1. és 2. töredékének elemzése. Ant. Tan. VIII. (1961) 65 skk.

[9] SVF I. Leipzig 1905. (ed.: Arnim) 123., 537. fr. 18 skk.: *ἀλλὰ σὺ καὶ τὰ περισσὰ ἐπίστασαι ἄρτια θεῖναι καὶ κοσμεῖν τἄκοσμα καὶ οὐ φίλα σοὶ φίλα ἐστίν· ὧδε γὰρ εἰς ἓν πάντα συνήρμοκας ἐσθλὰ κακοῖσιν, ὥσθ' ἕνα γίγνεσθαι πάντων λόγον αἰὲν ἐόντα.* A számszerűség és filozófia kapcsolataival foglalkozó szakirodalomból lásd még: А. Ф. Лосев: Числовая и структурная терминология в греческой эстетике периода ранней классики. Вопр. ант. лит. и классической филологии. Москва 1966. 29 skk.

A terminológiai vagy akár gondolati hasonlóságok persze nem homályosíthatják el Hérakleitosz szellemi önállóságát: szemben az ellentéteket s ellentétpárokat elmerevítő és abszolutizáló püthagoreusokkal, az ellentétek dialektikáját (harcát és egységét), valamint az egység ellentétességét (azonosság — nem-azonosság) vallotta alapelvül;[10] nem az állandóság, hanem a harc és folytonos változások filozófusa, amire valósággal predesztinálta a korabeli Iónia társadalmi valósága,[11] és ami a görög poliszok szellemi életében mind több párhuzamra lel — akár a képzőművészetben (pl. a szobrászatban a ponderáció elvének érvényesítése, amely a statikus egységet dinamikus egységgel váltja fel), akár a „cselekvés" irodalmi műfajának, a drámának diadalútjában.[12]

Sem a filológiai, sem a matematikatörténeti kutatások nem fordítottak kellő figyelmet a „homályos" Hérakleitosz töredékeinek matematikai vonatkozásaira, pedig ezek egyfelől az *egy* és *valamennyi* kapcsolatának — sőt, az egész hérakleitoszi dialektikának — jobb megértése, másfelől bizonyos matematikai-geometriai tételek datálása szempontjából lehetnek fontosak. A mindenféle változás egyazon mértékének (törvényének, állandó arányának) elvi általánosítását természetszerűleg kísérik kozmológiai naivitások (vö. B 31), akárcsak ión elődeinél, de Xenophanésznél vagy Parmenidész tanköltemények második — a közhiedelmet önállóan rendszerező — részében is. Nehezíti az elemzést és a következtetést a szövegek töredékessége és jellegzetes stílusa, sőt számos idézet hitelességének problematikus volta; így pl. a fentebb említett, Arisztotelész idézésében (?) megőrzött 8. fragmentumot érdemes kutatók — Gigon, Kirk — vitatják el Hérakleitosztól, Arisztotelész lényegileg pontos kivonatát, de nem szó szerinti citátumot tételezve fel a szövegben. Ezen kívül két másik töredék szól explicit formában Hérakleitosz harmóniafelfogásáról (B 51 és 54). Mindkettőt az i. sz. III. században élt keresztény apologéta, Hippolütosz idézi, minden valószínűség szerint — legalábbis stiláris kritériumok alapján — pontosan, bár természetesen keresztény interpretációval.[13] Az 51. fr. az íj és a lant példáján érzékelteti a feszítő és összetartó erők egyensúlyát (harmóniáját), az ellentétek egységét. Az 54. fr. a látható és láthatatlan harmónia értékét hasonlítja össze.

HÉRAKLEITOSZ 54. TÖREDÉKE

Ἁρμονίη ἀφανὴς φανερῆς κρείττων — hangzik az idézet, melyet Hippolütosz úgy magyarázgat, hogy Hérakleitosz a láthatatlan istent magasztalja az érzékelhető dolgok rovására (*Refutatio* IX, 9, 5). Egy másik helyen (IX, 10, 1) már azt mondja, hogy egyazon értéket tulajdonít az érzékelhető és nem-érzékelhető dolgoknak, az 55. fr.-ot idézve pedig (*ὅσων ὄψις ἀκοὴ*

[10] Igen jó elemzést ad: *A. Joja:* Die Anfänge der Logik und Dialektik in Griechenland. WuW 15 skk. különösen 28 skk.

[11] Szükségtelennek gondolom megismételni a történeti háttérre vonatkozó kutatások eredményeit; l. — egyebek között — a lipcsei Hérakleitosz-kollokvium vonatkozó referátumait: Heraklit und seine Lehre. Sonderdruck aus der „Wiss. Zeitschr. der K. Marx-Univ.", Gesellschafts- u. Spr. w. R. Heft 3/1962.

[12] L.: *Trencsényi-Waldapfel I.:* Aischylos. „Klasszikus arcképek" III. 13 k. Budapest 1964.

[13] Részletesen: *G. S. Kirk:* id. mű, 203 skk.

μάθησις, ταῦτα ἐγὼ προτιμέω) megjegyzi, hogy ez ellentétben áll az 54. fr. tézisével. Más lelőhely és antik kommentár híján, be kell vallanunk zavarunkat, s — legalábbis egyelőre — csak hipotetikusan merhetjük az egyéb töredékek értelmezéséhez is fontos 55. fr.-ot magyarázni. Az bizonyos, hogy a *μάθησις* főnév a püthagoreus *mathéma*-ra (elméleti stúdiumra) emlékeztet, s az érzéki megismeréshez — vagyis a látáshoz *(ὄψις)* és halláshoz *(ἀκοή)* képest — a tudás magasabb fokát jelöli. Amikor tehát Hérakleitosz azt mondja, hogy „mindazon dolgokat becsülöm többre, amikről látás, hallás, (elméleti) tudás van", de akár Hippolütosz, akár a már általa használt forrás „jóvoltából" marad titok, hogy minél becsüli többre — a viszonyítás találgatása helyett inkább a megismerési módok értékrendjére ügyeljünk: ebben ui. az érzéki megismerés és az elméleti absztrahálás ugyanolyan — vagy legalábbis erősen hasonlító — lépcsőzetességét kell látnunk, mint amelyet egyéb töredékeiben is hangsúlyoz (pl. B 107), szemben azokkal, akik ostobán, „barbár lélekkel" abszolutizálják az érzéki tapasztalást, mit sem törődve a mögöttes valósággal.[14] Ezért utasítja el „a valamennyi görögnél bölcsebb Homérosz" és a többi ember ismeretét az érzékelhető dolgokról *(τὴν γνῶσιν τῶν φανερῶν*, B 56), valamint — dühös nagyvonalúsággal — Hésziodosz, Püthagorasz, Xenophanész és Hekataiosz „észre nem tanító tudálékosságát" *(πολυμαθίη*, B 40). Ezért hangsúlyozza oly gyakran, hogy az érzéki megismerés csalóka, s csak az ész, az elméleti kutatás képes — az istenhez hasonlóan — a mindenféle viszonylagosságtól mentes lényeget megragadni. Ezt fejezi ki az a — Porphüriosz alapján Themisztiosznál idézett — tanítása is, hogy „a természet (= a lényegi valóság) szeret elrejtőzni" (B 123).

Mellőzzük most a többi részlet tanúságát, hiszen nem Hérakleitosz rendszerének a felvázolása a célunk, csupán támpontok keresése az 54. fr. analíziséhez: „*A láthatatlan összefüggés erősebb a láthatónál.*" Annyi máris kiviláglott, hogy a felületi jelenségek mélyén rejtőző lényeget kutatja, azt az objektív és valamiféle számszerűségben objektiválódó *logosz*-t, amelynek megértéséhez vajmi keveset ér az empiria — adekvát megragadásához *mathészisz*, *nusz*, az elvileg mindenki számára adott, de csak kevesek által elsajátított *logosz* szükséges. Az érzékszervek megismerő funkcióit a kiindulásra korlátozza, s önmagukban elégtelennek tartja, de még ezeket is rangsorolja (átgondoltabban, mint az 55. fr.-ban): „A szem pontosabb tanú a fülnél" (B 101 a).[15] — Ismerjük el azonban, hogy még mindig nem értjük pontosan az 54. fr.-ot. Valószínűtlen, hogy ezt Hérakleitosz csak afféle *bon mot*-nak szánta, az pedig bizonyos, hogy tétele *nem* zeneelméleti vonatkozású, mert *a)* a látást értékelve többre a hallásnál, nyilván a húrok megmérhető hosszúságában s arányában tételezi a zeneelmélet egzaktságát,[16] hasonlóan a püthagoreusokhoz, *b)* ami megmérhető, az eleve *φανερόν*, ő tehát nem ezt kutatja, hanem az

[14] Heves tiltakozása ellenére, Xenophanésszel rokon ismeretelméleti nézeteket vallott. Hadd említsem meg dolgozatomat: Az istenfogalom „bizonyítása" Xenophanésnél. Világosság, XI. (1970). Melléklet a dec.-i számhoz, 3 skk.

[15] L. *J. Werner* és *H. Barth* cikkeit a 11. jz.-ben említett gyűjteményben, 579., ill. 583 k. Nem gondolnám, hogy Hérakleitosz mondásában tudományos princípiumot kell feltételezni (vö.: „ha látom, hiszem . . . "), még kevésbé, hogy Hérodotosz (II 99; III 72, stb.) a filozófusok hatására emlegeti ugyanezt.

[16] *Szabó Á.* könyvének egyik legfontosabb érdeme, hogy új alapokra helyezi a görög zeneelmélet történetét és a matematikával való kapcsolatait; id. mű, 143 skk.

ennél „erősebb" (= jobb, értékesebb) összefüggést, amely egyetlen érzékszervünk számára sem hozzáférhető, csupán a *logosz* révén ragadható meg. Valamiféle misztikus tézist lássunk tehát a töredékben, amire éppen a misztikumot kereső Hérakleitosz-interpretációk hajlanak,[17] vagy kíséreljük meg inkább, hogy ennek az ízig-vérig racionális bölcsnek a mondását új nézőpontból világítsuk meg, a korabeli görög gondolkodás egyéb forrásait is hasznosítva az értelmezés valószínűsítéséhez?

G. S. Kirk kiváló kiadását felhasználva, az alábbiakban tekinthetjük át az újabb kutatásokat a „látható és láthatatlan összefüggés"-ről:[18]

Diels, Reinhardt, Gigon és Walzer az éjszaka—nappal, nyár—tél típusú kapcsolatot látja az előbbiben, a bonyolultabbat (esetleg az istent vagy a *logosz*-t) az utóbbiban; biztos — teszi hozzá Kirk —, hogy materiális kapcsolatok esetében a rejtett összefüggések az erősebbek, s lehet, hogy (Sandbach ötlete szerint) az 51. fr.-ban példázott feszültségek láthatatlanságára céloz Hérakleitosz, valószínűbbnek véli azonban, hogy az ellentétek egységének két fajtájáról van szó a szövegben (vagyis Reinhardt és Gigon felfogásához csatlakozik, mint amelyet legmeggyőzőbbnek tart): az egyiket közvetlenül és analitikus igény nélkül érzékeljük, a másik a felszín alatt húzódik meg. — Bármennyire tiszteljük is a klasszika filológia említett nagyságait, érveléseik aligha haladják meg a valószínűsíthető spekulációk szintjét.[19]

A „látható (érzékelhető, nyilvánvaló, megmutatkozó) összefüggés" értelmezésében próbáljunk a *φαν*-tő származékainak vizsgálatából kiindulni. A *φαίνω* vagy *ἀποφαίνω* ige a *δείκνυμι*-vel — mint matematikai-geometriai szakkifejezéssel — rokon tartalmú: a „megmutatás"-t, a mérési bizonyítás legegyszerűbb módját jelöli.[20] Továbbá: a praefixummal képzett *ἐπιφάνεια* főnévnek („előbukkanás, feltűnés, jelenés" stb.[21]) terminus technicusi jelentése: „valamely test lapja, felszín, síkidom",[22] az utóbbi esetben tehát az *ἐπίπεδον* szinonimájaként használatos, mint pl. Eukleidész egyik elveszett munkájának címében *(Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ)*. Honnan származik azonban ez a speciális jelentés, miképpen kapcsolódik a *felszín* vagy *síkidom* fogalma a megmutatás vagy megmutatkozás — a geometriai bizonyítás — szavához?

[17] *B. L. v. d. Waerden* és *Szabó Á.* műveiben nyoma sincs „misztikumnak", éppen ezér meglepő, hogy mindegyikük csupán egy-egy alkalommal — és akkor is mellékesen — említi Hérakleitoszt.

[18] *G. S. Kirk:* id. mű, 223 skk.

[19] Ugyanezt kell mondanunk *H. Fränkel* interpretációjáról is: „Mit der ‚verborgenen' ist gewiss diejenige tiefere Harmonie gemeint, in der sich die Prinzipien von Zwieklang und Einklang selbst einhellig zusammenfinden. Damit hat die Gegensatzlehre ihre dritte, und höschste, Stufe erreicht. Nicht nur das was in sein Gegenteil umschlagen kann (wie Wachen und Schlaf) ist mit diesem zu einer Einheit verkoppelt, oder das was von seinem Gegensatz her sein Wesen empfängt (wie das Gute vom Schlechten), sondern auch das Prinzip der Harmonie selbst ist nicht ablösbar von dem der Gegensätzlichkeit." Dichtung und Philosophie des frühen Griechentums. München 1962, 430.

[20] *Ch. Mugler:* id. mű, 80. 113 k.; *Szabó Á.:* id. mű, 246 skk.

[21] Fontosnak gondolom, hogy első jelentésében elvont fogalmat jelölt, ugyanúgy, mint a hasonlóképpen képzett bármely más főnév (vö. *P. Chantraine:* La formation des noms en grec ancien. Paris 1933, 86 skk.), s a konkrét vonatkozás csak ebből (tehát a „megmutatkozás, láthatóság" stb. értelemből) alakult ki.

[22] A fontosabb lelőhelyeket bármely jó szótár *(Pape, Liddel & Scott* stb.) megadja, a geometriai vonatkozásokat pedig: *Ch. Mugler:* id. mű, 197 k. A praesokratikusoknál való előfordulásait — ugyanilyen jelentésekkel — a VS III. indexe sorolja fel.

A görög méréstudomány alapvetően fontos — az i. e. V. században tudatosított, de korántsem előzmények nélküli — problémája húzódik meg a háttérben: az a probléma, hogy adódnak a mérésben olyan feladatok, amelyeket számokkal (egész vagy arányként kifejezett törtszámokkal, tehát aritmetikailag) lehetetlen megoldani, síkmértani ábrázolással (körzővel és vonalzóval, tehát geometriailag) viszont lehetséges. Nem más ez, mint az irracionális szám — pontosabban fogalmazva: a mértani eszközökkel szerkesztett, négyzetgyök nagyságú szakasz — felfedezése, azé a mennyiségé, amely abszolút pontosan ábrázolható, de számszerűen „kimondhatatlan".[23] Ezért alapproblémája a síkmértannak a mértani közép szerkesztése, amelynek segítségével „nem hasonló" számokat — tehát, ha négyszögként ábrázoljuk őket, oldalaikat tekintve nem azonos arányú számokat — is „hasonlókká" lehet változtatni, olyan síkokat szerkesztve, amelyeknek van közös osztójuk;[24] ugyanígy lehetséges szakaszként felfogott egész számokból olyan négyzeteket szerkeszteni, amelyeknek a területe változatlanul egész számú egység, oldalaik hosszúsága viszont „kimondhatatlan". A *megmutatás* módszere így olyan eredményekre vezet, amelyek aritmetikailag legföljebb megközelíthetők, de árnyalatnyira mindig pontatlanok maradnak.

A számszerű megközelítésben csodálatos technikájú egyiptomi és babilóniai méréstudomány[25] megelégedett magával a minél tökéletesebb megközelítéssel: a bizonyítás és — ezzel együtt — a geometriai egzaktság az a görögök által megteremtett többlet, amely nemcsak a számolás eredményeiben hozott újat — ez sem megvetendő, de elvileg másodlagos fontosságú —, hanem a gondolkodás egész módszerében. Mielőtt ezt a témát folytatnánk a „látható összefüggés" interpretációjához, egy sejtést kívánunk jelezni és az aritmetika vagy a geometria prioritásának kérdésében állást foglalni:

Sejtésünk — amelyet semmiféle szöveggel igazolni nem lehet, hiszen Püthagorasz korából nincsenek erre vonatkozó források — a geometrizálás kezdeteire vonatkozik. Úgy tűnik, hogy maga a módszer szorosan összefügg a Püthagorasz-tétel megfogalmazásával. A minél pontosabb számolás gyakorlati igénye vetette fel a problémát: hiába ismerték egy derékszögű háromszög befogóit, rendkívül ritka eset volt, hogy az átfogót is meg tudták mérni — a 3, 4, 5 vagy 5, 12, 13 oldalnagyságú háromszög sokkal inkább tűnt örvendetes kuriozitásnak, mint gyakori esetnek. Rá kellett döbbenniük, el kellett ismerniük, hogy hiába van meg a számszerű pontosság igénye, képtelenek kiszámítani egy olyan derékszögű háromszög átfogójának a hosszúságát, amelynek a befogói — mondjuk — 2 és 5, vagy pedig 1 és 4 láb hosszúak, nem is szólva arról a reménytelen kísérletről, hogy bármely négyzet átlóját számmal fejezzék ki. A — valószínűleg jóval Püthagorasz előtt megkonstruált — Püthagorasz-tétel zseniális újszerűsége elsősorban abban állt, hogy új módszert fogalmazott meg; a csak nagyon-nagyon ritkán eredményes méricskélés helyett a befogókra és az átfogóra emelt négyzetek területét viszonyította egymáshoz ($a^2 + b^2 = c^2$), s ezzel egy csapásra megoldotta a feladatot: ha az oldalak összemérhetetlenek is, a velük szerkesztett négyzetek területe összemérhető, s ezt geometriailag bizonyítani lehet.

Az aritmetika vagy geometria prioritásában és értékelésében kívánunk *állást foglalni*.— Szabó Á. szerint a görögök elvileg mindig az aritmetikát becsülték

[23] *Szabó Á.:* id mű, 40 k., 114 skk.
[24] *B. L. v. d. Waerden:* id. mű, 256 k., 261.
[25] Kitűnő összefoglalást ad *B. L. v. d. Waerden* idézett művének I—III. fejezete.

többre.[26] Ez a megállapítás túlságosan sommásnak tűnik, s bizonyos korrekcióra szorul. Feltétlenül helyes, ha a püthagoreusokra vonatkozó forrásokat, Arkhütaszt (VS 47 B 4) vagy Platónt vesszük figyelembe, sőt (a második részben igyekszem majd kimutatni) érvényes Hérakleitoszra is; ennek ellenére két, jól megkülönböztethető szakaszra oszlik a korai görög matematika: a síkmértan kidolgozásában a geometriát illeti elsőbbség, a térmértan viszont már olyan problémákat vet fel, amelyeket csak „láthatatlan", geometriai eszközökkel és módszerrel megkonstruálhatatlan összefüggésekben lehet elgondolni. A geometria meghaladása nem merül ki a tagadásban, hanem a sztereometria elemeinek kombinálásával teremtik meg az új számítási eljárásokat, inkább algebrai, mint aritmetikai jelleggel. — R. Schottländer szerint[27] az ó-püthagoreus matematika úttörő teljesítménye, hogy a geometria és aritmetika egymásmellettisége helyébe az aritmetika elsőbbségét iktatta, csupán szemléltető jelentőséget tulajdonítva a geometria számára. — Az említett, alapjában megegyező felfogásokkal szemben, plauzibilisabbnak véljük H. Fränkel nézetét,[28] hogy a korai püthagoreusoknál a geometria és az algebra (e fogalom helyett inkább a „matematiká"-t javasolnánk) még elválaszthatatlan. Valószínű ez a korai egység már csak azért is, mert pl. az egyiptomi számolásban fel sem merült a geometria különösségének a problémája.[29] A két módszer különválásának kezdetét — fentebb vázolt sejtésünk szerint — mégis a Püthagorasztétel felfedezésének idejére datáljuk, de korántsem a geometria rovására, hanem épp ellenkezőleg, legalábbis egy bizonyos időpontig.[30]

Az egész kérdés szorosan kapcsolódik a számolás geometrizálásának és az irracionalitás felfedezésének vizsgálatához, amihez viszont — a pozitív bizonyítás előkészítéseként — kritikai kitérő látszik szükségesnek.

TUDOMÁNYTÖRTÉNETI KITÉRŐ

Áttekinthetetlenül gazdag szakirodalom foglalkozik „a görög felvilágosodás tudományával", nem utolsósorban a számolástudomány és az egzakt bizonyítást elvileg megalapozó logika összefüggéseivel.[31] Az egyéb ókori tudatszférák történetének megértésére is vonatkozik a platóni Akadémia — legendásan emlegetett — felirata: „A geometriában járatlanoknak tilos a belépés!" Nem célom, hogy a korai görög matematikának a Hérakleitosz-témán messze túl-

[26] *Szabó Á.:* id mű, 124 k., 416 skk. Részletekbe most nem bocsátkozom: a szövegelemzéseknek kell eldönteniük, hogy ez a szerző egész tudománytörténeti (és filozófiatörténeti) felfogásába illeszkedő tétel megállja-e a helyét. — Alapjaiban más, megítélésem szerint helyes szemléletű áttekintést nyújt matematika és valóság kapcsolatáról *G. Klaus/G. Kröber* értekezése: Mathematik und Philosophie in der Antike. WuW 69 skk.

[27] *R. Schottländer:* Früheste Grundsätze der Wissenschaft bei den Griechen. Berlin 1964, 29 skk.

[28] *H. Fränkel:* id. mű, 314 skk.

[29] *B. L. v. d. Waerden:* id. mű, 50.

[30] A lineáris inkommenzurábilitás tapasztalati felismerése, majd bizonyítása, még később pedig a négyzetben való kommenzurábilitás tudatosítása és a sztereometria új — a négyzetesítéssel megoldhatatlan — problémáinak felmerülése: mindez előfeltétele a „láthatatlan összefüggés" felismerésének és a „látható"-val szembeni magasabbrendűséget bizonyító tételeknek.

[31] *Szabó Á.* könyvének vonatkozó részein kívül (id. mű, 243 skk.), amelyek matematikatörténeti szempontok szerint tartalmazzák korábbi tanulmányainak eredményeit (a bibliográfiát lásd uo., 290.), elsősorban *Madarászné Zsigmond Anna* értekezése kíván említést, mint a deduktív tudomány kialakulásának jó analízise: A görög logika kezdetei. Logikai Tanulmányok. Budapest 1971, 187 skk.

mutató problémáiban mélyüljek el — azoknak a szövegeknek elemzésére korlátozódom, amelyek a harmóniaelmélet kialakulása szempontjából tetszenek fontosnak.

Három monumentális mű segíti útba a „geometriában járatlan" filológust a kutatás során. *B. L. van der Waerden* világhírű munkája — részint önálló eredményeit összegezve, részint a nagy elődök (elsősorban a praehellén tudományok titkait megfejtő O. Neugebauer) megállapításait hasznosítva — az egyiptomi, babilóniai és görög matematika több évezredes történetét világítja meg, az időben párhuzamos asztronómia vizsgálatához is alapul szolgálva. — *Ch. Mugler* hasonló rangú geometriatörténeti szótára nem csupán hatalmas anyagot kínál, hanem a sok ezer fogalom előfordulási helyeinek indokolt mélységű interpretálásával és a legfontosabb szakmunkák említésével rendszerezi szóértelmezéseit. Ezt a szó szoros értelmében nélkülözhetetlen lexikont különösen Platón „Theaitétosz" című dialógusának elemzésénél tudtam haszonnal tanulmányozni; a mű egészét megillető csodálathoz képest igazán mellékes, hogy egyes kérdésekben (pl. Theaitétosz tudománytörténeti jelentőségének megítélésében, a dünamisz-fogalom és az ezzel jelzett arányok értelmezésében) mások nézetét osztom vagy esetleg különvéleményt igyekszem kialakítani. — *Szabó Á.* kötetéről méltán állapította meg a kritika, hogy a modern magyar ókortudomány büszkeségei közé tartozik. Másfél évtizedes kutatásokat összegező munka, amelyből nemcsak lehet, de kell is tanulniuk mindazoknak, akiket az ókori gondolkodás problémái foglalkoztatnak.[32] Új módszert alapozott meg a matematikatörténet kutatásában, amely rendkívül fontos és új eredményeket hozott; meggyőzően bírálja a hibás nézeteket, származzanak bár a tudománytörténet klasszikusaitól, s csak tragikus véletlen lehet, hogy Ch. Mugler lexikonát nem hasznosította (pl. a *δύνασθαι* ige történetének feltárásában). A Platón előtti matematika rekonstruálása — könyvének első, az arányelmélet további vonatkozásainak vizsgálatához is alapul szolgáló része — mind tárgyi, mind metodikai vonatkozásban oly jelentős, hogy a gondolatmenet kivonatolását (egyes kritikai észrevételek vázolásával együtt) saját elemzéseimhez is kiindulásnak tekintem:

Meg kell magyarázni, hogy a *δύναμις* főnév miért jelent a görög geometriában „négyzet"-et, s hogy e kifejezés a Platón előtti időkből való (15 k.).[33] P. Tannery értelmezésének (*dünamisz* = négyzet és négyzetoldal) bírálata (17 skk.) jogos és meggyőző, bár (vö. 85.) a később interpretálandó Platón-részletben Thaitétosz csakugyan kettős értelemben használja a szót, ami nemcsak Tannery, de mások tévedését is megalapozta; hadd jegyezzem meg már itt, hogy a „dünamisz = négyzetoldal vagy négyzetgyök" értelmezést egyetlen más görög szöveg sem igazolja, indokolt tehát B. L. v. d. Waerden fordításának („erzeugende Kraft, Erzeugung", 19.; lásd előző jegyzetemet is) cáfolata. A *dünamisz* számtani-mértani fogalma valószínűleg az i. e. V. sz. közepe táján élt khioszi Hippokratész előtti korból való (30.), amiképpen a

[32] Vö. 2. jz. — *P. H. Michel* monográfiájával nem foglalkozom részletesen, csupán a „Theaitétosz" és az „aranymetszés" kapcsán fogok rá hivatkozni.

[33] Matematikatörténeti szempontból is gyümölcsöző ugyanakkor a fogalom arisztotelészi értelmezésének vizsgálata (ellenkezőleg: *Szabó Á.*: id. mű, 22. és 44.), egyebek között a *δυναμένη* („négyzetben értendő szakasz") kifejezés kapcsán. *K. Bärthlein*, noha a Tannery-elmélet híveként érti félre a *δύναμις* „négyzet, négyzetérték" jelentésének kialakulását, mind az arisztotelészi átértelmezés, mind a későbbiek szempontjából tanulságos megállapításokra jut: Verhältnis des Aristoteles zur Dynamislehre der griechischen Mathematiker. RhM (NF) 108, 1965, 35 skk.

mértani közép szerkesztése és — ennek közvetlen következményeként — a lineáris inkommenzurábilitás felfedezése is az ó-püthagoreus időre datálandó (32 k.). A *dünamisz* és a *dünaszthai* fogalmáról: „négyzet, négyzetértékben egyenlő"; az igét ebben az értelemben csak akkor használták, ha egy négyszögnek azonos területű négyzetté való átalakításáról volt szó (43 skk.).[34] E kifejezés a kereskedelmi nyelvből származhatott, ahol (Xenophón, Démosztenész és Plutarkhosz egy-egy mondatának tanúsága szerint) átszámítási egyenértéket vagy általában értéket jelölt (46.), a matematikai jelentés azonban speciális, semmi köze a köznapi nyelvhez; „der mathematische Begriff *δύναμις* und die Ableitung dieses Wortes aus der Finanzsprache *haben mit der Praxis, mit dem alltäglichen Leben gar nichts zu tun.* Die Ausdrücke *δύνασθαι* und *δύναμις hat nur die theoretische Geometrie in dem erklärten Sinne benutzt*" (47.).[35] Platón „Theaitétosz" című dialógusának (illetve a 147 C — 148 D rész-

[34] Ennek a műveletnek csak geometriai értelme volt. A számolás (az aritmetika) semmit nem nyert azzal, hogy pl. a 16 . 1 vagy 8 . 2 láb oldalú téglalapot 4 . 4 láb oldalú négyzetté szerkesztettek át, s már csak ezért sem értem a „*dünamisz* = egy négyszög négyzetértéke" felfogást, arról nem is szólva, hogy soha nem egy négyszög, hanem valamely négyzetoldal négyzetértékét fogja jelölni a *δύναται* és a *δυναμένη* alak — nem pedig a *δύναμις* főnév! —; a téglalapszám területű négyszögek — amilyen pl. a 3 . 1, 5 . 1, 6 . 1 = 3 . 2 vagy 2 . 3 láb oldalú téglalap — négyzetté való átszerkesztése is *negatív* tanulságot hozott az aritmetika számára: kiszámíthatatlanná vált, ami addig kiszámítható volt (ti. az idom oldalának hosszúsága); a mértani bizonyosságot alkalmazták az új számfogalomra („négyzetben értendő"), de ezt a bizonyosságot nem egy „négyszög négyzetértéke", hanem „valamely szakasz és az abból szerkesztett négyzet közötti egyenérték" felfedezése szolgáltatta.

[35] Nem tudni, hogy e tételével a praxisnak, valamint valóság és gondolkodás viszonyának vulgármaterialista felfogása vagy a dialektikus materializmus ellen kíván fellépni a szerző. Az *előbbi* esetben nincs elvi nézeteltérésünk, s valóban csak helyeselni lehet, hogy korábbi sejtését — miszerint a *dünamisz*-fogalom valamiképpen a földmérés gyakorlatához kapcsolódott (Math. Lapok XIV. 1963, 277 skk. ~ Maia [NS] XV. 1963, 219 skk.) — legalább hallgatólagosan revideálta. Az *utóbbi* esetben, amit a könyv tendenciája látszik valószínűsíteni, reménytelennek tűnik a vita — csaknem hatvan esztendővel a „Filozófiai füzetek" után; sokkal inkább és őszintén sajnáljuk, hogy *W. Jaeger* filozófiatörténeti szemléletéhez csatlakozik, aki szerint már az ión filozófia is „a tiszta kutatásából származott" (Paideia. I. Berlin 1959, 230.). — Nem ritka jelenség a tudományos terminológiák történetében, hogy egy bizonyos ponton elszakadnak a közhasználattól és a mindennapi élettől, mint pl. a görög *αἰών* vagy a latin *saeculum* fogalom; a XV—XVI. századi orosz nyelvhasználatban kimutatható kettősségről, a gyakorlati számolás és az elméleti matematika ugyanazon számegységeket egészen másképp értő terminológiájáról lásd *D. Sz. Lihacsov:* Oroszország kultúrája a reneszánsz hajnalán. Budapest 1971, 33. Ezek az „elszakadások" azonban éppúgy nem véletlenül vagy mennyei parancsra következnek be, mint ahogy egyáltalán az emberi gondolkodás és fogalomképzés sajátságait sem lehet elszakítani a társadalmi gyakorlattól: viszonylagos függetlenségének, az érzéki-konkrét megismeréstől való távolodásának és öntörvényűségének elismerése nem ment fel bennünket a gondolkodástörténeti folyamatok és ugrópontok konkrét vizsgálata alól. Metodikai példaként említem *G. Redlow* könyvét (vö. 1. jz.), ha egyes kérdésekben — elsősorban Parmenidész filozófiájának megítélésében — különbözik is a véleményünk, valamint *G. Klaus/G. Kröber* tanulmányát (lásd 26. jz.). Ellenkezőleg *Ch. Mugler*, aki a görög geometria idealista koncepciója mellett foglal állást, a következők alapján: „Le géomètre grec ne reconnaît qu' exceptionnellement des construction dans le sens que nous attachons à ce terme, c' est-à-dire dans le sens de la réalisation progressive d' une figure au moyen de lignes et de points ajoutés successivement aux lignes et aux points qui constituent les données primitives du problème. Pour le géomètre grec la figure, même si ses propriétés sont encore à démontrer, préexiste à toute intervention humaine, et la construction d'une figure est pour lui bien plus la prise en considération successive de parties de la figure existant indépendamment de lui que la création de ces parties par des opérations qui sont son oeuvre." (Id. mű, 19.) Szükségesnek látszik két kérdés különválasztása: (1) a praeexis-

nek) a fordítása és értelmezése, ami — a szerző felfogása szerint, de dolgozatom következő fejezetében cáfolandó érveléssel — az említett fogalommagyarázatot igazolja, sőt azt is, hogy e fogalmakat Platón korának művelt emberei ismerték és gyakran használták (48 skk.). A kései ókorban is így használta Simplicius és Athénaiosz (55.), Eukleidész azonban soha, amiképpen a „négyzet"-et sem jelölte a *dünamisz* főnévvel, csak az ebből származó *δυνάμει σύμμετροι* és *ἀσύμμετροι* megjelölést alkalmazta (56.). A „négyszög" görögül: *τετράγωνον σχῆμα*, a *δύναμις* a négyszögből azonos területtel szerkesztett négyzetet jelölte (= „*Quadratwert eines Rechtecks*", 57.). Ez az átszerkesztés („*tetragóniszmosz*") a terminus technicusnak időbeli előzménye, és — Arisztotelész bizonysága szerint — a (mértani) közép feltalálásához kapcsolódik (57 skk.). A mértani közép (közbülső arány, „mittlere Proportionale") értelmezése Eukleidész alapján; a tetragóniszmosz legáltalánosabb formája: „egy adott egyenes vonalú síkidommal azonos négyzet szerkesztése" (*Elem.* II. 14); a „hasonló" és „nem-hasonló" számoknak és geometriai ábrázolásuknak interpretálása (60 skk.). Eukleidész-szövegekkel igazolja, hogy az első lépés a „hasonló számok" mértani középarányosának konstruálása volt, amit viszonylag későbbi időpontban követett (*Elem.* VI. 13) az általános érvényű mértani szerkesztés, a lineáris inkommenzurábilitás és a *δύναμις* fogalmának bevezetésével együtt (65 skk.). Theodórosz matematikaórájának rekonstruálásában cáfolja a 2, 3, 5 . . . 17 nagyságrendű négyzetek szerkesztésére vonatkozó korábbi nézeteket (69 skk.): a kürénéi mester — az eukleidészi *Elem.* VI. 13. és 17. tételeinek felhasználásával[36] — négyszögeket (téglalapokat) alakított át azonos területű négyzetekké (73.), vagyis egész számokból indult ki és ezekhez szerkesztette azokat a dünamiszokat, amelyeknek a területmértéke ugyanezen számoknak megfelelt[37] (74.). A Platón-szövegben mellékes bizonyítás (ti. a négyzetek kommenzurábilitását tekintve) Eukl. *Elem.* VI. 17., majd VIII. 18. és 20. tézisei szerint folyt le: a három „négyzetszám" (4, 9, 16) kivételével, valamelyikről kimutatta Theodórosz, hogy egyik sem bontható fel olyan tényezőkre, amelyek a maguk részéről „hasonló síkszámok" lennének (76 skk.). A platóni Theaitétosznak egyetlen saját matematikai felfedezést sem tulajdoníthatunk (79 k.), sőt, szóhasználata is pontatlan: a „négyzetszámoknak" megfelelő

tentia gondolatát a püthagoreusok és főképp Platón alapján vázolja, amit nem lehet abszolutizálni (pl. Arisztotelész korántsem így képzelte el a számok vagy ideák és a valóság viszonyát), (2) valóban voltak olyan, pusztán logikailag megkonstruált geometriai tételek, amelyeket vagy nem akartak — mert már szükségtelennek tartották a vizuális igazolást —, vagy nem tudtak figurálisan bizonyítani, elsősorban a sztereometriában; a görög matematika korai szakaszát viszont — pontosabban: a síkmértannal foglalkozó fázist — még igenis a közvetlen megmutatás igénye jellemezte, nemcsak a püthagoreus „mathéma"-k, de még a theaitétoszi gondolkodás szintjén is.

[36] A *tetragóniszmosz* ismerete valóban nélkülözhetetlen volt, s a négyzetté alakítás geometriai eljárását tekintve nincs különbség az *a* hosszúságú szakasz és az *a* . *1* oldalú téglalap — mint kiindulás — között. A továbbiakban igyekszem majd igazolni, hogy mégis a számok szakaszban való ábrázolását kell a szerkesztés és a bizonyítás kulcsának tekinteni. A „szakasz-számok", „síkszámok", „térszámok" értékrendje is erre mutat a Szpeuszipposzból merítő hagyományban (Theolog. arithm. p. 74 = VS 44 A 13).

[37] „Zu den Zahlen konstruierte er jene *dynameis*, deren Flächenmässe denselben Zahlen entsprachen. Wurden aber die ganzen Zahlen im Sinne der alten pythagoreischen Arithmetik nicht eben als *Rechtecke* geometrisch dargestellt?" (Uo.) Nem okvetlenül: az előbbi jegyzetben említett osztályozás szerint nyilván a prímszámokat kell „szakaszszámoknak" tekinteni; ezeknek külön csoportba való sorolása már Philolaosznál valószínű (VS 44 B 20).

dünamisz-ok oldalát nem *μῆκος*-nak, hanem *μήκει σύμμετρος*-nak kellett volna mondania (82 k.);[38] hanyagul használja a *δύναμις* szót is (vö. 17. !), amely csak geometriai négyzetet (az idom területét) vagy négyzetértéket jelölhet: elnagyoltan rövidíti le a *δυνάμει σύμμετρος* kifejezést (85 skk.). A négyzetben való kommenzurábilitás nem Theaitétosz felfedezése (89 k.), hanem Platón előtt-ről való, amit a „Politikosz" című dialógus (266 A 5 — B 7) tartalmilag, nyelvileg és hangulatilag is igazol[39] (90 skk.). Ugyanezt tanúsítja a „Politeia" egyik passzusa (VIII. 546 C 4—5) is (94.), ahol az inkommenzurábilis (= irracionális) mennyiség számszerű meghatározhatatlanságot jelent (vö. 114 skk.), s e mennyiség a maga négyzetértékében („négyzetre emelve") válik kommenzurábilissá. A *δυνάμει σύμμετρος* kifejezés pontos jelentése: a rá emelt négyzet szerint kommenzurábilis (97.). Theaitétosz nemcsak tehetséges ifjú volt — ahogyan B. L. v. d. Waerden különben okkal állítja elénk; id. mű 271. skk. —, hanem naiv fiatalember is, aki sokszor téves, sőt együgyű válaszokat ad, aki izgatottságában hol bőbeszédű, hol kapkod (105 skk.) — pl. a *μῆκος* és a *δύναμις* főnevet is hol egyes-, hol többesszámban használja (109., 65. jz.). Az inkommenzurábilitás fogalma elméleti, nem gyakorlati eredetű (112 k.); a négyzetátló mérhetőségének problémája és a megoldás lehetetlensége a négyzet megkettőzésének feladatával alapozódott meg (119 skk.), ami viszont a kocka megkettőzésének — a Hippokratész nevéhez fűzött „déloszi problémának" — elvi és időbeli előzménye. Jó, hogy az inkommenzurábilitás felfedezéséből az újabb szakmunkák már nem következtetnek a görög matematika válságára, de ennek nyomai — pl. B. L. v. d. Waerden műveiben — még ma is megtalálhatók,[40] pedig a görögök elvileg mindig az aritmetikát, nem a geometriát becsülték többre (124 k., 416 skk.): a lineáris inkommenzurábilitás felfedezése egyáltalán nem döntötte meg a „minden — szám" püthagoreus tanát, hiszen a *dünamisz* új[41] fogalmának bevezetésével bármely oldalú[42] négyzet területét számszerűen pontosan meg lehetett határozni (126.), a mérhetőség, ill. mérhetetlenség problémája pedig kezdettől fogva geometriai volt (127.). Hippokratész a síkmértanban már megoldott feladat analógiájára

[38] Ezt — meg kell vallanom — egyszerűen nem értem (vö. 84 skk. is): bármennyire hanyagul fogalmaz is Theaitétosz, nem tételezhetjük fel, hogy főnevet („hosszúság") használ jelző („hosszúság szerint összemérhető") helyett.

[39] Kétségkívül így van, de jegyezzük meg, hogy a *δύναμις* főnevet — a valóban laza „hatvány" értelmezésen belül — „második hatvány"-ként jelölte meg már *Fr. Ast* 1835-ben kiadott Platón-lexikona; nincs újdonság a „Politikosz" említett részének interpretálásában sem: a szójátékot is ugyanígy magyarázza az azonos kommentárokból merítő magyar fordítás szövege és jegyzete (Platon Összes Művei, II, Budapest 1943, 303., 374 k. Ford.: Kövendi Dénes). Érdekességként vö. még: *K. Reidemeister:* Das exakte Denken der Griechen. Hamburg 1949, 17.

[40] B. L. v. d. Waerden bizonyos interpretációinak és következtetéseinek indokolt bírálata ellenére, abban az ő álláspontjához csatlakozom, hogy a görög matematika *egy* szakaszában — az inkommenzurábilitás felfedezése és a sztereometria megalapozása közötti, bizonyára rövid időben, de úgy is mondhatjuk, hogy általában a síkmértani elméletekben — a geometriát illeti elsőbbség az aritmetikával szemben.

[41] Zavarba ejti az olvasót a datálás elbizonytalanodása: ezek szerint tehát új, mégsem az ó-püthagoreus matematikának tulajdonítandó fogalom a *dünamisz?* Vö. 137. is.

[42] Pontatlan általánosítás: a négyzet területét csak akkor lehetett és lehet számszerűen kifejezni, ha az oldala vagy egész, vagy négyzetgyök-szám — amit Theaitétosz nem tud és nem is tudhat, mert Theodórosz négyzetábrái szám (vagyis: egész szám) hosszúságú szakaszok átszerkesztéséből jöttek létre, s így — azokkal egyenértékben — a területüket is számmal lehetett jelölni.

kísérelte meg a megkettőzött köbtartalmú kocka oldalának kiszámítását (128 skk.).

A könyv lenyűgözően gazdag és sokrétű további részeiből — bár helyenként a már elmondottakat is variálják — kiváltképpen fontos még témánk vonatkozásában az alábbi részlet:

A mértani közép megszerkesztésének története és szoros kapcsolata a négyzet megkettőzésével, a vonatkozó eukleidészi tételek számbavételével, valamikorra Thalész után datálva (233 skk.).

E tematikus szempontú és ösztövér kivonat megközelítőleg sem adhat képet a mű egészéről vagy a bizonyítások rendkívüli alaposságáról, melynek révén a szerző — egyebek között — a zeneelméletnek a geometriát is megtermékenyítő felfedezéseiről s fejlődéséről vagy a deduktív matematika és az eleai filozófia kapcsolatairól nyújt alapvetően fontos s új eredményeket. Elődeinek és vitapartnereinek sok interpretációját — mint önkényes belemagyarázást — cáfolja meg, hangsúlyozva, hogy saját értelmezései hajszálpontosak, nem utolsósorban a *dünamisz*-fogalom esetében (a kereskedelmi nyelvből vették át; jelentése: *egyenérték* valamely téglalap és az azzal azonos területű négyzet között; szekundér jelentései: *négyzetérték, négyzet)*. Nem vitás, hogy — bár a fogalom ugyanezen jelentését már a korábbi szakirodalom is leszögezte — az értelmezés bizonyításában a filológiai akribeia mestereként jár el, s meggyőzően utasítja el P. Tannery itt-ott ma is követett fikcióját (ti. hogy *δύναμις* = potentia, puissance, erzeugende Kraft, erzeugendes Vermögen, power of producing, stb., *δυναμένη* pedig = la ligne qui peut, die Erzeugende).

Ez utóbbi vonatkozásban mégis féligazságúnak látom következtetéseit, azt pedig elsőrendűen fontosnak, hogy a vonatkozó „Theaitétosz"-passzus elemzését — akár elölről kezdve az egészet! — pontosabbá tegyük.

ÉRTÉK, EGYENÉRTÉK, NÉGYZETÉRTÉK

Nemcsak Athénaiosz és Simplicius, de a kései ókor számos más tudósa is „négyzet, négyzetszám, négyzetérték" jelentésben használta a *δύναμις* főnevet — pl. Diophantosz, Iamblikhosz, Papposz.[43] Az Eukleidésznél *(Elem.* X.-ben gyakran) előforduló *δυνάμει* dativus is csak annyit jelenthet, hogy „négyzetértékben", a „Politikosz" *κατὰ δύναμιν* fordulatához hasonlóan; a többi Platón-hely is azt igazolja, hogy a *δύναμις* = „négyzet, négyzetérték" fogalom már korábbról közismert lehetett, legalábbis a szakemberek körében. A jobbára dativusban halmozott, az i. e. V. századból gyakori antitézisek *(λόγῳ . . . ἔργῳ, νόμῳ . . . φύσει,* stb.) mintájára képzett *μήκει . . . δυνάμει* fordulat is azt tanúsítja, hogy a geometriai szaknyelvből szivárgott át a fogalom (ill. fogalompár) a laikus stílusba.[44] Magának a geometriai szakkifejezésnek

[43] Lásd *K. Bärthlein* id. cikkében, 43 k., 23. jz.

[44] Mulatságos példa a *toposz* tudálékos alkalmazására Aëtius egyik részlete: „Néhány püthagoreus szerint, akik közé Philolaosz is tartozik, földszerűnek mutatkozik a Hold, mert — akárcsak a mi Földünket — állatok és növények népesítik be, csak éppen nagyobbak és szebbek. Az ottani állatok ugyanis természetüknél fogva *(τῇ δυνάμει)* tizenötször akkorák, minthogy semmiféle salakot nem választanak ki emésztés közben, a nap pedig hosszúsága szerint *(τῷ μήκει)* ugyanakkora" (II 30, 1 = VS 44 A 20). Philolaosz valóban a *φύσις* és a *ἁρμονία* rokon fogalmaként használja a *δύναμις* főnevet, a *δέκας* s

az őse kétségkívül a kereskedelmi nyelv volt, amint Szabó Á. is többször leszögezi; emitt kiváltképp a *δύνασθαι* = „(valamennyit) érni" ige mutatja az „érték, csereérték, egyenérték" fogalmak közhasználtságát.[45] Nemcsak a pénzre (cserére) alkalmazták így az igét — archaikus jelentésében: „erősnek lenni", s valószínű, hogy az azonos súlyú fémeknek fizetési vagy kicserélési funkciójára is értették, majd a különböző *νόμισμα*-k általánossá válása után adtak az igének általánosabb és absztraktabb tartalmat—, egyéb, számszerűen (szorzatban) kifejezhető összehasonlítást is hasonlóképp jelöltek, pl.: *τριηκόσιαι γενεαὶ δυνέαται μύρια ἔτεα* (Hér. II. 142). Sőt, a „valamit érni" értelem elvontabban is magától értetődő az i. e. V. századtól kezdve (pl. Eur. Méd. 128; Ar. Pl. 842), akárcsak az *ἴσον* vagy *ταὐτόν* acc.-szal kapcsolva össze („ugyanannyit érni", pl. Ar. 553. fr.; Arist. Pol. V. 11,6), amikor természetesen az összehasonlított dolog kerül értelem szerinti esetbe (dat.-ba vagy *καί* kötőszóval kapcsolva).[46]

A *δύνασθαι* (ti. *ποιεῖν τι:* „valaminek a csinálására képesnek lenni") elliptikus forma használata Gorgiasznál azért érdekes, mert a „képességet" a vágy és cselekvés — tehát két távoleső, ha ugyan nem ellentétes[47] — motívumának közbülső láncszemeként alkalmazza, olyan funkcióban, amely különböző minőségek között tud adekvát viszonyt létrehozni: *εἰπεῖν δυναίμην ἃ βούλομαι, βουλοίμην δ' ἃ δεῖ* (VS 82 B 6). Ez a rétorikus játék az antitézisekkel csak azért érdemel figyelmet, mert egy másik, elvileg sokkal fontosabb kapcsolatban is előfordul az V. sz.-i prózában — nevezetesen a nyelvelméletben (ha ugyan nem vétek a közhasználatú fordulatokkal élő Hérodotoszt teoretikus spekulációval gyanúsítani!), különösen pedig a „szó" és „tett" (vagy: „valóság") szokványos antitézisében; ezekben a *δύνασθαι* — esetleg *ἴσον*-nal vagy hasonló más tartalmú szóval együtt — a „valamit (ugyanannyit) jelenteni" értelemben áll, a gyakorlati (gazdasági) érték fogalmától és a köznapi gyakorlattól tovább távolodva.[48]

Egy egyiptomi kifejezésről mondja pl. Hérodotosz: *δύναται κατὰ τὴν Ἑλλήνων γλῶσσαν* („a görögök nyelve szerint azt jelenti . . ."), azt jelezve, hogy *a mondás*

---

egyáltalán a számban megtestesülő *οὐσία* „természetének" és „erejének" jelzésére: köznapi szóval fejezi ki a misztikus tartalmat, nem törődve a főnév matematikai jelentésével (vagy talán nem is tudva arról??). Aëtius viszont összekeveri a kettőt, *toposz*-ként írja le a — különösen dat. formában — gyakori geometriai antitézist, noha semmiféle „négyzet"-ről vagy „második hatvány"-ról nincs szó: a holdbéli élőlények biológiai adottságait magyarázza a püthagoreus fantázia szerint, nem „tizenötszörös négyzetértékben" jelöli a nagyságukat.

[45] Ahogyan a *δυνατός* melléknév jelentése: „hatalmas, erős", az ige is — mintegy elliptikus kifejezésként — állhat *μέγα δύνασθαι* értelemben (vö. *C. J. Classen:* id. mű, 110 k.); arra azonban nincs példa — és ez P. Tannery *δύνασθαί τι χωρίον* elképzelésének cáfolata szempontjából fontos (vö. *Szabó Á.* id. mű, 19 k.) —, hogy főnévi acc. vonzata lenne az „egyenérték"-et jelölő fordulaton kívül.

[46] *Th. Heath* magyarázatát idézi *Szabó Á.:* id. mű, 45., 19. jz., rámutatva, hogy Arkhimédésznél (NB már előbb is, vö. *Ch. Mugler:* id. mű, 150 k.) „négyzetben értendő egyenlőség"-et fejez ki a *δυνάμει ἴσον* formulával szinonim ige. Épp a jelentés „ugrópontját" szükséges megtalálni.

[47] Vö.: Gorgiasz B 8; 11 a 2; 11 a 5; 11 a 13; stb.

[48] Platón „Kratülosz" c. dialógusában természetszerűleg szolgál az ige betű és hangérték kapcsolatának (egyenérték-lehetőségének) jelölésére (424 B —C), hiszen az egész vita középpontjában az a már Gorgiasz által is vizsgált probléma áll, hogy a nyelv képes-e adekvátan kifejezni a tudattartalmat, a tudat pedig adekvátan tükrözni a valóságot. Platón azonban nem „teremti", hanem ismeretelméleti síkra terjeszti ki az igének ezt a jelentését.

formája megváltozott, de a tartalma ugyanaz maradt (II. 30; pontosan ugyanígy: IV. 192, valamint Thuk. VII. 58).[49] Immár nem egyik szót a másikkal, hanem a cselekvéssel kapcsolva össze: *τὸ πειρηθῆναι τοῦ θεοῦ καὶ τὸ ποιῆσαι ἴσον δύνασθαι* („ugyanannyit ér az isteni jóslat kérése, mint a cselekvés", Hér. VI. 86, 3). Hasonlóképpen Thuküdidész: *τὴν αὐτὴν δύναται δούλωσιν ἥ τε μεγίστη καὶ ἐλαχίστη δικαίωσις* („egyforma szolgaságot jelent a legnagyobb és a legkisebb megbecsülés", I. 141); *αἱ ἀγγελίαι τοῦτο δύνανται* („a híresztelések ezt jelentik", s itt nem valamiféle grammatikai magyarázat következik, hanem a híresztelések rejtett tartalmának és céljának az elemzése, a szavak szembesítése a valósággal, *az első pillantásra nem látható, felszín alatti lényeg* kutatása, *a tényleges érték* keresése, amely — akár egyszerű hazugság vagy félrevezetési szándék, akár „a silányabb ügyet erősebbé tevő" szofisztika hatására — nem okvetlenül azonos a látszattal; VI. 36); ezért is biztathat egy szónok arra, hogy a feladat: *τοὺς λόγους ὡς ἔργα δυναμένους κρίνειν* („megítélni, hogy a szavak ugyannyit érnek-e, mint a tettek", vagyis megfelelnek-e a valóságnak; VI. 40, 2).

A *δύναμις* főnév („erő, hatalom, termőerő, képesség") is használatos a „pénzérték"[50] jelölésére, bár a IV. századtól inkább az *ἀξία* főnévvel jelölik e fogalmat. Thuküdidész — éppen a nemesfémeknek vagy általában a pénznek csereeszközként való használata alapján, a más-más minőségű értéktárgyak *egyenértékesítési lehetőségét*, vagyis *közös egység szerinti átszámítását* magától értetődő gyakorlatnak tudva — írja pl., hogy az aranyban s ezüstben befolyt adók összege *τετρακοσίων ταλάντων ἀργυρίου δύναμις* volt („értékük 400 ezüst talentuméval volt azonos"; II. 97, 3). S hogy a főnév esetében milyen nyomatéka volt a *valódi* és a *látszólagos* érték szembeállításának — a *δύναμις* természetesen az előbbit jelölte —, azt egy másik Thuküdidész-hely tanúsítja: az egesztaiak, hogy vagyoni helyzetükről tévesen tájékoztassák az athéni követeket, elvezetik őket az Aphrodité-templomhoz, s a szent adományokat — csészéket, kannákat, füstölőket — fitogtatják, *ἃ ὄντα ἀργυρᾶ πολλῷ πλείω τὴν ὄψιν ἀπ' ὀλίγης δυνάμεως παρείχετο* („amelyek ezüstből készültek, s így látszatra sokkal többet mutattak, mint amek kora a valójában kicsiny értékük volt"; VI. 46,3). Az efféle ügyeskedés hátterében persze nem kell holmi ismeretelméleti tudatosságot sejteni (a *δόξα* és *ἀλήθεια* eleai antitézisének ismerete nélkül is lehet csalni), de mind a *δύνασθαι* ige, mind a *δύναμις* főnév hérodotoszi-thuküdidészi használata — tehát a közérthetőséget feltételező, legalábbis lexikailag a kortársi nyelvhez alkalmazkodó szövegek terminológiája — igazolja, hogy V. századi jelentésük a „pénzérték, csereérték, valóságos (akár más formában is kifejeződő, akár a látszatnál kisebb vagy nagyobb, de mindenképpen valós) érték" tartalmakkal bővült.

Hadd emeljük ki ismét a változó (vagy: megváltoztatott) forma és ugyanazon tartalom dialektikáját, ami egyfelől a különböző értékeket egyenértékben kifejező — bár természetesen poliszok szerint más-más — pénznemek funkciójának, másfelől szó és valóságos tartalom összefüggéseinek felismeréséből fakadt. Ismeretelméleti árnyalatot is kapott a felismerés — amiben nem mellékes szerepe lehetett a szofisták nyelvelméleti spekulációinak —, s ez részint

[49] Ugyanígy a *δύναμις* főnév is, pl. Plat. Krat. 394 B, Politeia III 20,5; Lys. 10,7; Dém. 9,16; stb. Amikor pl. Clemens Alex. (Strom. V 104,3) Hérakleitosz egyik töredékét idézi, ezzel a fordulattal vezeti be kommentárját: *δυνάμει γὰρ λέγει ὅτι κ.τ.λ.*, vagyis: „más szavakkal (más formában) ugyan, de valójában azt mondja, hogy . . . " *(G. S. Kirk* fordítása, ti. *in effect*, lényegileg helyes, bár az árnyalatot nem adja vissza; id. mű, 325.)

[50] Általában „érték" jelentéssel pl. Xenophónnál: Kyr. VIII 8,14; Oik. 16,4; Vect. 4,1.

az „érték"-fogalom kiterjesztésében és absztrakciójában, részint a közvetlen-érzéki látszat és a mögöttes, rejtett, de kibontandó és kibontható[51], valódi tartalom (érték) szembeállításában fejeződött ki. Csak nagyjából igaz tehát az az állítás, hogy a matematika *δύναμις* fogalma a kereskedelmi nyelvből szüremlett át az elvont tudományába: az „egyenérték" vagy „más formában megjelenő, de azonos érték" fogalmát nem a pénzváltók asztalainál, hanem Szókratész és Theodórosz körében ismerhette meg az ifjú Theaitétosz is.

Ez azonban még csak az igazi probléma küszöbéig vezet bennünket — annak vizsgálatához, hogy az „érték" és „egyenérték" fogalmából miért és hogyan alakult ki az *ezzel korántsem azonos jelentésű* matematikai fogalom, tehát a *δύναμις* „négyzetérték, négyzet" jelentése, ami az *ἐπιφάνεια* és a „látható harmónia" értelmezésével is összefügg. Kétségtelen, hogy legfontosabb forrásunknak, Platón „Theaitétosz" című dialógusának elemzésében s egyáltalán a kérdés megválaszolásában Szabó Á. filológiai módszerét kell követnünk, és az is, hogy az ő alapgondolata — tehát hogy a „négyzetérték" fogalom hátterében valamiféle „egyenértékűség" húzódik meg — lényeges igazságot tartalmaz. Minuciózus aprólékossággal kell elemeznünk a szöveget (*Theait.* 147 C — 148 D), s ugyanígy elkerülhetetlen a részletes vita is. Íme, először is a görög szöveg:

Ῥᾴδιον, ὦ Σώκρατες, νῦν γε οὕτω φαίνεται· ἀτὰρ κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς ἡμῖν ἔναγχος εἰσῆλθε διαλεγομένοις, ἐμοί τε καὶ τῷ σῷ ὁμωνύμῳ τούτῳ Σωκράτει.

Τὸ ποῖον δή, ὦ Θεαίτητε;

Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων, ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο· ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πᾶσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

Ἔμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

Λέγε.

Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι, τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

Καὶ εὖ γε.

Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

Κάλλιστα· ἀλλά τί τὸ μετὰ τοῦτο;

Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰδόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις, ἃ δύνανται. Καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

Ἀριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες· ὥστε μοι δοκεῖ ὁ Θεόδωρος οὐκ ἔνοχος τοῖς ψευδομαρτυρίοις ἔσεσθαι.

Az interpretáció bevezetéséül látszik szükségesnek néhány megjegyzés:

[51] Ez természetesen nem vonatkozik az érzéki és racionális megismerés dialektikáját tagadó vagy magát a megismerést is elutasító filozófusokra.

1. — Az idézett dialógusrészlet — amint ugyancsak Szabó Á. fejtette ki — szervesen és logikusan tartozik a mű egész gondolatmenetéhez: az ifjú Theaitétosz, miután nagy nehezen megértette, hogy Szókratész egy egészen közönséges dolog (a „sár") fogalmi meghatározását kívánja tőle,[52] elmeséli, hogy Theodórosz matematikaóráján ő meg a barátja (a szintén Szókratész nevű fiatalember) hasonló ötletre bukkant — arra ti., hogy mivel a *dünamisz*-ok mennyisége (száma) végtelen, e g y olyan valamibe kell őket összefoglalni, amivel (= amely fogalommal) valamennyit meg lehet nevezni.

2. — Hogy ezt a fogalmat megtalálták-e vagy sem, arról a továbbiakban szót sem ejt, s ezt igen bölcsen teszi, minthogy már maga a *dünamisz* (melynek az értelmezéséről alább szólunk) gyűjtőfogalom; ehelyett a s z á m o k osztályozásáról kezd beszélni: egyeseket négyzetben lehet ábrázolni (ezek „*képesek* arra, hogy egyenlőször egyenlők [egyenlő oldalúak] legyenek"), mint pl. a 4, 9, 16 stb., másokat („amelyek *képtelenek* egyenlőször egyenlők lenni", mint pl. a 3 és 5) csak téglalapként lehet lerajzolni. „Képes", ill. „képtelen": *δυνάμενος*, ill. *ἀδύνατος*! Az egész fejtegetés arra az ötletre és szójátékra épül fel, hogy a *képtelen* számokat is négyzetekké (*δύναμις*-okká) alakítják át, s ezáltal ezek is *képességet* kapnak — ti. arra, hogy a négyzetszámokhoz hasonlítsanak. Ami aritmetikailag megoldhatatlannak tűnt (ha valaki ragaszkodik a számokhoz, vagyis az egész számokhoz, akkor ezt képtelen megoldani), az geometriailag megoldhatóvá lett. Valami tehát mégiscsak eszébe jutott a két ifjúnak: a számok osztályzása után rájöttek az összefoglalás s a j á t o s lehetőségére! Különös, hogy — tudomásom szerint — senki nem vette észre sem a szójátékot, sem annak célzatát, azok sem, akik a „Politikosz" matematikai tréfáját megértették.[53]

3. — Kissé (?) gyanús azonban a fiatalemberek önállósága a felfedezésben. Szókratész persze dicséri Theaitétosz nekirugaszkodását és leleményességét, de egyáltalán nem hatódik meg az eredménytől, a terminológiai bravúrra rá sem hederít (valóban ezt tette volna, ha ifjú vitapartnere tudományos felfedezéssel lepi meg a társaságot?!), buzdítgató kérdéseiben pedig — hol az ámuldozásban, hol a hebehurgya stílus kicsúfolásában, amit persze Theaitétosz észre sem vesz — jellegzetes iróniája csillan fel. Még nyomatékosabban szól a két ifjú önállósága ellen Theaitétosz beszámolójának első mondata: Theodórosz nem — vagy nem kizárólag — négyzeteket rajzolt fel nekik, hanem „a négyzetekről valamit", s megmutatta, hogy legtöbbjüknek az oldala „összemérhetetlen az 1 lábnyi egységgel", vagyis egész vagy tört számban kifejezhetetlen. De hát feltehető-e, hogy a kürénéi professzor nem volt tisztában a probléma másik vonatkozásával, azzal, hogy területükben ezek a négyzetek igenis összemérhetők a megfelelő (ti. terület-) egységgel? Nem, ez képtelenség, elsősorban nem pszichológiai alapon,[54] hanem mert ő maga számokkal — tehát az egység sokszorosaival — jelölte meg a négyzeteket.

4. — Azok a fordítók, akik a *δύναμις*-t *nagyjából* helyesen a „négyzet, négyzetérték" szavakkal tolmácsolják,[55] bámulatos nagyvonalúsággal fordítják a másik terminust, ti. a *πούς* főnevet és az ebből képzett melléknevéket (*τρίπους*,

[52] Ugyanolyan típusú feladatról van tehát szó, mint a korai Platón-művekben.

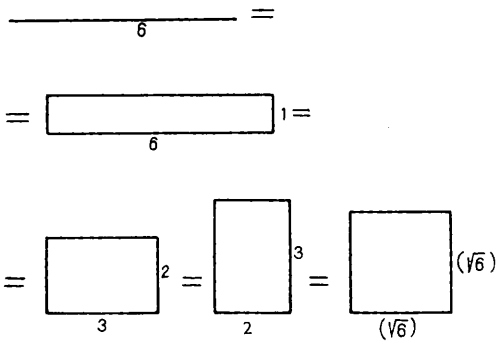
[53] Egyáltalán nem mellékes vagy véletlen tehát az ige köznapi jelentésű használata, ahogyan *Szabó Á.* véli: id. mű, 43., 13. jz.

[54] *Szabó Á.*: id. mű, 110 k.

[55] Akik tehát nem „négyzetoldal"-nak, „négyzetgyök"-nek, „nemzőerő"-nek stb. fordítják, s nem is „javítják ki" a szöveget a *δυναμένη* participiummal.

πεντέπους stb.): azt állítják, hogy Theodórosz három, öt stb. *négyzetláb* nagyságú négyzeteket rajzolt. Ez tartalmilag természetesen helyes, de nyelvileg egyáltalán nem, sőt önkényes modernizálás: a *πούς* főnév is, melléknévi származékai is *lábnyi* (három lábnyi, öt lábnyi stb.) nagyságot jelölnek — más szóval Theodórosz és tanítványai (és ez az interpretáció punctum saliens-e) *a hosszúságmértéket változtatás nélkül alkalmazzák területmértékként is.* Szemben tehát a babilóniai mértannal, ahol a területek mérésére sajátos egységet használtak (a *búr*-t, amelyet 30 *SAR*-ra osztottak, mindkét mértéket négyszögként fogva fel, melyeket rámértek — ráhelyeztek, legalábbis elméletben — a kijelölt földdarabra),[56] a görögök *valamilyen okból* szükségtelennek tartották a hosszúság- és területmértékek megkülönböztetését; egyáltalán, eszükbe sem jutott ez a differenciálás.[57]

5. — Ez a különösség indokolja, hogy ismét átgondoljunk egy másik kérdést: miképpen szerkesztette meg Theodórosz a demonstrációhoz szükséges négyzeteket? Theaitétosz ugyan kissé nyeglén szól erről („rajzolgatott nekünk valamit a *dünamisz*-okról . . . "), ámde pontos nagyságú négyzeteket nyilván nem lehet csak úgy vaktában rajzolgatni, hanem meg kell szerkeszteni.[58] Elképzel*hető*, hogy Theodórosz először 3.1, 4.1., 5.1, . . . 17.1 láb oldalú téglalapokat rajzolt fel, s a Thalész-tétel, valamint a hasonló háromszögek oldalarányossága alapján szerkesztette meg 3 és 1, 5 és 1, . . . 17 és 1 láb mértani középarányosát (a 4 és 1, 9 és 1, 16 és 1 középarányosával nem kellett bíbelődnie: a 2, 3 és 4 lábat egyszerűen felmérte); e mértanilag megszerkesztett szakaszok szolgálhattak az eredeti téglalapokkal egyenlő területű négyzetek oldalaiul, a területek egyenlőségét pedig a megfelelő oldalak arányba állításával igazolhatta — vagyis a 6 láb (= „négyzetláb") területű négyzeten illusztrálva:



1. ábra

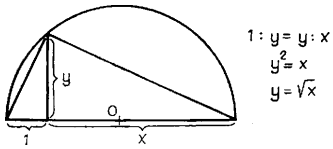
A négyzet oldalának hosszúsága — *modern, a görögök által nem ismert* mértékkel —: $\sqrt{6}$ láb. A mértani szerkesztés elve a Thalész- és Püthagorasz-tételre, valamint a hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányosságának tété-

[56] *B. L. v. d. Waerden:* id. mű, 106.

[57] Utaló megszorítást sem tartottak fontosnak, mint pl. a *τρίπους τὸ εὖρος* („szélességben három láb") fordulatban, Hér. III 60.

[58] *Szabó Á.* gondolatmenetének kivonatát a szerkesztés módjáról lásd dolgozatom előző fejezetében.

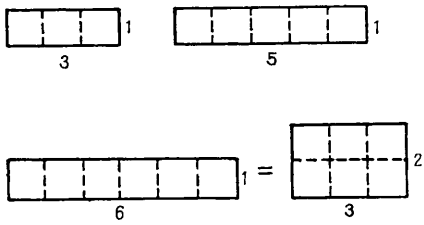
lére épül; ha egy adott szakaszt 1 egységgel meghosszabbítunk és az így nyert (meghosszabbított) szakasz köré körívet húzunk, majd az eredeti szakasz végpontjára emelt merőleges metszőpontját az átmérő két metszőpontjával összekötve derékszögű háromszöget rajzolunk, akkor e merőleges mértani középarányost képez az átmérőnek általa kimetszett két szakasza (tehát az eredeti szakasz és az 1 nagyságú szakasz) között. Ha tehát x nagyságú szakaszból akarunk „négyzetgyököt vonni", akkor az eljárás a következő:



2. ábra

Ugyanezzel az eljárással lehetett — eredeti példánk szerint — megtalálni azt a hosszúságot (vagyis a $\sqrt{6}$-ot), amely a 6 egység területű négyzetnek az oldala. Ezt a hosszúságot rá lehet mérni a számvonalra, de számmal kifejezni semmiképp sem — Theodórosz tehát könnyűszerrel megmutatta, hogy az ilyen négyzetek oldalai összemérhetetlenek az 1 láb hosszúságú egységgel *(lineáris inkommenzurábilitás)*.

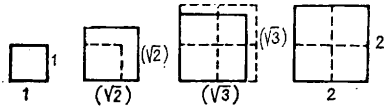
6. — Ez az eljárás, ismétlem, elképzelhető, de alapos meggondolások teszik valószínűtlenné — elsősorban az, hogy: miképpen bizonyította Theodórosz a kapott négyzetek összemérhetőségét az 1 láb (= „négyzetláb") területű egységgel *(négyzetes kommenzurábilitás)?* Igaz, Theaitétosz erről nem szól a beszámolójában, de más kérdés, hogy a matematikaóra anyagából mi foglalkoztatta az ifjakat, s megint más, hogy mit vagy miről „rajzolgatott" nekik a mester; az bizonyos — kiviláglik az idézett rész első mondataiból —, hogy ezt is megmutatta. Nem fogadhatjuk el azt a korábbi, kényelmes nézetet, hogy ez az eljárási fázis figyelmet sem érdemlően mellékes mozzanat a dialógusban, tehát mi se törjük rajta a fejünket. Nem sokkal visz előbbre azonban az a felfogás sem, hogy Theodórosz ezt már nem bizonyította, hanem rámutatva az újonnan nyert (szerkesztett) négyzetekkel egyenlő területű téglalapokra, amelyek *ab ovo* többszörösei a területegységnek, vagyis:



3. ábra

— kimondta, hogy ugyanez érvényes az új ábrákra is. A szemléltetéshez (mint a geometriai bizonyítás legegyszerűbb módjához) szokott ifjú tanítványok valószínűleg megkérték volna tanárukat, hogy — miután eddig is a megmuta-

tással *(ἀποφαίνων)* érvelt[59], illusztrálja nekik a négyzetes kommenzurábilitást is; ez azonban elvileg megoldhatatlan, hiszen a négyzetegység — éppen a lineáris inkommenzurábilitás következtében — csak a 4, 9, 16 típusú („négyzetszám" nagyságú) négyzetekre mérhető rá:



4. ábra

7. — További kételyem a „*δύναμις* = az azonos területű négyszögek (téglalapok) négyzetértéke" interpretációval szemben, hogy a vonatkozói mellékmondatok *(ὅσαι μὲν . . ., ὅσαι δὲ . . .)* először kitett, azután odaértendő állítmányának *(τετραγωνίζουσι) theaitétoszi* értelmezését elhomályosítja. Sajnos, oly homályosan fogalmaz a fiatalember, hogy elsősorban őt, nem pedig a filológusokat kell elmarasztalnunk a mondat zavarossága miatt — valóban szókratészi türelem kell okoskodásának megértéséhez . . . Mit is jelent ez az ige, illetve maga a *τετράγωνον* főnév? Először bizonyára mindenfajta négyszöget jelölt, később specializálódott a derékszögű négyszögek, végül pedig a négyzet jelölésére. E legutóbbi jelentésben használja már Platón (pl. *Menón* 82 B), majd Arisztotelész (pl. *De caelo* 306b 5) is, a püthagoreusoknak tulajdonítva a *τετράγωνον* — *ἑτερόμηκες* („négyzet — téglalap") ellentét megfogalmazását *(Met.* A 5. 986a). Így — tehát a négyzetnek mint síkidomnak a terminusaként, a *δύναμις* geometriai szinonimájaként — használatos a főnév a későbbi szakirodalomban is. Theaitétosz azonban még a derékszögű négyszög mindkét típusára — vagyis a téglalapra és a négyzetre — egyaránt alkalmazza a főnevet, az „egyenlő oldalú", illetve „hosszúkás" (= egyenlőtlen oldalú) jelző hozzátételével vonva meg a különbséget. A *τετραγωνίζω* igét is eszerint kell értelmeznünk („négyszögesíteni, négyszöggé formálni"), ügyelve arra, hogy mindkét vonatkozói mellékmondat alanya: *ὅσαι γραμμαί.* A fogalmazás persze kissé költői, hiszen nem maguk a „szakaszok", hanem az ezeket síkidomokként felfogó ifjak végezték el a négyszögesítés műveletét, de nem ez a lényeg, hanem e művelet végrehajtásának a módszere. Amíg ugyanis „négyzetszámokkal" dolgoztak, amelyek „képesek egyenlőször egyenlők lenni", addig nem is volt semmi baj: pl. a 16 láb hosszúságú szakaszt nemcsak 16 . 1 vagy 8 . 2 láb oldalú téglalapként, hanem 4. 4 láb oldalú négyzetként is lerajzolhatták. A 3, 5, 7 stb. láb típusú szakaszok négyszögesítése alkalmával azonban megrekedtek a téglalapnál: ezeket *aritmetikai* gondolkodással, tehát az oldalak számszerűségéhez ragaszkodva, nem lehetett négyzetté formálni, Theodórosz *geometriai* módszerével viszont igen! Ennek a módszernek köszönhető — látják be az ifjak —, hogy kibővült a négyszögesítés lehetősége: immár bármekkora s z a k a s z t négyzetté lehet formálni (ők természetesen egész szám nagyságú szakaszokra gondolnak, minthogy Theodórosz ábrái is ezekre utaltak), s eszerint specializálódik a *τετραγωνίζω* ige jelentése is („négyzetté formálni") gondolatmenetük végén. — Megértem Szabó Á. erőfeszítéseit a fordításban: először — H. Cherniss adalékait szem előtt tartva — „négyszög"-et mond (49.; vö. 24. jz. is) és az igének is a „négyszögesíteni" *(viereckig machen)*

[59] Ellenkezőleg *B. L. v. d. Waerden:* id. mű, 238.

jelentést tulajdonítja; nem érthetek egyet azonban a folytatással, miszerint bizonyos szakaszok a megfelelő téglalapszámot változtatják négyzetté *(eine Rechteckzahl in Quadrat verwandeln)* — elsősorban nem is a magyarázó jegyzetek önellentmondása miatt (51.; 26. és 27. jz.), hanem mert a folytatásban is (58. és 73.) a téglalapok, nem a szakaszok négyzetesítéséről ír, noha Theaitétosz kiindulása mindvégig a szakasz, nem az idom: bizonyos szakaszok — mondja vagy legalábbis akarja mondani — a számtanban csak téglalapokká változtathatók át, de mértanilag négyzetekké is, vagyis *δύναμις*-ok lesznek az *ἀδύνατος*-nak hitt számokból, az *eredetileg* hosszúságban (szakaszban) lerajzolt vagy elképzelt, *majd pedig* téglalapokká formált, számszerűen nem-négyzetesíthető számokból.[60]

A bonyolult, de kapkodva megfogalmazott következtetés lényegét tehát így tudnám rekonstruálni: „Bizonyos szakaszok a számszerű négyszögesítés során eleve négyzetet adnak, s mert e négyzetek oldala maga is egész szám, nevezzük e szakaszokat ‚hosszúság'-oknak. Bizonyos egyéb szakaszok ugyanezen eljárással téglalapokat adnak, csak mértanilag szerkeszthetők négyzetekké; e négyzetek oldala összemérhetetlen a szerkesztés kiindulásául szolgáló szakaszokkal, területük viszont természetszerűleg azonos velük, nevezzük tehát ezeket a szakaszokat ‚négyzetté formált érték'-eknek."

Theaitétosz legfőbb célja, hogy megmagyarázza a *δύναμις* két — nyilván közhasználatú — jelentésének (1. „érték, egyenérték", 2. „négyzet") összekapcsolódását. Szabó Á. fordítását azért is helytelenítem, mert *a mindvégig azonos alany (γραμμαί) helyett kettőt tételez:* előbb a szakaszokat, azután a négyzetesítéssel képzett négyzetek oldalait — alaptalanul. Végül, de talán elsősorban, képtelen vagyok megérteni, hogy miféle szakaszok lennének azok, amelyek bizonyos téglalapokat négyzetekké formálnak; igaz, Theaitétosz „geometriai vitalitással" ruházza fel a geometriai fogalmakat (szakaszokat, síkokat), de ilyen bűvös erőt egyáltalán nem tulajdonít a *γραμμή*-knak: egészen más dolog, hogy egy szakasz vagy síkidom (a naiv fogalmazás szerint) így vagy úgy *megváltozik*, s megint más, hogy valamely másik idomot tudna *megváltoztatni*, négyzetté formálni.

Megnehezíti a fordítást és az értelmezést, hogy Theaitétosz ifjonti hévvel, sietve számol be „felfedezésükről", noha abban — s éppen ennek kimutatása Szabó Á. egyik nagy érdeme — szemernyi újdonság sincs. Úgy gondolom, tovább kell lépnünk a „Theaitétosz-legenda" lerombolásában: *lehetséges*, de forrásokkal nem igazolható, hogy voltak jelentős matematikai felfedezései, s így méltán vált híressé az antikvitás későbbi századaiban, az viszont *bizonyos*, hogy a platóni ábrázolás inkább ironikus, mint amennyire Theodórosz pedagógusi lelkesültségét bizonyítaná. Éppen nem mondható soknak, ami a két ifjúnak a matematikaóra hatására az eszébe jutott: előbb két csoportra osztották a számokat, majd pedig — rádöbbenve, hogy ezek legtöbbjét csak geometriailag lehet négyzetté átformálni, aritmetikailag nem[61] —, arra jön-

[60] Már Platónnál is legtöbbször „négyzet" jelentésben fordult elő a *τετράγωνον* főnév (vö. *Ch. Mugler:* id. mű, 419 k.), viszont a *δύναμις* főnév is jelölhetett — legalábbis a későbbi matematikában — „négyszög"-et (vö. *K. Bärthlein:* id. cikk, 44., 23. jz.).

[61] Modern — nem ókori! — értelemben fedezik tehát fel, hogy csak geometriai úton lehet minden esetben négyzetgyököt vonni, vagyis megtalálni azt a mennyiséget, amely önmagával megszorozva az eredeti számot (= a négyzet területét) adja. Igazában persze circulus vitiosus az egész gondolatmenet: ha (= minthogy) nem ismerik a legtöbb négyzet oldalát, vagyis az önmagával megszorzandó mennyiséget, honnan máshonnan ismerhetnék a szorzatot, ha nem a kiindulásból?

nek rá, amit Theodórosz egyszer már megmutatott nekik; tisztelet-becsület, hogy a konkrét illusztrációk tanulságait általánosítani tudják, tehát felfedezik a közös vonást *az egész számokból formált négyzetek* oldalainak részleges, területüknek viszont általános kommenzurábilitásában, de legfeljebb a *δύναμις* fogalom megmagyarázásának kísérlete vall önálló teljesítményre. Sajnos, ezt a vállalkozásukat sem kíséri sok szerencse, mert Theaitétosz — aki magától értetődő, magyarázatot nem is igénylő fogalomként használja bevezető szavaiban a *δύναμις* főnevet — terminológiai zavart okoz, saját szójátékától megittasultan (azzal ti., hogy egyfajta hosszúság jelzésére is használja a szót). Botladozása és félsikere közben is rábukkan azonban arra, hogy az aritmetikai értelemben négyzetté átalakíthatatlan *(ἀδύνατος)* számok is alkalmasak a geometriai értelemben vett *δύναμις*-ok képzésére. Meg akar tehát magyarázni egy fogalmat — pontosabban szólva: *egy már nyilvánvalóan közhasználatú fogalom eredetét* fejtegeti. Igaz, hogy túlkomplikálja a dolgot, s épp ezáltal hibázik — Szókratész körében gyengéd korholást s további erőfeszítésekre buzdító mosolyt váltva ki, a modern ókorkutatásban pedig izgatott vitákat keltve —, de ha kihámozzuk szavaiból a terminológiailag és logikailag helytálló lényeget, talán továbbjutunk valamivel.[62]

A „THEAITÉTOSZ"-RÉSZLET FORDÍTÁSA ÉS ÉRTELMEZÉSE

Egyelőre csupán hipotézisként írom, hogy — az adott szövegen messzi túlmutató jelentőségű, az aritmetika és geometria görög értékviszonyának, valamint a harmóniaelmélet VI—V. századi fejlődésének rekonstruálása szempontjából elsőrendűen fontos — *δύναμις*-fogalmat a következőképpen értelmezem: *„más-más formákban megjelenő — közvetlen-érzéki módon nem is mindig felfogható — érték; egyenérték két különböző dolog között, melyeket kölcsönösen egymásra válthatunk át"* (ezek a pontosság érdekében bonyolult értelmezések a példa kedvéért idézett V. századi szövegekből következnek), sajátosan matematikai jelentésének fázisai pedig: (1) *„egyenérték egy számmal jelölt szakasz és az abból szerkesztett négyzet között"*, (2) *„egy adott szakasszal szerkesztendő négyzet területe"*, (3) *„négyzetérték"*. — A 2. és 3. jelentés természetesen egyenrangú, sőt a „Politikosz", valamint a későbbi szövegek bizonysága szerint, legfeljebb a matematikai feladat jellege (mérés vagy számolás) indokolja, hogy melyik jelentésárnyalat dominál, éppen az aritmetika és geometria réges-

[62] Theaitétosz stílusának *Szabó Á.* által adott jellemzését (id. mű, 105 skk., 109., 65. jz.) néhány további adalékkal egészíthetjük ki — nem tévesztve szem elől a Platón-dialógusok laza természetességét: aligha lehet grammatikai kategóriákba gyömöszölni pl. Szókratész lelkes dicséretét *(Ἀριστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες)*. Az viszont már Theaitétosz okoskodónak tűnő *τὸν ἀριθμὸν πάντα κ.τ.λ.* fogalmazásából következik — hiszen nem a számok összességéről beszél, hanem külön-külön „minden" szám megvizsgálásáról s osztályozásáról, az egyesszámú alakot tehát a *δίχα* adverbium is csak úgy-ahogy indokolja —, hogy a *μεταξὺ τούτου* is sutának tűnik. Hagyján, hogy „a szám"-on a folytatásban is bizonyos „számok" — azonos típusú számok — értendők, zavaró az egyesszámhoz való ideiglenes ragaszkodása, amikor a téglalapokról beszél, egy-egy, nem pedig két-két oldaluk arányát vizsgálva. Legbántóbb azonban az *ἔγραφε* igealak (praet. impf. = „rajzolgatott"), mint ahogy e mondat végén is tiszteletlenül beszél a mesteréről. Igaz ugyan, hogy Athénben — kiváltképp pedig Szókratész körében — nevetséges lett volna a „professzor úr, kérlek tisztelettel" stílus, de Theaitétosz önbizalmát kevéssé igazolják a fejtegetés eredményei.

régi egysége miatt. Ahhoz azonban, hogy a „négyzetterület, négyzetérték" (akár csupán „négyzet", mint síkidom) fogalmak kialakulását — tehát a *δύναμις* főnévnek a platóni Theaitétosz által már jól ismert, a IV. sz. elején közhasználatú[63] jelentés genezisét — megértsük, az 1. és 2.-3. fázis közötti kapcsolatot kell felderítenünk. Vulgáris elképzelés lenne, ha ebben a kapcsolatban és jelentésváltozásban a társadalmi praxis — mondjuk: a földmérés vagy a kereskedelem — közvetlen hatását tételezné bárki is; nem kevésbé torz, csak éppen más előjelű fikció, hogy a fogalmak jelentésének eredetét és változásait a matematika vagy a filozófia „belügyének" kell tekinteni. A *δύναμις* fogalom jelentéstörténete — természetesen nem elszigetelten, inkább csak példaként — annak megértéséhez kínál tanulságokat, hogy a közvetlen-érzéki megismerésből (különféle hosszúságok összeméréséből) miként alakul ki az új probléma: egyenérték keresése az első pillantásra összehasonlíthatatlannak tűnő dolgok, mennyiségek (hosszúságok és területek; a területegység és bizonyos olyan síkok területe, amelyekre ez utóbbit nem lehet ráfektetni) között. Magának *a problémának a megjelenése* a való élet gyakorlatának az eredménye: a más-más minőségű dolgok, a más-más szükségleteket kielégítő használati cikkek áruvá válása és az áruk — tehát az első pillanatra összehasonlíthatatlan, mert tökéletesen más minőségű s funkciójú dolgok — értékviszonyának keresése, a pénz általános csereeszközzé válása és egyenértéket kifejező funkciója alapozta meg „az érték" absztrakcióját, a rejtett lényeg és a látszat dialektikájának felismerését. Az „első pillantásra összehasonlíthatatlan, mégis összehasonlítható" *problematikájának a története* azonban nem tűri a sematizálást — megismerési szférák, a tudományon belül is diszciplínák szerint különböznek a módszerek és a válaszok, a közvetlen-érzéki megismeréstől s a köznapi praxistól fokozatosan önállósulva, mind bonyolultabb s áttételesebb kapcsolatokban, ős-szülőjükhöz, az érzéki és gyakorlati valósághoz mégis vissza-visszakanyarodva.

B. L. v. d. Waerden fordítása és interpretációja a *δύναμις* „négyzetoldal" értelmezésére épül (id. mű, 234. és 272.); Szabó Á. beható bírálatát is szem előtt tartva, szükségtelennek tartom idézését.

Ch. Mugler — hatalmas művének lényegéből következőleg — nem összefüggő passzusban, hanem különféle címszavakban foglalkozik a problematikus részlettel, főképpen Theaitétosz beszámolójának bevezető és önálló (?) elgondolásait összegező mondatokkal:

„Au sujet des segments racines carrées notre Théodore construisait devant nous des figures en démontrant que les côtés des carrés d'aires 3 et 5 pieds carrés ne sont pas commensurables en longueurs au côté du carré d'aire un" (id. mű, 149 k.) és „. . . montrant que les segments racines carrées de trois et de cinq ne sont pas commensurables en longueur à l'unité" (390.). — A két, csupán stilárisan különböző fordítás H. Vogt és P. M. Michel interpretációját követi; véleményem szerint alapvető tévedések vannak a francia szöveg-

[63] Thaitétosz monológjának talán egyetlen érdeme, hogy megmagyarázza az „egyenérték" és „négyzetben kifejezett érték", „négyzetérték" fogalmak kapcsolatát (megmagyarázza, nem pedig felfedezi!), ezért meglepő, hogy Philolaosznál nyoma sincs a *δύναμις* matemaikai értelmezésének (vö. 44. jz.), hanem a számok vagy mértani alakzatok isteni sajátságát jelöli a főnévvel (vö.: Prokl. in Eukl. p. 130,8 = VS 44 A 14). Ezzel rokon a *tetrasz δύναμις*-ának püthagoreus képzete: a csoportba foglalt 1, 2, 3, 4 együttes hatásának (= 10) magyarázata (Aët. I 3,8 = VS 58 B 15).

ben: a *δύναμις* nem „négyzetgyök nagyságú (értékű) szakasz"-t jelent, a *πούς* „négyzetláb" fordításával pedig ugyanazt a hibát véti a szerző, mint (tudomásom szerint) valamennyi többi kutató.[64]

A *ὅσαι μὲν γραμμαὶ κ.τ.λ.* mondatot ekképpen fordítja: „toutes les droites dont le carré est mesuré par un nombre plan équilatéral" (107.; máris megjegyzem, hogy ennek az értelmét nem tudom belátni, hiszen minden szakasznak a négyzete [= minden, valamely adott szakasszal mint oldallal szerkesztett négyzet] természetszerűleg négyzetszám, ha maga a szakasz egész szám hosszúságú), „tous les segments de droites qui groupés en carré produisent un nombre équilatéral, nous les avons définis longueurs; ceux, au contraire, qui produisent un nombre à facteurs inégeaux, nous les avons définis puissances" (315.) és „tous les segments de droite, dont le carré est mesuré par un nombre plan équilatéral, nous les avons définis dans la classe des 'longueurs' etc." (417.; aminek elfogadhatatlanságát már jeleztem). Sajnos csak a közbülsőként idézett részlet foglalkozik a Theaitétosz osztályozási módja szempontjából különösen fontos mellékmondattal (*ὅσαι δὲ κ.τ.λ.*), de két vonatkozásban is tévesen; igaz ugyan, hogy a *τετραγωνίζουσι* állítmány eredeti jelentése: „egyenlőtlen oldalú számot alkotni", de éppen az adja a mondat — és az egész következtetés — értelmét, hogy az *eredetileg* szakaszként, majd téglalapként elgondolt számokat *most már* négyzetekké alakították át, hiszen enélkül megmaradt volna az oldalak számszerű összemérhetősége; továbbá: a *δύναμις* főnév „hatvány" fordítása ellenkezik a szótár egyéb helyein olvasható értelmezésekkel, s egyáltalán nem derít fényt az osztályozás logikájára.

Szabó Á. könyve nemcsak a szövegek interpretálásában nyújt új, minden korábbinál pontosabb eredményeket, hanem — az interpretáció sűrített formájában — a fordításban is, amelyhez képest tudománytörténeti érdekességgé válnak a régebbi kísérletek. Részint a tanítványi polémia tisztessége, részint — és még nyomatékosabban — a tudományos érdek kívánja meg, hogy végig idézzem fordítását a vizsgált dialógusrészletről:[65]

Th: So es scheint leicht zu sein, Sokrates. Denn du fragst ja wohl etwas ähnliches wie es auch uns zuletz im Gespräch begegnete, mir und deinem Namensverwandten hier, dem anderen Sokrates.

S.: Was war es denn, Theaitetos?

Th.: Über Quadrate *(περὶ δυνάμεων)* zeichnete uns etwas dieser Theodoros, über dasjenige mit drei und mit fünf Quadratfuss-Fläche, indem er zeigte, dass diese *der Länge nach nicht messbar (μήκει οὐ σύμμετροι)* mit dem Einheitsquadrat sind; und so nahm er jedes Quadrat *(ἑκάστην* scil. *δύναμιν)* einzeln bis zu demjenigen mit siebzehn Quadratfuss-Fläche vor; bei diesem hörte er irgendwie auf. — Uns fiel nun ein solcher Gedanke ein: nachdem es unendlich viele Quadrate *(δυνάμεις)* gibt, man sollte es versuchen, diese in eins zusammenzufassen, wonach wir alle Quadrate *(δυνάμεις)* benennen könnten.

S.: Und habt ihr auch etwas solches gefunden?

[64] „Toutes les lignes dont le carré équivaut à un nombre plan équilateral [i.e. un nombre carré], nous les avons définies longeurs. Toutes celles dont le carré équivaut à un nombre hétéromèque [i.e. non carré parfait], nous les avons définies puissances parce que, non commensurables en longueur avec les premières, elles leur sont commensurables par les plans qu'elles ont en puissance" – fordítja *P. H. Michel* (id.mű. 457) a problematikus zárómondatot.

[65] *Szabó Á.:* id. mű, 48 skk.

Th.: Ja, ich glaube. Aber prüfe auch du selber.

S.: Sag nun!

Th : Wir teilten alle Zahlen in zwei Gruppe; diejenigen, die vermögen gleichmal gleich zu sein, verglichen wir — der Gestalt nach — mit dem Viereck, und wir nannten sie *gleichseitige Quadratzhahlen.*

S.: Sehr richtig!

Th.: Diejenigen Zahlen dagegen, die unter den vorigen sind, wie z. B. die *drei*, die *fünf* und überhaupt jede Zahl, die nicht gleichmal gleich sein kann, sondern entweder wenigermal mehr oder mehrmal weniger ist, d. h. also, die von einer grösseren und von einer kleineren *Seite* umfasst wird, diese Zahlen verglichen wir mit dem Rechteckfigur und wir nannten sie Rechteckzahlen.

S.: Sehr schön! Aber was kommt noch?

Th.: Diejenigen Strecken nun, die eine *gleichseitige Quadratzahl machen*, bezeichneten wir mit dem Wort *μῆκος;* diejenigen Strecken dagegen, die *eine Rechteckzahl in Quadrat verwandeln*, bezeichneten wir als *δυνάμεις*, nachdem diese letzteren der Länge nach zwar inkommensurabel zu den anderen sind, doch sind dieselben kommensurabel *nach jenen Flächen (ἐπιπέδοις)*, die sie *in Quadrat ausmachen (ἃ δύνανται)*. Und etwas ähnliches versuchten wir auch mit den Körperzahlen.

S.: Grossartig, Kinder! Ich glaube, Theodoros hatte doch recht (nähmlich als er dich lobte) etc.

Eddig az idézet. A már említett aggályokon kívül, s talán mindennél súlyosabb ellenvetéssel hivatkozom arra a jegyzetre, melyet Theaitétosz legutóbbi okfejtéséhez fűz a szerző: „Man vergesse nicht den genauen Sinn des mathematischen Ausdruckes *δύνασθαι: ‚den Wert haben in Quadrat'* oder: *‚in Quadrat ausmachen'*."[66] — Valószínűnek, szinte bizonyosnak gondolom magam is, hogy a *δύναμις* főnév már meglehetősen régóta jelölte (legalábbis a szakemberek szóhasználatában, tehát a *τετράγωνον* köznyelvi kifejezés tudós szinonimájaként) a geometriai négyzetet és az aritmetikai négyzetértéket; annak azonban még sokáig nincs nyoma, hogy a *δύνασθαι* igét akár csak a szaknyelvben is a „négyzetben érni" értelemben használták; nem, ezt vagy a *κατὰ δύναμιν* praepositiós fordulattal (mint a „Politikosz"-ban), vagy a *δυνάμει* dat.-szal[67] fejezték ki. Ha téves is az az állítás, hogy „bei Euklid kommt das Verbum *δύνασθαι* — im Sinne *‚den Wert in Quadrat haben'* — nie vor",[68] és hogy Arkhimédész az első matematikus, aki ebben a jelentésben használta immár az igét is[69] — aminek a leszögezésével különben saját indokolását gyengíti a szerző —, Eukleidész előtt valóban nincs nyoma az ige ilyen jelentésének. Ugyanez áll az „oldal" — sajátosan pedig „négyzetoldal" — jelentésű *δυναμένη* (ti. *εὐθεῖα)* participiumra is, amellyel a Theaitétosz iránt jóindulatúan elfogult vagy a dialógusrészlet terminológiai zavarán kétségbeeső kutatók kívánnák a *δύναμις* — kétségkívül pontatlan, sőt egyszerűen hibás — „négyzetoldal" jelentését korrigálni. Általában természetesen igaz, hogy a nyelvi fejlődésben a konkrétumhoz közvetlenebbül kapcsolódó igék időben megelőzik az azonos tőből származó főneveket — különösen, ha e főnevek fogalmakat jelölnek, tehát absztrakció eredményei —, ezt azonban nem kell és nem lehet a szabály

[66] Uo. 52., 28. jz.; hasonlóképpen: 85.

[67] Vö. *K. Bärthlein:* id. cikk, 45 skk.

[68] *Szabó Á.:* id. mű, 56.; vö. 45., 19. jz.

[69] *Ch. Mugler* hét Eukleidész-helyet sorol fel az ige „négyzetérték" jelentésére, „et passim" záradékkal: id. mű, 150 k.

rangjára emelni: iskolázatlan emberek is beszélnek „négyzet"-ről, mint mértani fogalomról, de a számtani „négyzetérték", s még inkább a „négyzetben érni" fogalom megértése sokkal bonyolultabb elmemunkát kíván.

Az viszont logikai szabály, hogy *a bizonyítandóval nem lehet bizonyítani:* ha feltételezzük — nem is állítjuk, csupán csak feltételezzük! —, hogy a *δύνασθαι* ige *is* használatos volt *ebben* a matematikai értelemben („négyzetet érni"), akkor azt mondatjuk Theaitétosszal, hogy „egy négyzetoldal négyzetértéke egyenlő a négyzettel". Legalábbis valószínűtlen, hogy ilyen banalitás jutott volna Theodórosz tehetséges tanítványának az eszébe . . . Helyesebbnek látszik, ha az ige fordításában ragaszkodunk az V. századi prózából ismert jelentéshez: „*ugyanannyit* érni, mint ez vagy az; más formában kifejezni valamit, *ugyanazon* tartalmat megőrizve".

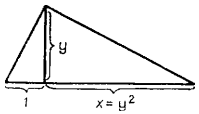
Végül még egy előzetes indokolást az alábbi fordításhoz, amelyben a *δύναμις* főnevet — a pontos és egyértelmű érthetőség kedvéért — a „négyzetté formált érték" szavakkal fogom visszaadni. Ennek az általában „érték" vagy — különböző dolgok hasonlításában — „váltóérték" jelentésű főnévnek a geometriában sajátos tartalma volt: annak a mértéknek a fogalmát jelölte, amellyel a síkok területét hasonlították össze, ez pedig — mint legegyszerűbb, legkönnyebben és legpontosabban alkalmazható mérték — a négyzet volt. Theodórosz ábrái és az ifjú tanítványokat továbbgondolásra inspiráló magyarázatai azonban más valamit *is* megértetnek: nemcsak azt, hogy a különböző nagyságú négyzetek[70] terület szerint összemérhetők — függetlenül attól, hogy oldalaik lineárisan kommenzurábilisak vagy inkommenzurábilisak! —, hanem azt is, hogy a terület szerinti összemérés akkor is lehetséges, ha a „váltóérték"-et egyikre-másikra nem lehet pontosan ráhelyezni; az ilyen esetekben tehát nem közvetlen-érzéki a megbizonyosodás, hanem elméleti, amelynek az érvényét valamiképpen mégis ki lehet mutatni, ti. úgy, hogy *a láthatatlan összefüggést láthatóvá* (közvetlen szemlélettel kontrollálhatóvá) *tesszük (ἀποφαίνω, ἐπιφάνεια!).* — Bízvást használhatták a *δύναμις* főnevet régebben is a legkézenfekvőbb földmérési „váltóérték", vagyis a „négyzet", fogalmaként, Theodórosz matematikaóráján és Theaitétosz fejtegetéseiben azonban új síkon és új tartalommal fogalmazódik meg a kommenzurábilitás és inkommenzurábilitás problémája: egész szám hosszúságú szakaszokat alakítanak át négyzetekké, majd megfordítják a műveletet és a látszólag összemérhetetlen négyzetek területértékét vetítik ki lineárisan, s az így kapott (természetesen egész szám hosszúságú, tehát *1*-gyel osztható) szakaszok összemérhetőségét könnyűszerrel illusztrálják.[71] *Nem téglalapokat alakítanak tehát négyzetekké, hanem egész szám hosszúságú szakaszokat* (amelyeket persze, mint Theaitétosz is teszi, téglalapokként is fel lehet rajzolni: 3 = 3.1, 5 = 5.1, 6 = 6.1 vagy 3.2, 12 = 12.1 vagy 6.2, vagy 4.3 stb.), s bár a négyzetté formálás geometriai menete mindkét esetben ugyanaz, két perdöntő érvet említek:

(1) hosszúság (szakasz) és síkidom (négyzet) egyenértékesítése indokolja, hogy miért alkalmazták az előbbinek a mértékegységét (*πούς* = „láb") az utóbbira is;

[70] Természetesen nem valamennyi négyzet, hanem csak azok, amelyeknek a területe egész számú egység.

[71] Ezt Theodórosz, mint a dialógusrészlet bevezetéséből kiviláglik, bebizonyította, Theaitétoszt azonban csak egy közbülső mozzanat — tehetségére valló módon, a legfontosabb mozzanat — érdekli: a többit magától értetődőnek és saját problémája szempontjából mellékesnek tekinti.

(2) Theodórosz okvetlenül bizonyított valamit — *vagy* a szerkesztés és az egyenérték-tételezés igazságát, *vagy* (és ezt említi Theaitétosz) a megszerkesztett négyzetek területének általános, oldalaiknak viszont csak részleges összemérhetőségét, *vagy* pedig ezt is, azt is. Milyen alapon mondhatta azonban az inkommenzurábilis oldalú négyzetekről, hogy a területük 3, 5, 7 stb. láb (a mi kifejezésünkkel: négyzetláb) nagyságú? Hiába tudja valaki, hogy a négyzet területének kiszámítási képlete: $a \cdot a$ — ha nem ismeri, sőt megmérni képtelen az oldalt (tehát az a hosszúságát), akkor a szorzat értékét sem tudhatja. S minthogy a területegységet (az 1 láb oldalú négyzetet) sem lehet a kérdéses négyzetekre pontosan ráhelyezni *(3. ábra)*, bonyolultabb geometriai bizonyításra van szükség — a területérték lineáris kivetítésére, ami nem más, mint a négyzetszerkesztési eljárás megfordítása,[72] vagyis:



5. ábra

A bizonyítás itt is — akárcsak a mértani középarányos megszerkesztésénél *(1. ábra)* — a hasonló háromszögek oldalainak arányosságára épül.[73] Amott, *modern átfogalmazással*, lehetségessé vált, hogy az a hosszúságú szakaszból — vagy, ami aritmetikailag ezzel azonos, az $a \cdot 1$ oldalú téglalapból — megszerkesszék a $\sqrt{a}$ hosszúságú szakaszt, vagyis „négyzetgyököt vonjanak"; emitt, a négyzet területének lineáris kivetítésével, a négyzet oldalának négyzetértékét kapták meg.

A fentiek alapján gondolom indokoltnak, hogy a *δύναμις* főnevet — Theodórosz ábráinak és az ifjú tanítvány csetlő-botló beszámolójából is jól rekonstruálható magyarázatainak célzata szerint — *ne* a „váltóérték, négyzet, négyzetérték" szavak valamelyikével fordítsam, még kevésbé a „Quadratwert eines Rechtecks" fordulattal, hanem „*négyzetté formált érték*"-nek. — Tehát:[74]

Th.: Most már könnyebbnek látszik ez, Szókratész *(ti. a definiálás feladata, amellyel eddig nem boldogult)*, hiszen — ha nem csalódom — azt kérdezed, mint amiféle az imént nekünk magunknak is eszünkbe jutott beszélgetés közben, nekem és névrokonodnak, emennek a Szókratésznek.

S.: Nos, miféle, Theaitétosz?

Th: Négyzetté formált értékekről rajzolgatott nekünk valamit ez a Theodórosz, a három és öt lábnyiról, kimutatva, hogy hosszúságban összemérhetetlenek az egy lábnyival, és így véve elő egyenként mindet a tizenhét lábnyiig;

[72] A művelet és az egész gondolatmenet reverzibilis *(παλίντροπός ἐστι κέλευθος)*, mint a síkmértani szerkesztéseknél általában — irreverzibilis lesz viszont a sztereometriában és a „térszámok" esetében.

[73] A szerkesztés menete tehát a geometriai „gyökvonás" *(1. ábra)* fordítottja: y és *1* szakaszokból — mint befogókból — derékszögű háromszöget szerkesztünk; az átfogóra bocsátott merőleges és az *1* szakasz meghosszabbításának metszéspontja egyértelműen meghatározza a „nagy" háromszöget, ezzel együtt pedig a keresett x szakaszt, amely számszerűen az y oldalú négyzet területével egyenlő.

[74] Nem célom a „szép" fordítás, sokkal inkább a theaitétoszi fejtegetés görcsösségének visszaadása, akár a névmásokban is. Nem utánzom tehát Voltaire hősét, mondván, hogy „a mi fordításunk minden létező fordítások legjobbika", csupán az interpretációhoz szánom kiegészítésül.

ennél aztán valahogy abbahagyta. Nekünk tehát valami efféle jutott eszünkbe: miután a négyzetté formált értékek mennyiségileg végtelennek tűntek, kíséreljük meg, hogy *egy*be *(vagyis: egy fogalomba)* foglaljuk, amellyel mindezeket a négyzetté formált értékeket megnevezhetjük.[75]

S.: És csakugyan találtatok valami ilyesmit?

Th.: Meghiszem azt! De vizsgáld meg magad is.

S.: Mondjad.

Th.: Az összes számokat kétfelé osztottuk. Azokat, amelyek képesek egyszerre egyenlők lenni,[76] alakjukra nézve a négyszöghöz hasonlítva, négyszögűnek és egyenlő oldalúnak neveztük.[77]

S.: Jól is tettétek.

Th.: A közbülsőket viszont — amelyek közé valók a 3 és az 5 és mindazok, amelyek képtelenek egyszerre egyenlők lenni, hanem vagy kevesebbszer nagyobbak, vagy többször kisebbek lesznek, vagyis hát mindig nagyobb és kisebb oldal veszi őket körül — hosszúkás idomhoz hasonlítva, hosszúkás számnak neveztük.[78]

S.: Gyönyörű! De mi az ezutáni?

Th.: Mindazokat az egyeneseket *(= szakaszokat)*, amelyek az egyenlő oldalú és[79] síkszámokat formálják négyszöggé, „hosszúság"-ként határoztuk meg;[80] mindazokat viszont, amelyek a különböző hosszúságúakat *(= oldalúakat)*,[81] „négyzetté formált *(vagy: „formálható")* értékekként" *(ti. határoztuk meg)*, mivelhogy *(négyzetté formálás után)* hosszúságban nem mérhetők össze amazokkal,[82] de igenis a síkokban, amelyekkel egyenértékűek.[83] A térszámokról is más ilyesmi *(ti. jutott eszünkbe)*[84].

[75] Íme, az első zavar: mi lenne a fogalomalkotás szempontja?

[76] A számok geometriai elképzeléséről és tényezőkre bontásáról lásd *K. Bärthlein:* id. cikk 43 skk. és *Szabó Á.:* id. mű, passim. Theaitétosz későbbi szavaiból kiderül, hogy a számok „geometriai vitalitása" végső soron a szakasz formájú *(γραμμαί)* elképzelésből származik: x = x . 1.

[77] Tehát: 4 (= 2 . 2), 9 (= 3 . 3), 16 (= 4 . 4) stb.: ezek a „négyzetszámok".

[78] Tehát: 3 (= 3 . 1), 5 (= 5 . 1) stb. Bonyolultabbak az összetett számok, pl. 12 = 12 . 1 = 6 . 2 = 4 . 3 és megfordítva a tényezőket, de aritmetikailag négyzetté alakíthatatlanul: ezek a „hosszúkás (= téglalap-) számok".

[79] Mellőzhető lenne a kötőszó, de így sem tautologikus a kifejezés (ellenkezőleg: *Szabó Á.:* id. mű, 51., 26. jz.): csak akkor lenne az, ha „négyszög" helyett „négyzet" állna a szövegben. Azért is menthető a kötőszó, mert a térszámok kapcsán is lenne mondanivalója hasonlóról.

[80] Tehát a 4, 9, 16 nagyságokról van szó (ezek lesznek négyszöggé formálva egyenlő oldalúak), nem pedig a belőlük szerkesztett négyzetek oldalairól.

[81] Vagyis „amelyek — négyszögként ábrázolva — téglalap alakúak (voltak eredetileg)", tehát az imént említett „közbülső számok" (3, 5 stb.); sajnos kezdi elrontani az osztályozást, minthogy a „hosszúság" fogalmához nem okvetlenül tartozott hozzá a számszerűség.

[82] A mondat ezen részének magyarázatához a következőkre kell figyelnünk: (1) *ἐκείναις* (ti. *γραμμαῖς*): „amazokkal a szakaszokkal, amelyek a négyzetszámokat formálják", vö. 80. jz.; (2) előfeltétele az összehasonlításnak, hogy emezeket (tehát a táglalap-számokat) is négyzetté alakítsuk, persze geometriailag, hiszen ha akár szakaszként, akár téglalapokként gondoljuk el (= ábrázoljuk) őket, akkor lineárisan összemérhetők maradnának; (3) újabb pontatlanságot vét Theaitétosz, amikor a *δύναμις*-t és a *μῆκος*-t egy kategóriába sorolja (mindkettőt valamilyen hosszúságnak képzelteti) és azon belül próbál differenciálni, vö. 81. jz.

[83] Ez a *δύνασθαι* primér jelentése a különböző dolgok (minőségek) összehasonlításában! Theaitétosz utolsó kis hibája, hogy a szakaszok és a belőlük szerkesztett négyzetek számszerű egyenértéke nemcsak a 3, 5 stb. típusú, hanem a 4, 9 stb. típusú négyzetekre is érvényes.

[84] Két szélsőséges állásfoglalást találunk e sejtetéssel kapcsolatban. Az egyik, hogy mivel semmi bizonyságunk nincs a tartalmáról, nem is érdemes töprengeni rajta *(Szabó*

S.: Emberi remekmű, fiúk! Most látom igazán, hogy Theodóroszt senki nem sorolhatja a hamis tanúk közé...

Kíséreljük meg összefoglalni Theaitétosz okfejtésének legfontosabb pontjait:

(1) Tartalmilag semmi újat nem mond, hiszen végül — amikor a „téglalapszámok"-nak „négyzetszámok"-ká való átalakításáról beszél — Theodórosz ábráihoz és magyarázatához kanyarodik vissza;

(2) Theodórosznak ismernie kellett a mértani középarányos geometriai szerkesztésének a módját — nemcsak azért, mert ez a legegyszerűbb eljárás egy adott területnagyságú négyzet megkonstruálásához, hanem azért is, mert a területérték lineáris kivetítése (a területek kommenzurábilitásának bizonyítási módja) is ugyanezen elvekre épül; az első művelet — a mi terminológiánk szerint — a négyzetgyökvonást, a második a négyzetérték-képzést oldotta meg, geometriai úton;

(3) Theaitétosz és az ifjú Szókratész töprengését a *δύναμις* főnév tartalmának kibontási igénye indítja el, tehát annak kutatása, hogy mi köze az „egyenérték" vagy „valóságos, felszín mögötti érték" fogalomnak a „négyzet" vagy „négyzetérték" fogalmához; először arra az érdekességre jönnek rá, hogy az aritmetikai értelemben négyzetszámként felfoghatatlan számokat is lehet négyzetekké alakítani (tehát az *ἀδύνατοι ἀριθμοί*-ból is lehetnek *δύναμις*-ok), ami a geometria általánosabb érvényét mutatja az aritmetikával szemben; később pedig, a *δυνάμεις δύνανται* magyarázatát keresve, noha a szójátékok bűvöletében hibákat is vétenek, arra a — Theodórosz vagy Szókratész szemében nyilván természetes és a négyzetábrák szerkesztésében is elvi kiindulásul szolgáló — megállapításra jutnak, hogy a négyzet területértéke vagy — ami ezzel azonos — a négyzetoldal négyzetértéke egyenlő annak a szakasznak a hosszúságával, amelyből magát a síkidomot szerkesztették.

Mindez — gondolom — teljessé teszi Theaitétosz matematikatörténeti „trónfosztását". Helyesen járt el a dialógus ismeretlen ókori kommentátora, amikor az egész bizonyítást Theodórosznak tulajdonította, szót sem ejtve az ifjú tanítványok önálló szerepéről: „Theodórosz kiválasztva *(ἐκτάξας)* egy egy lábnyi négyzetet, kimutatta *(ἐδείκνυεν)* Theaitétosznak és barátainak, hogy ezzel a négyzettel a három és öt lábnyi összemérhetetlen az oldalakat tekintve, amelyeknek szorzataként (ti. mindegyik) létrejött,[85] és egyenként számbavéve *(ἐξαριθμούμενος)* az összemérhetetlen négyzeteket, eljutott a tizenhét lábnyiig."[86]

Á: id. mű, 101., 56. jz.); a másik a köbgyök kiszámításának érdemét tulajdonítja Theaitétosznak és ebből eredezteti a megfelelő arány építészeti alkalmazását *(J. Bousquet:* Le trésor de Cyrène. Fouilles de Delphes II, Paris 1952, 77 skk.), amit azonban nemcsak bizonyítani nem lehet, de ami messze meghaladta volna a korabeli görög matematika szintjét. — Sokkal meggyőzőbb *B. L. v. d. Waerden* magyarázata, analógiás érveléssel, hogy így hangozhatott volna a mondat: „Strecken, die Kuben erzeugen, deren Raumhalt eine ganze Zahl, jedoch keine Kubikzahl ist, haben kein gemeinsames Mass mit der Längeneinheit" (id. mű, 273.). Eltekintve a „*δύνασθαι* = erzeugen" felfogástól és a Theaitétosznak tulajdonított bizonyítás teljesen valószínűtlen bonyolultságtól, valóban ez lehetett a lényeg: a három tényező szorzataként elgondolható számok egyik csoportjában azonos szorzókat (pl. 3 . 3 . 3), a másikában különböző szorzókat (pl. 3 . 4 . 5) látott meg Theaitétosz, s ezt megfordítva jött rá arra is, hogy bizonyos köbtartalmú kockák élét kiszámíthatjuk, másokét nem.

[85] A *γίγνεσθαι* Platónnál is természetes matematikai jelentéséhez („szorzatként létrejönni") vö. Philolaosz (?) szóhasználatát: VS 44 B 20.

[86] Anonym. in Plat. Theaet. (Berl. Klassikert. 2) 25,40 = VS 43, lábjegyzet.

— Mégsem mondhatjuk, hogy elmeél híján való Theaitétosz ötlete. Igaz, egészen más következtetésre jut, mint amire ő maga akart jutni (nem valamennyi „négyzetté formált érték" közös vonását találja meg, hanem egyfelől a „négyzetszámokét", melyek a megfelelő *γραμμή*-k négyzetté való átalakítása után is megőrzik az oldal számszerűen kifejezhető hosszúságértékét [*μῆκος*], másfelől a „téglalapszámokét", amelyekben az egyenértékűség csak rejtetten, van meg [*δύναμις*]), Szókratész szemében mégis érdem, hogy a fogalomképzés logikai lényegét megértette s valamiképpen alkalmazni tudja. Hasonlóképpen érdemel figyelmet, hogy számelméleti osztályozását sem Szókratész, sem Theodórosz *nem* cáfolja, kétségkívül azért, mert — ha botladozott is a terminológiában — a *δύναμις* megmagyarázásában helytálló véleményt mondott.

Valójában persze nem is Theaitétosz önállósága vagy önállótlansága adja a probléma tudománytörténeti jelentőségét. Ezzel összefüggésben, de többről van szó — egyrészt arról, hogy a négyzetes kommenzurábilitást, amely sokszor *láthatatlan*, elvszerűen a lineáris kommenzurábilitással igazolja, amely mindig *látható*, másrészt az aritmetikai kiindulás korrekciójának szükségességéről és (a négyzetek oldalait tekintve!) a geometriai pontosság magasabbrendűségének *el*ismeréséről. Theaitétosz maga ezt *fel*ismerésnek véli, erős túlzással, hiszen az elvi lényeg dolgában csak rekapitulálja a frissen tanultakat, s az irracionális („kimondhatatlan", számszerűen kifejezhetetlen) hosszúság mibenlétét egy művelt diáknak ekkor már ismernie illett (vö. *Menón, Politikosz, Politeia)*. Tapasztalati úton erre — ismétlem — már a Püthagorasz-tétel megszerkesztése előtt rájöttek, s logikailag is már az V. század közepe táján bizonyították (ti. a négyzet oldalának és átlójának összemérhetetlenségével, amit azután Arisztotelész az elvi lehetetlenség közismert példájaként többször is emleget).

De vajon igaza van-e Szabó Á.-nak abban, hogy a *dünamisz*-fogalom felfedezése és egyáltalán az inkommenzurábilis mennyiségek (hosszúságok) négyzetesítéséből adódó kommenzurábilitás megmentette az aritmetika fölényét a geometriával szemben? — Mielőtt erre keresném a választ, engedtessék meg egy rövid kitérő a *dünamisz*-értelmezések eddigi állásáról. Nemcsak arra nincs írásos forrásunk, hogy a görögök ismerték vagy alkalmazták az algebrai számításokat, de arra sincs, hogy a $\sqrt{2}$ aritmetikai fogalmát ismerték. Csak azt tudták, hogy vannak bizonyos megmérhetetlen hosszúságok, amelyeknek a négyzetértéke egész számot ad; pontosabban szólva, arra jöttek rá, hogy a négyzetsík oldalát csak ritkán lehet egész számmal kifejezni, és *ezeket* (ismétlem: *a négyzetszerkesztéssel kapott hosszúságokat*) jelölték (vissza-)négyzetesítéssel elgondolandó számoknak. Geometriai jellegű már a probléma felmerülése is, de ugyanilyen a megoldás is, amit természetesen a számolás egész területére kiterjesztettek. A síkidom (*ἐπιφάνεια*) mérésének tudománya nagyszerű eredményeket hozott: elméletileg elsősorban azt, hogy összemérhetővé tett aritmetikailag összemérhetetlen mennyiségeket. A két módszer egységét is sikerült ugyanakkor megmenteni, hiszen mást sem kellett tenniük, mint a *dünamisz*-t meghonosítani az aritmetikában is, tehát úgy gondolni — a négyzetoldalak és a négyzetterületek analógiájára —, hogy ha bizonyos számokat önmagukban (mintegy a számsorra mért hosszúságokként) nem tudunk összemérni, akkor alkossuk meg ezeknek a négyzetértékét (mintegy szerkesszünk velük négyzeteket), s máris megoldottuk a feladatot.

Ez az eljárás azonban korántsem általános érvényű! Az aritmetika „megmentése" — ha nem is magasabbrendűségének, de legalább a geometriával

való egyenrangúságának a megmentése — az adott kor számolástudományának bizonyos korlátozottságából eredt, durva leegyszerűsítéssel: abból, hogy *geometriai eszközökkel csak négyzetgyököt lehet vonni, köbgyököt már nem.* Ez utóbbi feladat 1. elvileg magasabb rendű, 2. csak matematikai úton oldható meg: ez Hérakleitosz 54. töredékének gondolkodástörténeti kulcsa!

Az algebrai gondolkodás nem ismer számolási nehézséget, ott valóban a négyzetesítés teremti meg a kommenzurábilitás lehetőségét, hiszen a Püthagorasz-tételnek maradéktalanul igaznak kell lennie. Tételezzük fel ugyanis, hogy a és b inkommenzurábilis mennyiség (hosszúság), de mérjük fel őket egy derékszögű háromszög befogói gyanánt és szerkesszük meg a c hosszúságú átfogót, akkor a tétel értemében $a^2 + b^2 = c^2$. Minthogy pedig az egyenlőség két oldalát akár c-vel, akár c^2-tel egyszerűsíthetjük, máris kaptunk közös osztókat, vagyis kommenzurábilis mennyiségekké tettük a^2-et és b^2-et:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c, \quad \text{vagy pedig} \quad \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Bármily nagyszerű eredményeket ért el azonban a görög számolástudomány már Eukleidész előtt is, bármilyen magas fokú is a *geometriai* számításokban megmutatkozó absztrakció, Theaitétosz mind a gondolatmenet kiindulásában, mind — biztos fogózóul — a bizonyításban a vizuális konkrétumokhoz ragaszkodik. Ezen a szinten még természetes, hogy minden számot „síkszámnak" — valamely lerajzolt vagy elképzelt négyszög oldalai szorzatának — gondolnak, s erre igyekeznek visszavezetni a számszerűen meghatározhatatlan (kimondhatatlan) mennyiségeket is; ennyiben, de csak ennyiben helyes azt állítani, hogy a pontosabb mérést szolgáltató geometriát vissza-visszakanyarítják az aritmetikai kiinduláshoz (végső soron a lineáris kommenzurábilitáshoz),[87] *abban a hitben,* hogy vagy *μήκει,* vagy *δυνάμει* minden mennyiségpár összemérhető. Kiváltképp természetes ez a *platóni* Theaitétosz gondolatmenetében: előbb négyzetekké formálja a szám hosszúságú szakaszokat (pontosabban szólva: leolvassa Theodórosz ábráiról, hogy ez a geometriai szerkesztés útja), azután pedig visszafordítja az egészet.[88] A négyzetesítést („négyzetre emelést") mindent megoldó, üdvözítő eljárásnak véli a kommenzurábilitás megteremtéséhez; eszébe sem jut, hogy bizonyos síkok összemérhetetlenek lehetnek, mert nincs közös területi mértékük (vö. Eukl. *Elem.* X def. 2. és X, 10). Ez utóbbi igazságnak a felfedezéséhez azonban túl kellett lépni a

[87] A pont — szakasz — test geometriai nagyságrend általánosan elfogadott és természetes volt, pl. a Philolaosz-hagyományban (VS 44 A 13; B 20), a peripatetikusok matematikatörténeti irataiban (Alexandrosz alapján szól a püthagoreusokról Diogenész Laertiosz, VIII 25 = VS 58 B la), de Arisztotelész hasonló tárgyú szövegeiben (pl. Met. Z 2. 1028 b, N 3. 1090 b) és Platónnál (Nomoi 817 E) is. — Vö. 36. jz.

[88] Vö. 61. jz. — Valamely mennyiség köbértékét, de ennél magasabb hatványát is könnyen lehet síkmértani szerkesztéssel ábrázolni: miután a négyzetértéket a^2 kivetítéssel szakaszban kaptuk meg (vö. 73. jz.), e szakasz két végpontjára a hosszúságú merőlegest emelve, majd ezek végpontját is összekötve $a^2 \cdot a$, vagyis a^3 területű téglalapot nyerünk, amelyet a mértani közép segítségével ugyanekkora területű négyzetté szerkeszthetünk át; ezt az új négyzetterületet ismét kivetíthetjük stb. Fordított eljárásra viszont nincs geometriai lehetőség, síkmértani mód s eszköz: az a^3-nak tételezett x szakaszból elvileg lehetetlen olyan négyzetet szerkeszteni, amelynek az oldala a hosszúságot adna. Ez az az „ugrópont" a matematikában, amikor a tiszta spekuláció magasabbrendűnek bizonyul a geometriánál — pontosabban szólva: a síkmértan (az *ἐπίπεδον* vagy *ἐπιφάνεια)* tudományánál.

síkmértan határain; a *dünamisz*-fogalom felfedezése csak bizonyos szinten és csak ideig-óráig stabilizálta az aritmetikát, s ráadásul éppen a geometria segítségével.

Theaitétosz matematikai tudása és logikája meg sem közelítette a nagy elődökét (Hippokratész, Hippaszosz, Arkhütasz, Philolaosz, Theodórosz); nincs alap ahhoz, hogy akár terminológiáját, akár módszerét túlbecsüljük, s még Eukleidészben is az ő hatását tételezzük fel.[89] Fejtegetésének gondolkodástörténeti érdeme — vagy inkább érdekessége — abban merül ki, hogy naivitása és már-már tévút felé bukdácsoló okoskodása ellenére is, megmagyarázza a „négyzet, négyzetérték" fogalom származását és elszakadását az „érték, váltóérték" fogalomtól.

A „LÁTHATÓ ÖSSZEFÜGGÉSEK" ALKALMAZÁSA

Fogalommá absztrahálni és névvel illetni csak azt képes az ember, amit primér fokon, a gyakorlatból már megismert. Ezt illusztrálja a *δύναμις* matematikai fogalmának keletkezése is; és mert egy adott szakaszból már meg tudták *szerkeszteni* a vele egyenértékű négyzetnek az oldalát, *kiszámítani* — számmal kifejezni — azonban nem, nem alkothatták meg a négyzetgyök aritmetikai fogalmát sem. Beérték tehát azzal a kissé bonyolult meghatározással, hogy ezt vagy azt a mennyiséget négyzetértékben[90] kell elgondolni *(δυνάμει, κατὰ δύναμιν)*. A geometriailag megoldott vagy megoldható — tehát vizuálissá tehető — összefüggéseket terjesztették ki az aritmetika területére, nem pedig fordítva.

Így történt más esetekben is, pl. az *ἀπό* praepositio sajátos jelentésének („valaminek a négyzete") kialakulásában, amely jelentés a *δυνάμει* kifejezéssel egyenrangú már Platónnál *(Politeia*, VIII 546 C—D). Ha nem elégszünk meg ennek puszta deklarásával,[91] hanem a praepositiós kifejezés eredetét keressük, akkor ismét a geometriai alapokhoz kell visszanyúlnunk, ahol az *ἀπό* — egyebek között — az egyenes szerkesztéséhez szükséges pontot mint kiindulást jelöli, továbbá a négyzet szerkesztéséhez adott egyenest, olykor egészen szűkszavú formában: *τὸ ἀπὸ AB* = „az AB szakaszra — mint oldalra — emelt négyzet",[92] amiből az aritmetikai „négyzetérték" jelölése is származik.

Mihelyt azonban elszakad az a köldökzsinór, amely egy-egy fogalmat szülőjéhez — az érzéki konkrétumhoz és az emberi gyakorlathoz — kötött, mind önállóbb életet él, s későbbi jelentésváltozataiban már alig vagy egyáltalán nem mutatkozik meg a genetikus tartalom. Ez áll pl. a *δυναμένη* (ti. *εὐθεῖα)* participium matematikai jelentésére is. Igaz, hogy magának a *δύναμις* főnévnek valamiféle „nemzőerő" jelentése is volt a püthagoreus matematikában, hiszen a számot (számokat) tekintették minden dolog *ἀρχή*-jának (Ariszt. *Met.* Z 11. 1036b 8; Aët. I 3,8; stb.), s a testeket is számokból összetett és azokból származó dolgoknak tartották (Ariszt. *Met.* M 8. 1083b 8), a *δύνασθαι* igét sehol nem találjuk „nemzeni, létrehozni" jelentésben — tarthatalan tehát a Tannery-elmélet, amely a participiumot „területképző (négyzetképző) egyenes"-nek, a főnevet pedig „nemzett (megalkotott) terület"-nek fogja fel. Tény viszont,

[89] Ellenkezőleg (Th. Heath felfogásához csatlakozva): *Ch. Mugler:* id. mű, 150. és 152.
[90] Ez a *δύναμις* főnév, majd a *δύνασθαι* ige *szekundér* jelentése.
[91] A. Ahlvers alapján: *Szabó Á.:* id. mű, 116.
[92] *Ch. Mugler:* id. mű, 22. és 72 k.

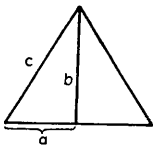
hogy a participium jelentése mindig és következetesen: „négyzetoldal", ezt tehát valamiképpen meg kell értenünk. — Meggyőződésem, hogy ezt a jelentést immár az aritmetika kölcsönzi a geometria számára; *miután* ugyanis a vizualitástól és a „négyzetté formált szakasz (egyen)értéke" jelentéstől különvált az ige, sőt — elnézést az álpoétikus fordulatért — származására már nem is emlékezve „négyzetben érni" jelentéssel funkcionált, magától értetődővé vált e jelentés kiterjesztése a geometriára is: a „négyzetben értendő szakasz" nem is lehetett más, mint a „négyzet oldala", pontosabban és szűkebben értelmezve „az a szakasz (egyenes), amelyet nem önmagában kell elgondolnunk, hanem egy képzeletbeli négyzet oldalaként".

A fogalmak efféle önállósulása még a matematikai szövegekben is okozhat zavart. Nem Theaitétosz fejtegetésére gondolok, amelyet úgy kell olvasni, mint egy drámai hős — korántsem főhős — monológját, s amelyet nem ajánlatos sem Platón felfogásával, sem a korabeli matematika legfelsőbb szintjével azonosítani, hanem egyes szinonimák (pl. *ἐπίπεδον* és *ἐπιφάνεια)* párhuzamos alkalmazására vagy kisebb pontatlanságokra (pl. *τετράγωνον* és *δύναμις* különbségének elmosására). Ami azonban éppen a *δύναμις* főnevet illeti, ezt — legalábbis a szakemberek — következetesen a „négyzetérték, négyzet" jelölésére használták (ismétlem: miután az „egyenérték" jelentéssel többé nem törődtek). Ez természetesen Platónra is érvényes, s nem utolsósorban. Ennek ellenére még a jelenkori szakirodalomban is sokszor előbukkan az a Szabó Á. által behatóan bírált és végső soron a „Theaitétosz" önkényes interpretációjára támaszkodó felfogás, hogy a *δύναμις* egyszerre jelent négyzetoldalt, négyzetet, négyzetgyököt stb. Mielőtt egy fontos részproblémát igyekeznék megvilágítani, a tekintélyelvre apellálok: egyáltalán elképzelhető-e a fogalmak tiszta, tudatos és egyértelmű használatát mindennél többre becsülő Szókratészről vagy Platónról, hogy ugyanazzal a szóval egyszer ezt jelölje, máskor meg amazt — méghozzá éppen valami olyasmit, ami az első értelmezéstől alapjában különbözik, sőt azzal szemben áll? Ilyesmivel még Theaitétoszt sem merném megvádolni.

A kiváló tudós, *Ch. Mugler* a jelentésvariációk dolgában — sajnos — konzervatívnak bizonyul,[93] s a „Timaiosz" című dialógus egyik mondatából hibásan következtet a *κατὰ δύναμιν* kifejezés „négyzetgyök szerint" értelmezésére. A dialógus címszereplője kozmogóniai és kozmológiai teljességet kínáló monológjában — melyben egyes ókori szerzők Philolaosz gyanúsan közvetlen hatását vélték felfedezni —[94] az isteni teremtés és rend matematikai tökéletességét magyarázza, s az idomok és testek arányaiban is a legszebb lehetőségeket kutatja. Eközben osztályozza a háromszögeket, mondván, hogy a derékszögű háromszögek egyik típusának (ti. az egyenlő szárúnak) csak egy „természete" van, a másik típusának (ti. az egyenlőtlen szárúnak, a „hosszúkásnak") viszont végtelen; e végtelen lehetőségek közül kívánja kiválasztani a legszebbet, mégpedig azt, amelyiknek két azonos méretű darabjából harmadjára egy egyenlő oldalú háromszög alakul ki. Ehhez pedig: *Προῃρήσθω δὴ δύο τρίγωνα, . . . τὸ μὲν ἰσοσκελές, τὸ δὲ τριπλῆν κατὰ δύναμιν ἔχον τῆς ἐλάττονος τὴν μείζω πλευρὰν ἀεί. (Tim.* 54 B) „Válasszunk ki tehát két (derékszögű) háromszöget: az egyik legyen egyenlő szárú, a másik pedig olyan, amely-

[93] J. Souilhé könyvére (Étude sur le terme *δύναμις* dans les dialogues de Platon. Paris 1919) hivatkozva, id. mű, 150., sajnálatosan mellőzve az „et passim" adalékait.
[94] Hermipposz alapján, Diogenész Laertiosz VIII 84.

nek a nagyobb oldala (= befogója) — négyzetértékben számítva — a kisebbnek a háromszorosa." Nem meglepő, hogy ez utóbbit a „legszebb" jelzővel illeti Timaiosz, hiszen elgondolni és megszerkeszteni sem könnyű, a két befogó arányát pedig csak négyzetértékben *(κατὰ δύναμιν)* lehet kifejezni:[95]



6. ábra

A két egybevágó derékszögű háromszöget nagyobbik befogójuk *(b)* mentén illesztve egymáshoz, kapunk egy új háromszöget, amelynek az oldala *c*, vagyis a posztulátum értelmében *2 a*. Továbbá (c^2 helyett $4\,a^2$-et írva): $4a^2 - a^2 = b^2$, $3a^2 = b^2$, vagyis a kisebb befogó négyzetének háromszorosa egyenlő a nagyobb befogó négyzetével. Miután 3-ból nem tudunk aritmetikailag négyzetgyököt vonni, az egyenlőség sem egyszerűsíthető tovább.

Timaiosz sajnos éppen annak bizonyítását mellőzi, hogy mi indította ennek a háromszög-típusnak a választására — mondván, hogy ez hosszabb érvelést kívánna —, és mert őt mint püthagoreust az arányok számszerű megragadásának lehetősége foglalkoztatja, a szerkesztés problémáját fel sem veti. Az ő számára csak az a fontos, hogy a befogók arányát — melyet nyilvánvalóan úgy fedezett fel, hogy előbb megrajzolta (legalábbis elméletben) az egyenlő oldalú háromszöget s annak egyik csúcsából merőlegest bocsátott a szemben fekvő oldal felező pontjára, majd a Püthagorasz-tétel szerint végezte el a számításokat — a *κατὰ δύναμιν* formulával ki tudta fejezni. Ebben semmiféle elméleti újdonság nincs: a síkmértan minden tétele végső soron a Thalész- és Püthagorasz-tétellel igazolható, amelyeknek már régen igazolt általános érvénye felmenti a matematikust az alól, hogy valamennyi új eredményt vizuálisan érzékeltessen. Az elvi lényeget tekintve tehát ugyanoda jutunk, mint a *δύναμις*-ban rejlő lehetőséget kiaknázó egyéb szövegekben: bizonyos lineárisan összemérhetetlen mennyiségek (szakaszok) négyzetértékben összemérhetőkké válnak.

Igaz persze, hogy a modern matematika nem elégszik meg ezzel, s azt mondja, hogy a kapott egyenlőség igenis egyszerűsíthető, mert lehet gyököt vonni az egyenlőségből: $3a^2 = b^2$ helyett azt is írhatjuk, hogy $a\sqrt{3} = b$. Abba azonban bele kell törődnünk, hogy a görögök *nem* jutottak el oda, hogy a geometrialilag reverzibilis eljárásokat (négyzetgyökvonás és négyzetre emelés) a „négyzetgyök" terminusának megalkotásához hasznosítsák; annak tudatában — pontosabban: annak felismerése után —, hogy „a hosszúságok mindenképp összemérhetők négyzetben is, de a négyzetben összemérhető (síkok) nem mindenképp azok szakaszban is" (Eukl. X, 9 coroll.),[96] a kommenzurábilitás megtalálását és kifejezését tartva fontosnak, a négyzetre emeléssel tudták *bizonyos* lineárisan („első hatványon") inkommenzurábilis mennyiségek arányát megfogalmazni. — Nem indokolt tehát Ch. Mugler modernizáló fordí-

[95] A hely magyarázatához vö.: Platón Összes Művei, id. kiad. II, 616 k.

[96] Csak nem fogjuk e jellegzetesen geometriai terminológiájú mondatban a *μήκει* dat.-t — a *δυνάμει* ellentétét — úgy fordítani, hogy „négyzetgyökben"?

tása, ha matematikailag helyes is: „et un autre triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit soient dans le rapport $\sqrt{3} : 1$".[97]

A gondolkodás theaitétoszi szintjén valóban a „megmutathatóság" tudománya a (sík)mértan, hiszen az összefüggéseket (arányokat) a lineáris kommenzurábilitásra vezeti vissza. Ez azonban — mint fentebb utaltunk rá — nem volt elengedhetetlen követelmény: nem úgy fejlődik a tudomány, hogy a tizedik, századik, ezredik tétel igazságát is a legelsőre vezeti vissza, hanem a már igaznak elismert legmagasabb rendű előzményekből indul tovább. A Timaiosz számára legszebb háromszög-típus esetében sem lehet *közvetlenül* belátni, s még kevésbé meglátni, hogy milyen arányban állnak a befogók; sőt a számsorra (egyenesre) is hiába mérnénk le őket, nem önmagukban, hanem négyzetértékük szerint mutatkoznának összemérhetőnek, ami *utólag* igazolná a logikailag kapott eredményt. — A síkmértanban addig marad meg ez az igazolási lehetőség, amíg második hatványú és gyökű mennyiségekkel dolgoznak, de nem okvetlenül alkalmazzák: megbíznak az eszükben. Ezért tudnak konstruálni olyan, csak négyzetértékben megfogalmazható arányokat, amelyekben a keresett mennyiség (hosszúság) ugyanúgy „látható" és körzővel-vonalzóval pontosan megmérhető, mint a négyzet átlója, de amelyeket számmal kifejezni nem lehet, s ezért gyakorlati alkalmazásuk is csak megközelítően lehet pontos.

A „Timaiosz" egyik előző fejezetében olvashatunk egy másik — ugyancsak „legszebbnek" — nevezett arányról: „Kezdetben tűzből és földből formálta az isten a mindenség testi elrendezését. Harmadik nélkül azonban nem lehetséges, hogy e mindössze kettő szépen rendeződjék el: kell, hogy legyen közbül egy kapocs, amely a kettőt összeköti — a kapcsok közül pedig az a legszebb, amely önmagát és az összekapcsoltakat a leginkább eggyé teheti. Ennek a legszebb megvalósítására való az arányosság *(ἀναλογία)* . . . " *(Tim.* 31 B—C.) A folytatásban azt fejtegeti Timaiosz, hogy e kapcsolódás a „síkszámok" esetében egy, a „térszámok" esetében két közbülső tagot kíván, vagyis a Hippokratész és Arkhütasz által már megfogalmazott tételeket építi gondolatmenetébe — a „síkszámok" (a két-két szám szorzatából alakult számok) esetében tehát: az első úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz, s így a második (a „kapocs") négyzete az első és a harmadik szorzatával egyenlő, tehát azoknak mértani középarányosa.

Ennek az arányképzésnek volt speciális esete az „aranymetszés"[98] — vagyis egy kisebb és egy nagyobb mennyiség olyan arányítása, melyben a kisebb úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobb a kettő összegéhez, tehát:

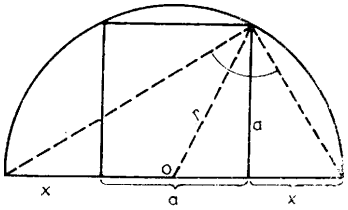
$$x : a = a : (a + x)$$

A két mennyiség közül a nagyobbat (a) véve ismertnek, a kisebb mennyiség (x) és — ennek birtokában — az összeg $(a + x)$ megkeresése a következő módon látszik a legegyszerűbbnek[99], időben tehát elsőnek:

[97] *Ch. Mugler:* id. mű, 150.

[98] Ennek az arányképzésnek csupán elvi *lehetőségét* olvashatjuk ki a középarányosnak akár Platónnál kifejtett, akár elődeinél vázolt (Archytas B 2; vö. *Szabó Á.:* id. mű, 217 skk.) elméletéből! Vö. 100. jz.

[99] Másképp —a babilóniai példák szerint szerkesztett püthagoreus pentagramma oldalainak metszésarányával — magyarázza *B. L. v. d. Waerden:* id. mű, 165 skk.



$x : a = a : (a + x)$

7. ábra

Az a mennyiséggel (hosszúsággal) mint oldallal négyzetet szerkesztünk, majd az oldal felezőpontjából a szemközti oldal két végpontját érintő körívet rajzolunk (a sugár: r). Mindkét irányban a metszőpontig meghosszabbítjuk az oldalt, majd az egyik csúccsal összekötve háromszöget — mégpedig, a Thalész-tétel értelmében, derékszögű háromszöget — kapunk. Mivel itt

$$r^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}, \quad \text{tehát} \quad r = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$x = r - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} = 0{,}618033\ldots\, a$$

Így tehát $a + x$ (a gyökvonás matematikai elvégzése után) $= 1{,}618033\ldots a$

Aritmetikailag ezt a műveletet a görögök nem tudták elvégezni, de tudták, hogy a — mint az átfogóra bocsátott magasság — mértani középarányos x és $(a + x)$ között, vagyis geometriailag megoldották a feladatot, s a keresett mennyiséget is — kimondhatatlansága, „irracionalitása" ellenére — pontosan megkapták.

Ennek a sajátos arányításnak („látható összefüggésnek") jelentős szerepe lett a képzőművészetben: a korábban csak számszerűen rögzített arányításokat (pl. $y = 2x + 1$, a templomok hosszú és rövid oldalain emelt oszlopok esetében) finomabb lehetőséggel gazdagította — a geometria jóvoltából. A csak végtelen tizedes törtben kifejezhető „aranymetszés" gyakorlati alkalmazását természetesen korlátozták a műfaj és az anyag lehetőségei, de minthogy megközelítő pontossággal egész számok arányát is lehetett hozzá közelíteni (nevezetesen: 21 : 34 = 34 : 55, illetve: 34 : 21 = 55 : 34), talán még az epidauroszi színház *cavea*-jának a *diazóma* horizontális vonalával kettéosztott széksorai számát is eszerint tervezte meg Polükleitosz.[100]

[100] Megvesztegetően, de nem meggyőzően érdekes tanulmányban ír erről *J. Bousquet:* Harmonie au théatre d'Épidaure. Rev. Arch. XLI. 1953. 41 skk. Nem látom bizonyítottnak sem a „Timaiosz" sokkal általánosabb arányelméletével való közvetlen összefüggést, sem Theodórosz hatását. Vö.: *P. H. Michel:* id. mű, 576 skk. — A dialógus 32 B pontját elemezve írja *Ch. Mugler* (Les dimensions de l'Univers platonicien. REG 66, 1953, 56 skk.), hogy az okfejtés a kocka térfogatának kiszámításával és a köbgyökvonás megoldottságával függ össze; az utóbbit sem bizonyítottnak, sem az eljáráshoz nélkülözhetetlennek nem látom. — Az arányosság objektív és általános törvényszerűségét, mint a platóni világrend „metafizikai" lényegét, mutatja ki a 31 C alapján *R. J. Mortley* (The Bond of the Cosmos: a Significant Metaphor. Hermes 97, 1969, 372 skk.)

Dolgozatom eddigi részében a „látható összefüggés"-nek — a síkmértan lényegének — értelmezésével foglalkoztam. Problematikusnak tűnhet természetesen, hogy a Hérakleitosz munkásságánál száz vagy százötven évvel későbbi szövegekből szabad-e visszakövetkeztetni az ő harmóniaelméletére. Erről tehát még néhány szót.

KÉTFÉLE HARMÓNIA – KÉT ARÁNYÍTÁSI MÓDSZER

Abból indultunk ki, hogy Hérakleitosz filozófiájában szembetűnő fontossága van az arányításnak: azt a számszerű törvényt kutatja, amely a világmindenség egészének és részeinek ellentmondásos létét meghatározza, illetve abban a helyes gondolkodás számára megragadható módon objektiválódik. Az emberi megismerés kiindulási alapjának az érzékelést tekinti, magasabb rendű és adekvát módjának azonban az elméleti elvonatkoztatást s általánosítást, amely a más-más formájú jelenségekben is képes megragadni a közös lényeget. Ezt a számos töredékében hangsúlyozott meggyőződést azonban gondolkodási *eredményként* közli, anélkül, hogy a bizonyítási *eljárást* is jelezné. Ezért kényszerülünk azoknak a történeti előzményeknek — többé-kevésbé óhatatlanul hipotétikus — rekonstruálására, amelyekre (akár alkalmazás, akár vita formájában) elméletét és módszerét építette.

A források természetéből következik, hogy az értelmezéshez későbbi szövegeket kellett segítségül hívnunk, felhasználva természetesen a tudománytörténet eddigi eredményeit is. A „látható (megnyilvánuló, kimutatható)" és a „láthatatlan (érzékileg megragadhatatlan)" összefüggés mibenlétének és viszonyításának a kutatása késztetett bennünket a terminusok filológiai értelmezésére, sőt arra is, hogy hosszú vargabetűt írjunk le az *ideiglenes és* — ismétlem — *szükségképpen hipotétikus* összegezéshez.

Úgy hiszem, az alábbiakat sikerült bebizonyítanom:

A „látható összefüggés" sajátosan geometriai fogalom, a síkmértan azon módszerére vonatkozik, amely teljes pontossággal képes összemérni vagy konstruálni számszerűen összemérhetetlen mennyiségeket (nagyságokat) is. Ez az eljárás végső soron a lineáris összeméréssel bizonyít (ezért volt fontos a *púsz*- „láb" és „négyzetláb" értelmezése); képes arra, hogy hosszúságokat számszerűen azonos nagyságú területekké változtasson (*dünamisz* értelmezése), sőt arra is, hogy „szebb" arányokat szerkesszen (pl. aranymetszés), mint az aritmetika. — A „láthatatlan összefüggés" viszont sajátosan matematikai fogalom, a térmértan azon módszerére vonatkozik, amely elméleti úton képes síkmértani eljárással megkonstruálhatatlan arányok tételezésére (köbgyökvonás), annál tehát magasabb rendű („erősebb"). Úgy tűnik tehát, hogy a probléma már Hippokratész előtt felmerült, s hogy ez adja meg a kulcsot Hérakleitosz 54. töredékének interpretálásához.[101]

Dolgozatom folytatásában elemzem majd azokat az egyéb (gazdasági) adalékokat, amelyek Hérakleitosz módszerének és harmóniaelméletének sajátságait általánosabban evokálták.

[101] Ezért is kell rámutatni a sztereometria és matematika szoros kapcsolatára, amelyet Theophrasztosz Püthagorasznak tulajdonított (Aëtius kivonatában: II 6,5 = VS 44 A 15), és az érzéki megismeréstől elforduló „theória" (vö. *Fr. Thordarson: ΟΡΩ—ΒΛΕΠΩ —ΘΕΩΡΩ* — Some Semantic Remarks. Symb. Osl. XLVI. 1971. 108 skk.) matematikai indítékaira