AZ IMPLIKÁCIÓ NÉHÁNY PROBLÉMÁJA

RUZSA IMRE

A mai logikai irodalomban általában *implikációnak* nevezik a „ha *A*, akkor *B*" alakú kijelentéseket. E meglehetősen tág forma legegyszerűbb esete az, amelyben *A* és *B* *kijelentő mondatok*. Példákkal illusztrálva:

(1) Ha ma szerda van, akkor holnap csütörtök lesz.

(2) Ha idejében elkészülünk a dokumentációval, akkor prémiumot kapunk.

A továbbiakban túlnyomó részben az implikáció e típusával fogunk foglalkozni. Ezért ha megkülönböztető jelző nélkül használjuk az *implikáció* szót, ezen mindig olyan „ha *A*, akkor *B*" alakú kijelentést értünk, amelyben *A* és *B* kijelentő mondatok. *A*-t az implikáció *előtagjának*, *B*-t pedig *utótagjának* nevezzük.

AZ IMPLIKÁCIÓ LOGIKAI ÉRTÉKE

Mikor tekinthetjük az implikációt *igaznak?* Rendkívül nehéz erre a nagyon egyszerű kérdésre általános érvényű választ adni. A nehézség egyik forrása az, hogy *az implikáció lényegesen különböző kapcsolatok közös kifejezési formája.* Így például az implikáció kifejezheti azt, hogy *az előtag igazsága törvényszerűen maga után vonja az utótag igazságát.* A „törvényszerűség" lehet természeti törvény, mint ebben a példában:

(3) Ha a víz hőmérséklete meghaladja a 100 C°-ot, akkor (a víz) felforr.[1]

Lehet olyan „törvény" is, amely a szavak jelentésén és bizonyos közmegállapodásokon nyugszik, mint pl. az (1) alatti kijelentés. Az ilyen típusú törvényszerűségek egy részét „logikai törvényeknek" nevezik, ezeket szemléltetik a következő példák:

(4) Ha minden változik, akkor a társadalmi rend (is) változik.

(5) Ha minden ember halandó, és Szókratész ember, akkor Szókratész (is) halandó.

[1] A rövidebb fogalmazás kedvéért példánkban az előtag nem tartalmazza mindazon feltételeket (pl. a nyomási feltételt), amelyek a víz 100 C°-on való forrásához szükségesek.

Az implikáció biztosan igaz, ha előtagjának igazsága elkerülhetetlenül, törvényszerűen maga után vonja utótagjának igazságát. Ebben az esetben teljesen közömbös, hogy az implikáció *tagjai* igazak-e. Világos, hogy (1) értelmes és igaz olyankor is, amikor az előtag (ma szerda van) hamis, pl. vasárnap. Hasonlóan (3) értelmes és igaz ott és akkor is, ahol és amikor a víz hőmérséklete nem haladja meg a 100 C°-ot.

De az implikációt nemcsak törvényszerű összefüggések kifejezésére használjuk. Implikáció formájában fejezzük ki a *feltételes ígéreteket és előrelátásokat* (jóslásokat) is. Például:

(6) Ha elmarad az értekezlet, (akkor) felhívlak telefonon.

Világos, hogy itt szó sincs arról, hogy az „elmarad az értekezlet" igazsága maga után vonná a „felhívlak telefonon" állítás[2] igazságát; ezt sem a természet, sem a logika törvényei nem biztosítják. Az idézett kijelentés pusztán egy feltételes ígéret, noha alakját tekintve semmiben sem különbözik a törvényszerűségeket kifejező implikációktól. Ha az implikációt csak abban az esetben tartanánk igaznak, amikor előtagjának igazsága magában foglalja vagy kikényszeríti utótagjának igazságát, akkor a fenti kijelentést minden további nélkül hamisnak kellene minősítenünk. Ezzel persze éles ellentétbe kerülnénk a közfelfogással. A közfelfogás a fenti kijelentést *utólagosan* ítéli meg, a következő módon. *Ha igazzá válik az előtag* („elmarad az értekezlet"), akkor az egész összetett mondat, azaz a (6) alatti feltételes ígéret az utótag („felhívlak telefonon") igaz vagy hamis volta szerint lesz igaz vagy hamis. Valóban, ha az értekezlet elmarad, akkor az a személy, aki a (6) kijelentést tette, betartotta ígéretét (tehát igazat mondott), ha felhív telefonon, és nem tartotta be szavát (hamisat állított), ha nem hív fel telefonon. Ha történetesen az értekezlet nem marad el, akkor az ígérettevőt semmiképp sem lehet hazugságon rajtakapni (már ti. a szóban forgó ígéretével kapcsolatban nem), hiszen erre az esetre semmit sem ígért. *Az előtag hamissága esetén a feltételes ígéret semmiképp sem lehet hamis.* Akkor tehát igaz? Erre vonatkozóan a közfelfogás megoszlik. A többségnek bizonyára az a véleménye, hogy az előtag hamissága esetén a feltételes ígéret se nem igaz, se nem hamis, hanem egyszerűen — *tárgytalan.* A kisebbség, amely ragaszkodik hozzá, hogy az előtag és az utótag igazságértékének ismeretében a feltételes ígéret igazságának eldönthetőnek kell lennie, természetesen nem választhat másképp, mint hogy igaznak minősítse azt. Összefoglalva: feltételes ígéretet kifejező implikáció esetén érvényes a következő „értéktáblázat":[3]

(7)

A (előtag)	*B* (utótag)	*Ha A, akkor B* (feltételes állítás)
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	{akár igaz, akár hamis}	nem cáfolható (tárgytalan vagy igaz)

[2] Az „állítás", „kijelentés", „ítélet" szavak e cikkben szinoním értelemben szerepelnek.

[3] Az „igaz" és a „hamis" tulajdonságokat (amelyekkel kijelentések rendelkezhetnek) *logikai értékeknek* vagy *igazságértékeknek* nevezik. A továbbiakban a „logikai érték", „igazságérték" (néha csak röviden: „érték") kifejezés mindig ezekre utal.

Gyakori az olyan implikáció is, amelynek utótagja (esetleg mindkét tagja) valamely egyszeri eseménynek a jövőben való bekövetkezését állítja, pl.:

(8) Ha az elnök támogatja a javaslatot, akkor a közgyűlés el fogja fogadni (a javaslatot).

(A zárójelbe tett szövegrészt az élő beszédben elhagyjuk. Itt csak azért írtuk ki, hogy az implikáció utótagja mint *teljes mondat* felismerhető legyen. A továbbiakban azonban az elő- és az utótag közös mondatrészeinek kiírása tekintetében az élő beszéd gyakorlatát fogjuk követni.) Nem könnyű válaszolni arra a kérdésre, hogy e példában az előtag igazsága törvényszerűen maga után vonja-e az utótag igazságát — még akkor sem, ha az állításban szereplő személyeket és körülményeket tüzetesen ismerjük. Előfordulhat, hogy valaki annyira ismeri a körülményeket és a szereplőket, hogy e kérdésre határozott igennel válaszol. De alig valószínű, hogy e mondat elő- és utótagja között olyan *objektív* kapcsolat mutatható ki, mint mondjuk az (1) vagy a (3) implikáció tagjai között. Érthető, hogy a közfelfogás a mostani példánkhoz hasonló implikációkat többnyire ugyanúgy kezeli, mint a feltételes ígéreteket: igazságukat csak *a posteriori*, a tagok logikai értékének (igaz, ill. hamis voltának) ismeretében tekinti véglegesen eldönthetőnek, s az igazságérték meghatározása során is ugyanazt az elvet követi, mint a feltételes ígéretek esetében. — Megjegyezzük, hogy a (2) alatti példánk is ugyanebbe a típusba sorolható.

Az előbbivel rokon eset: az implikáció tagjai egyszeri, de a jelenben lejátszódó (történő) esemény bekövetkezését állítják. Példa:

Ha Klofár most otthon van, akkor szabadnapos.

Ismét előfordulhat, hogy valaki nagyon alapos érvek alapján tartja igaznak ezt az implikációt, de ebben az esetben is alig hihető, hogy olyan objektív törvényszerűség volna kimutatható, amelynek értelmében az előtag igazsága kényszerítő erővel vonná maga után az utótag igazságát. A közfelfogás ezt a típust is rendszerint úgy kezeli, mint a feltételes ígéreteket.

Az eddigiek alapján az implikáció logikai értékére vonatkozóan ennyit állapíthatunk meg: *(a)* Ha az implikáció előtagjának igazsága szükségszerűen maga után vonja utótagjának igazságát, akkor az implikáció igaz, tagjainak logikai értékétől függetlenül. *(b)* Bizonyos esetekben az implikációt csupán feltételes állításnak tekintjük, és igaz vagy hamis voltát csak tagjai logikai értékének ismeretében állapíthatjuk meg, mégpedig a (7) értéktáblázat alapján. Kérdés, hogy e két típussal kimerítettük-e az összes lehetőségeket, továbbá hogy hogyan lehetne e két típust szabatosan elhatárolni.

A második problémát illetően tekintsük először a következő példát:

Ha a víz hőmérséklete 100 C°, akkor a víz megfagy.

Ezt az implikációt, tagjai értékétől függetlenül, hamisnak tartjuk, mert jól tudjuk: valahányszor előtagja igaz, utótagja törvényszerűen hamis. Tehát úgy tekintjük, mint olyan implikációt, amely törvényszerű összefüggést szándékozik kifejezni, de amely persze hamis.

Ám egyes esetekben az implikáció felfogható úgy is, mint amely szükségszerű összefüggést állít, de úgy is, mint feltételes állítás. Egy ilyen példa:

(9) Ha ma alkonyatra vörös lesz az ég alja,
akkor hajnalra fagyni fog.

Ha ezt feltételes előrejelzésnek tekintjük, akkor (utólag) igaznak bizonyulhat — amennyiben a szóban forgó napon alkonyatkor az ég alja vörös, és a következő hajnalon valóban fagy észlelhető. De természetesen az előtag igazsága (önmagában) nem vonja maga után az utótag igazságát, és ezért ha (9)-et törvényszerű összefüggést kifejező implikációnak tekintenénk, akkor hamisnak kellene minősítenünk. De hát minek tekintsük? — És ezt a kérdést persze minden hasonló példával kapcsolatban föl lehet vetni. Aki állítja (9)-et, az *talán* tudatában van annak, hogy milyen értelemben — törvényszerű összefüggésként vagy pusztán feltételes előrejelzésként — állítja, de az általános nyelvi gyakorlat ritkán tesz különbséget a kifejezési formában. Célszerűnek mutatkozik megállapodni a következőben: amennyiben a „ha A, akkor B" alakú implikációval azt akarjuk kifejezni, hogy előtagjának igazsága törvényszerűen, *szükségszerűen* maga után vonja utótagjának igazságát, úgy ezt a

Szükségszerű, hogy ha A, akkor B

alakban fejezzük ki, és ezt a kijelentési formát (*C. I. Lewis* amerikai logikus nyomán) *szigorú implikációnak* nevezzük. A szigorú implikáció igaz, ha előtagjának igazsága szükségszerűen maga után vonja utótagjának igazságát, s minden más esetben hamis. (Tehát akkor is hamis, ha ténylegesen mind előtagja, mind utótagja igaz ugyan, de ez, hogy úgy mondjuk, a *véletlen* műve, mert az előtag igazsága nem foglalja magában, nem kényszeríti ki az utótag igazságát.) Így pl. a

Szükségszerű, hogy ha Balambér a Rákóczi úton lakik, akkor négyemeletes házban lakik

kijelentés akkor is hamis, ha Balambér történetesen egy Rákóczi úti négyemeletes házban lakik; hiszen ez puszta véletlen: lakhatna a Rákóczi úton háromemeletes házban is.

A szigorú implikáció bevezetésével *látszólag* nagy lépést tettünk az implikáció értékelése tekintetében. A szigorú implikáció igaz vagy hamis voltát (legalábbis elvben) könnyű eldönteni: csak azt kell megállapítani, hogy előtagjának igazsága *szükségszerűen* maga után vonja-e utótagjának igazságát. Ám itt föllép a nagy kérdés: mit kell értenünk szükségszerűségen? Általánosan elfogadott, hogy ha az előtag *logikailag tartalmazza* az utótagot — mint a (4) és az (5) példában —, akkor ezt feltétlenül úgy kell tekinteni, hogy az előtag igazsága szükségszerűen maga után vonja az utótag igazságát. Természetesen precizírozásra szorul a „logikai tartalmazás" fogalma is; e kapcsolatról az idézett példák már adnak bizonyos tájékoztatást; később még visszatérünk a kérdésre. De nem kell a szükségszerűséget a logikai szükségszerűségre korlátoznunk (hacsak nem vagyunk idealista filozófiai előítéletek rabjai). Logikailag semmi akadálya annak, hogy a természeti törvényeket kifejező implikációkat szükségszerűen igazaknak (azaz az ilyen törvényeket állító szigorú implikációkat igazaknak) tekintsük. A szigorú implikációval való logikai műveletek során csupán két dologra kell ügyelnünk: *(a)* a szükségszerűség fogalmát egy eljárás keretében végig azonos értelemben használjuk; *(b)* a szükségszerűség fogalmába mindig értsük bele a logikai szükségszerűséget. E szabályok betartása mellett elvileg nem juthatunk hamis, a valósággal összeütköző eredményhez.

A szigorú implikáció logikai értékét csak abban az esetben lehet pusztán logikai eszközökkel megállapítani, ha szükségszerűségen kizárólag a logikai tartalmazást értjük. Ha már pl. a természeti törvényeket is szükségszerű törvényeknek tekintjük, akkor az ilyeneket kifejező implikációk igazságát az esetek többségében nem lehet pusztán logikai eszközökkel eldönteni, hanem csak a megfelelő szaktudomány felhasználásával. Így azt, hogy a (3) implikáció szükségszerűen igaz, semmiféle logikai elemzéssel nem lehet megállapítani.

Az eddig bemutatott típusok nem merítik ki az implikáció lehetséges típusait. Tekintsük a következő példákat:

(10)
- Ha minden differenciálható függvény integrálható, akkor Egyenlítői Guinea jelenlegi elnöke F. M. Nguema.
- Ha a Canadian River kanadai folyó, akkor Komszomolszk a Türkmén SzSzK egyik városa.
- Ha Komszomolszk a Türkmén SzSzK egyik városa, akkor Egyenlítői Guinea jelenlegi elnöke F. M. Nguema.
- Ha minden differenciálható függvény folytonos, akkor a Canadian River kanadai folyó.

E példák mindegyikében mind az előtag, mind az utótag meghatározott logikai értékkel bír. Lehet, hogy valaki nem ismeri a komponensek értékeit, de mindenki tudja, hogy a szereplő tagok *konstans* logikai értékkel rendelkeznek, és ezeket az értékeket megfelelő forrásmunkákból megállapíthatjuk. De akár ismerjük a komponensek igaz vagy hamis voltát, akár nem, mindenképpen zavarba kerülünk, ha azt kérdezik: igazak vagy hamisak-e ezek az implikációk? A többség bizonyára hamisnak vagy értelmetlennek tartja ezeket (a komponensek logikai értékétől függetlenül), és csak kevesen lesznek, akik a komponensek értékei alapján akarnak dönteni. Nos, az első példában mind az előtag, mind az utótag igaz, a második és a harmadik példában az előtag hamis, az utótag a második példában hamis, a harmadikban igaz, s végül a negyedik példában az előtag igaz, az utótag hamis. Következésképp a (7) táblázat szerint értékelve, csak az utolsó mondat adódik hamisnak.

Szerencsére ez a bizonytalanság nem okoz komoly zavart. A gyakorlatban semmi szükség nincs arra, hogy logikai értéket tulajdonítsunk az ilyen implikációknak. Hiszen egy implikáció gyakorlatilag akkor válik fontossá, ha előtagjának igazságából utótagjának igazságára akarunk következtetni. De minek következtessünk az előtagból, ha *ismerjük* az utótag logikai értékét? Ha pedig arra a kérdésre vagyunk kíváncsiak, hogy az előtag igazsága *szükségszerűen* maga után vonja-e az utótag igazságát, akkor az esetek többségében amúgy is a megfelelő szaktudományokhoz kell fordulnunk. (Mellesleg: a (10) alatti implikációkból képzett *szigorú* implikációk hamisak: ennek megállapításához nincs szükség bonyolult szakismeretekre.)

Általánosságban is megállapíthatjuk: egy implikációval kapcsolatban a logika csak annak megállapítására vállalkozhat, hogy az előtag logikailag tartalmazza-e az utótagot. Minden olyan esetben, amikor az előtagból nem következik puszta logikai szükségszerűséggel az utótag, az implikáció igaz, hamis vagy esetleg értelmetlen voltának eldöntése nem a logika, hanem a gyakorlat,

a tapasztalat és a szaktudományok feladata. (Ez a szigorú implikációra is vonatkozik.) A logika fő feladata az implikációval kapcsolatban annak megállapítása, hogy *mire következtethetünk* egy (vagy több) implikáció igazságából, vagy hogy *miből következtethetünk* egy implikáció igaz vagy hamis voltára.

Az ókori és a középkori logikában elkeseredett és meddő vitákat folytattak az implikáció logikai értékének meghatározásáról. Tekintettel arra, hogy egyrészt a „ha . . . akkor" kötőszavak használata az élő beszédben nem egyértelmű, másrészt bizonyos esetekben a közfelfogás szélsőséges ingadozásokat mutat az implikáció értékelése tekintetében, világos, hogy az implikációt illető vitának eredménytelennek kellett lennie. Egy nem-szabatos fogalomból csak bizonyos korlátozások, szűkítések árán lehet szabatos fogalmat alkotni. Éppen ezért illúzió az implikáció olyan szabatos meghatározására törekedni, amely adekvát az élő beszédben használt, heterogén és gyakran bizonytalan jelentésű „ha . . . akkor" kijelentéskapcsolattal.

Ez a megállapítás valójában nemcsak a „ha . . . akkor" kapcsolatra érvényes, hanem minden olyan nyelvtani kapcsolatra, amely logikai reláció kifejezésére alkalmas. Így a „nem" kötőszóhoz kapcsolódó logikai művelet, a *negáció* (tagadás) esetén a logika a következő „korlátozást" vezeti be: igaz állítás tagadása hamis, hamis állítás tagadása igaz. Ez annyira természetesnek tűnik, hogy nem is érezzük korlátozásnak. Egyszerűbb esetekben nem is okoz problémát. De ha már pl. azt kérdezzük, mi a tagadása annak az állításnak, hogy „minden villamoson van kalauz", nem ritkán a következő választ kapjuk: „egyetlen villamoson sincs kalauz". Tehát vannak, akik *úgy érzik*, ezzel tagadják az előbbi állítást. De ez az „érzés" már összeütközésbe kerül a negációra vonatkozó fent idézett „korlátozással". Ugyanis ha történetesen az a helyzet, hogy egyes villamosokon van kalauz, egyeseken pedig nincs, akkor az az állítás is hamis, hogy „minden villamoson van kalauz", meg az is, hogy „egyetlen villamoson sincs kalauz", pedig a hamis állítás tagadásának, a mondott „korlátozás" szerint, igaznak kellene lennie. (A „minden villamoson van kalauz" helyes tagadása közvetlen formában: „nem minden villamoson van kalauz", átfogalmazva pedig: „egyes villamosokon nincs kalauz", vagy pontosabban: „van olyan villamos, amelyen nincs kalauz".)

Hasonló egyszerű korlátozást vezet be a logika az „és" kötőszó használatára vonatkozóan is: egy „*A* és *B*" alakú összetett kijelentés — a logika *konjunkciónak* nevezi — csak akkor igaz, ha mindkét komponense (*A* is, *B* is) igaz, minden más esetben hamis. Ez a korlátozás nincs összhangban pl. az udvarias keretek között folytatott viták gyakorlatával. Ha ellenfelünk állításai közül egyeseket elfogadunk, egyeseket pedig elutasítunk, akkor nem szoktuk állításainak összességét hamisnak nyilvánítani, hanem elismerjük, hogy „részben igaza van", és csak a tévesnek tartott kijelentéseivel vitázunk. Viszont egyezik ez a korlátozás a jogi gyakorlattal, amely egy tanúvallomást hamis tanúzásnak minősít már egyetlen részállítás hamissága esetén is.

Az említett korlátozások minimálisak és egyszerűek, nem szorulnak bővebb indokolásra. Nyilvánvaló, hogy ha meg akarjuk alkotni a helyes következtetések szabatos elméletét, akkor ezt bizonyos kétértelműségek elhárításával kell kezdenünk. A negáció és a konjunkció logikai értelmezése a korlátozások után is hű kifejezője marad az általános nyelvi gyakorlatban használt tagadásnak, ill. kijelentések „és"-sel való összekapcsolásának.

Az implikáció problémáinak felvázolása alapján világos, hogy e művelet esetére már nem lehetséges olyan, ideálisnak mondható megoldás, mint a

negációra és a konjunkcióra. Az implikáció minden elképzelhető szabatossá tétele csak messzemenően erőszakos korlátozással lehetséges. Hogyan is lehetne egységesen kezelni a szükségszerű összefüggést kifejező implikációt, és a szubjektív elemeket tartalmazó — és objektíve csak *a posteriori* megítélhető — feltételes állításokat? A szigorú implikáció elkülönítése esetleg lehetőséget nyújt egy olyan korlátozásra (de persze ez nagyon erőszakos korlátozás), hogy minden implikációt úgy kezeljünk, mint feltételes állítást (mondván, hogy a törvényszerű összefüggések kifejezésére ott van a szigorú implikáció), de még akkor is megmaradnak az ismert logikai értékű tagokból képezett groteszk vagy értelmetlen implikációk: ezek mindenfajta megítélése, értékelése csak bizonyos önkényesség alapján lehetséges.

Ezek után bizonyára mindenki, aki a logika iránt érdeklődik, nagy várakozással olvas egy olyan tanulmányt, amely az implikáció logikai értékének *általános és egységes* meghatározására vállalkozik. Egy ilyen tanulmány a közelmúltban jelent meg, *Tamás György* tollából.[4]

Tamás gondolatmenete a következő: Minden eddigi kísérlettől eltérően, az implikáció logikai értékét komponenseinek *viszonyából* kell meghatározni. De milyen viszonyok lehetnek két állítás között? Ennek megválaszolása érdekében Tamás György egy analógiához folyamodik. Két logikai osztály terjedelme között nyolcféle kapcsolat lehetséges, ezek körsémákkal szemléltethetők. Tamás ebből arra a következtetésre jut, hogy *két állítás között is pontosan nyolc különböző viszony lehetséges*. Ez a nyolc viszony a következő:

1—2—3. A két állítás közül az egyik, a másik, ill. mindkettő „nemlétező jelenségre vonatkozik".

4. A két állítás azonos.

5—6. A két állítás egyike „implikálja" a másikat. (Tamás többnyire kondícionális ítéletnek nevezi az implikációt. Az „implikálja" nála kb. a szigorú implikáció kifejezésére szolgál.)

7. A két állítás összeegyeztethetetlen.

8. Az egyik állítás „megengedi" a másikat (kb. abban az értelemben, hogy a két állítás összeegyeztethető).

Megjegyezzük, hogy a 4—8. esetekben a szereplő állításoknak „létező jelenségekre" kell vonatkozniok. Hogy mit kell érteni azon, hogy egy állítás létező, ill. nemlétező jelenségre vonatkozik, továbbá azon, hogy két állítás összeegyeztethető, ill. összeegyeztethetetlen, nem találunk bővebb útmutatást (eltekintve egy-egy illusztráló példától); úgy látszik, a szerző e fogalmakat teljesen egyértelműeknek tartja. Ugyancsak nem találunk semmi érvelést (az osztályokkal való homályos analógiától eltekintve) arra sem, hogy a felsorolt nyolc eset kimeríti az állítások közötti lehetséges viszonyokat.

És most lássuk az implikáció igazságértékének meghatározását a nyolc esetben. Az első 3 esetben az implikáció Tamás szerint hamis. „Azokban az esetekben, amelyekben az egyik vagy mindkét tétel nemlétező jelenségre vonatkozik, nem beszélhetünk az alap (az előtag — R. I.) és a következmény (az utótag — R. I.) összefüggéséről, tehát a kondícionális ítélet értéke h." (937.; i és h az *igaz*, ill. a *hamis* rövidítése.)

Mivel nem tudjuk pontosan, hogy mit ért a szerző „nemlétező jelenségen", nehéz véleményt formálni a fenti megállapításról. Egy későbbi példában, ha

[4] Tamás György: A kondícionális szillogizmus; „Magyar Filozófiai Szemle", XIII. (1969), 5, 932—958.

jól értettem, nemlétező jelenségről szóló állításnak tekinti a „Franciaország Ausztráliában van" mondatot. (938.) Azért sorolja e kategóriába, mert az idézett állítás *hamis?* Minden hamis állítás e kategóriába tartozik vajon? Ha igen, akkor ezzel a hét hat napján hamisnak minősül az is, hogy „ha ma szerda van, akkor holnap csütörtök lesz", noha hetenként egyszer, ti. szerdai napokon, igaz lesz. Vagy mit szóljunk az ilyen állításokhoz: „ha vannak perui űrhajósok, akkor vannak űrhajósok"? Az előtag (jelenleg) nemlétező jelenségről szól, hiszen perui űrhajósok ez idő szerint nincsenek. Vagy hogyan ítéljük meg a következő állítást, amelyet minden matematikus igaznak tart: „ha vannak páratlan tökéletes számok, akkor vannak tökéletes számok"? Ugyanis ebben az esetben (legalábbis ma még) nem tudjuk, hogy az előtagban „létező jelenségről" beszélünk-e, mert még nem ismeretes, hogy vannak-e páratlan tökéletes számok.[5]

Eddig még senki sem vonta kétségbe, hogy ha az implikáció előtagja logikailag tartalmazza az utótagot, akkor az implikáció igaz (sőt a megfelelő szigorú implikáció is). A perui űrhajósok létezése logikailag tartalmazza az űrhajósok létezését, s ugyanígy a páratlan tökéletes számok létezése a tökéletes számok létezését; ezért az idevágó implikációk (amelyek épp ezt állítják) igazak. Most, úgy tűnik, Tamás elveti ezt az elvet. Hamisnak minősíti azt az állítást, hogy „ha Franciaország Ausztráliában van, akkor a tenger édes". Ez még nem volna baj, ezt el is lehet fogadni, kétségbe is lehet vonni. A baj az *elvvel* van, amelynek alapján hamisnak minősíti, ti. hogy előtagja „nemlétező jelenségről szól". Ezen az alapon az is hamis, hogy „ha Franciaország Ausztráliában van, akkor Franciaország lakói ausztráliaiak", pedig itt már az előtag fogalmilag tartalmazza az utótagot. Sőt, az is hamis (Tamás szerint), hogy „ha Franciaország Ausztráliában van, akkor Franciaország Ausztráliában van".

De lássuk a további eseteket. Elismeri „ha A, akkor B" igazságát abban az esetben, amikor A maga után vonja B-t (beleértve a $B = A$ esetet is), kikötve persze mindig, hogy A és B „létező jelenségre" vonatkoznak (4. és 5. eset). Hamisnak minősíti az implikációt, ha tagjai összeegyeztethetetlenek (7. eset). Ezekkel a megállapításokkal egyet lehet érteni (legfeljebb az „összeegyeztethetetlenség" fogalma szorul némi precizírozásra[6]). Végül a hátralevő két esetben az implikációnak „i/h" értéket tulajdonít. Ez azt akarja jelenteni, hogy ilyenkor az implikáció lehet igaz is, hamis is (ami végül is nyílt bevallása annak, hogy pusztán a 8 esetre bontással mégsem tudja a szerző meghatározni az implikáció értékét). Egyik példája: „ha a járda nedves, akkor esett az eső" értéke i/h. „Akkor i, ha az esőtől lett nedves a járda, minden más esetben h. Ugyanez a meggondolás érvényes a 8. esetben is (pl. ha jó idő van, akkor kirándulnak a diákok)." (937.) Következésképp az utolsó példa igaz, *ha a diákok kirándulásától lett jó idő*, minden más esetben hamis. Mivel olyan meteorológiai csodáról nem tudunk, hogy a diákok kirándulásától lett volna jó idő, a szóban

[5] Tökéletes számoknak nevezik azokat a pozitív egész számokat, amelyek osztóik összegeként előállíthatók, magát a számot nem számítva osztói közé. Pl. 6 tőle különböző osztói 1, 2 és 3; $1 + 2 + 3 = 6$, tehát a 6 tökéletes szám. Eddig még nem találtak páratlan tökéletes számot, de azt sem sikerült még bizonyítani, hogy ilyen szám létezése lehetetlen.

[6] Erre az esetre Tamás cikkében a következő példa szerepel: „ha süt a nap, akkor a vas fém". Bevallom, nem értem, miért összeegyeztethetetlen a napsütés azzal, hogy a vas a fémek osztályába tartozik.

forgó állítás mindig hamis — vagy a szerző nem gondolta át eléggé mondanivalóját.

Tamás György értékelési szabályait három pontban lehet összefoglalni:

a) Ha az implikációnak legalább az egyik tagja „nemlétező jelenségre" vonatkozik, vagy ha tagjai összeférhetetlenek, akkor az implikáció hamis.

b) Ha mindkét tag „létező jelenségre" vonatkozik, és az előtag maga után vonja az utótagot, akkor az implikáció igaz.

c) A maradék esetekben az implikáció vagy igaz, vagy hamis. Igaz, ha utótagja idézi elő előtagját, máskor hamis (vagy szerzői elírásról van szó).

Azt hiszem nem kell további érveket sorakoztatni annak igazolásához, hogy Tamás György kísérlete sem oldotta meg a lehetetlent. Ő is csak erőszakos korlátozásokkal tudja elemezni az implikációt. De milyen erőszakosak ezek a korlátozások! Kizárja az igaz implikációk köréből a logikai tartalmazás bizonyos eseteit (amikor a tagok valamelyike „nemlétező jelenségre" vonatkozik). De hamisnak minősíti a feltételes állítások egész sorát is — a közfelfogással ellentétben. Így a mi korábbi példáinkban szereplő (2), (6), (8), (9) állítások a Tamás-féle értékelés szerint eleve hamisnak minősülnek (hiszen utótagjuk semmiképp sem idézheti elő előtagjukat), függetlenül attól, hogy esetleg mindkét tagjuk igaznak bizonyul.[7]

Tamás György figyelmen kívül hagyva azt, hogy egész elmélete jóformán kinyilatkoztatás-jellegű, melynek alapfogalmai sincsenek kellően precizírozva, messzemenő következtetéseket von le teóriájából, és más felfogásokkal való vitájában néha úgy hivatkozik saját megállapításaira, mintha azok objektív tények lennének. De ezeket a kérdéseket majd alkalmasabb helyen fogjuk érinteni.

Térjünk vissza az implikáció problémájára. Érvekkel és példákkal illusztráltuk, hogy *tetszőleges* implikáció igaz vagy hamis voltának megállapítása nem lehet a logika feladata. (Ezt a Tamás-féle értékelés sem tudta megcáfolni.) Ám a logika feladata az implikáció általánosan érvényes törvényeinek feltárása.

AZ IMPLIKÁCIÓ ÁLTALÁNOS TÖRVÉNYEI

A továbbiakban az implikáció fontosabb logikai törvényeivel foglalkozunk. Ezek a törvények függetlenek azoktól a variánsoktól, amelyek alapján egy-egy implikációt igaznak vagy hamisnak minősíthetünk, mert helyességük jóformán a *ha ... akkor* kötőszavak jelentésén alapszik. Más szóval: az itt bemutatott törvények ahhoz a *minimumhoz* tartoznak, amelyek az implikáció bármely olyan felfogása esetén érvényesek, amelyek a *ha ... akkor* kötőszavak értelmével egyáltalán összeegyeztethetők.

Az első ilyen törvényt *az implikáció cáfolási szabályának* nevezhetnénk. Ez így hangzik: *Ha az implikáció előtagja igaz, utótagja pedig hamis, akkor az implikáció hamis.* Valóban, A igaz volta és B hamis volta esetén a „ha A, akkor B" állítás hamis; hiszen ez az állítás éppen azt mondja, hogy ha A igaz, akkor B is igaz; esetünkben A igaz, de B nem, tehát nem igaz az, hogy ha A, akkor B. A cáfolási szabály a szigorú implikációra is érvényes. Már említettük,

[7] Lehetséges, hogy egyik-másik megállapításom a Tamás használta fogalmak félreértésén alapszik. De ha valaki nem fogalmaz elég élesen, az csak magára vethet, ha gondolatait félreértik.

hogy pusztán a két tag igazsága kevés a szigorú implikáció bizonyításához (hiszen a tagok igaz volta lehet véletlen is), viszont az előtag igazsága és az utótag hamissága elég a *megcáfoláshoz*. Hiszen ha A igaz és B hamis, akkor szó sem lehet arról, hogy A igazsága kikényszeríti B igazságát. Természetesen a cáfolási szabály érvényes a feltételes ígéretre és előrejelzésre is: ez már a (7) alatti táblázatunk második sorából is leolvasható.

A következő szabály lényegében az előbbinek egy átfogalmazása: *igaz előtagú igaz implikáció utótagja is igaz*. Azaz: ha egy implikáció igaz, és ezenkívül előtagja is igaz, akkor utótagja is teljes biztonsággal igaz. Hiszen ha az utótag hamis volna, akkor — figyelembe véve, hogy az előtag igaz — a cáfolási szabály értelmében az implikációnak hamisnak kellene lenni (de éppen abból indultunk ki, hogy az implikáció igaz). Megint más alakban: tetszőleges A és B kijelentések esetén abból, hogy „ha A, akkor B" igaz, és abból, hogy „A" igaz, mindig következtethetünk arra, hogy „B" is igaz. E szabályt mint *következtetési sémát* így jegyezhetjük le:

(11)
$$\begin{array}{l} \text{Ha } A\text{, akkor } B. \\ A. \\ \hline B. \end{array}$$

A vízszintes vonal fölötti kifejezéseket *premisszáknak*, a vonal alatti kifejezést pedig *konklúziónak* nevezi a logikai szaknyelv. Esetünkben két premisszánk van: „Ha A, akkor B", és „A"; a konklúzió pedig „B". Azon, hogy (11) egy *(helyes) következtetési séma*, azt értjük, hogy ha A és B helyébe olyan (egyébként tetszőleges) kijelentéseket teszünk, amelyek mellett mindkét premisszánk igaz lesz, akkor konklúziónk is szükségképp igaz kijelentés lesz. — Nem árt megemlítenünk azt a goromba, de sajnos nem túl ritka tévedést, amely a következtetés helyességét a *konklúzió igazságával* azonosítja. Figyeljük meg az előbbi meghatározást: a helyes következtetéstől nem azt kívánjuk meg, hogy konklúziója *feltétel nélkül* igaz legyen, hanem csupán azt, hogy *konklúziója folyjék a premisszákból*, azaz hogy *premisszái igazsága esetén* konklúziója is igaz legyen. És ez így helyes. Hiszen bizonyára egyetértünk abban, hogy az, aki a „ma szerda van" állításból arra következtet, hogy „holnap csütörtök lesz", az logikusan, értelmesen gondolkozik. De persze szó sincs róla, hogy a „holnap csütörtök lesz" konklúzió feltétlenül igaz. Csak akkor igaz, ha ma szerda van, azaz ha a premissza is igaz. Talán ez az egyszerű példa segít annak belátásához, hogy a logika „logikusan jár el", amikor a következtetés helyességének kritériumaként nem a konklúzió feltétlen igazságát követeli meg, hanem csupán azt, hogy a premisszák igazsága esetén legyen a konklúzió is igaz.[8]

A most bemutatott következtetési sémát *leválasztási szabálynak* nevezik, azon az alapon, hogy a konklúziót *(B)* úgy kapjuk, hogy az első premisszából (ha A, akkor B) „leválasztjuk" a másodikat *(A)*. A hagyományos logikában e sémát *modus ponens*-nek nevezték.

A leválasztási szabály annyira egyszerű, használata annyira hozzátartozik a mindennapi gyakorlathoz, hogy fölöslegesnek tűnik több szót vesztegetni rá. Úgy gondolhatnánk, e szabály helyességét a szavak értelmének megváltozta-

[8] Ez természetesen nem jelenti azt, hogy egyes premisszák hamis volta esetén a konklúziónak *nem is szabad* igaznak lennie.

tása nélkül, nem lehet kétségbe vonni. Ám Tamás György, már idézett tanulmányában, tagadja a leválasztási szabály kivétel nélküli helyességét. Cáfolata a következő.

„. . . lássunk egy nem szokványos példát:

Ha kéményseprőt látok, szerencsét találok.
Kéményseprőt látok.

Tehát szerencsét találok.

Ha annak ellenére, hogy kéményseprőt látok és a modus ponens szerint következtetek, mégsem találok szerencsét, akkor szörnyű pechem van." (954.)

A szellemes zárómondattal a szerző azt akarja mondani, hogy a modus ponens (azaz a leválasztási szabály) *megbízhatatlan*, hiszen előfordulhat, hogy kéményseprőt látok, mégsem találok szerencsét, noha a modus ponens szerint — állítólag — találnom kellene.

Csakhogy a modus ponens, azaz a leválasztási szabály ezt egyáltalán nem mondja. A szabály, mint előbb már hangsúlyoztuk, csak azt állítja, hogy *ha mindkét premisszánk igaz*, akkor a konklúziónak is igaznak kell lennie. Tamás György szemmelláthatóan *megfeledkezett az első premisszáról*. „Ha annak ellenére, hogy kéményseprőt látok . . . mégsem találok szerencsét . . ." — így írja, noha *így kellene* írnia: „Ha annak ellenére, hogy ha kéményseprőt látok, akkor szerencsét kell találnom, és valóban látok kéményseprőt, de mégsem találok szerencsét, akkor . . ." — nos, valóban, mi történik akkor?

Képzeljünk el egy embert, aki *igaznak tartja* a „ha kéményseprőt látok, akkor szerencsét találok" kijelentést. Továbbá tegyük föl, hogy emberünk kéményseprővel találkozik, és így számára igazzá válik a „kéményseprőt látok" mondat. A leválasztási szabály szerint következtetve, a történtek után a szóban forgó személy igaznak fogja tartani a „szerencsét találok" állítást. De történetesen nem talál szerencsét, azaz a tények szerint a „szerencsét találok" mondat, várakozásával ellentétben, hamisnak bizonyul. Mit tesz ezután emberünk? Ha Tamás Györgyre hallgat, akkor a modus ponens-t fogja kárhoztatni. Ha a logikára hallgat, történetesen az implikáció cáfolási törvényére, amely szerint az igaz előtagú és hamis utótagú implikáció feltétlenül hamis, akkor el fogja vetni eddigi babonás hitét, és hamisnak fogja nyilvánítani a „ha kéményseprőt látok, akkor szerencsét találok" mondatot; hiszen ennek előtagja („kéményseprőt látok") igaznak, utótagja („szerencsét találok") pedig hamisnak bizonyult.[9]

Szó sincs tehát a leválasztási szabály megcáfolásáról. Ha a szabály konklúziója hamis, az nem azért van, mert a szabály hibás, hanem azért, mert valamelyik premisszája hamis. Aki kétforintos helyett nadrággombot dob a csokoládéautomatába, az ne várjon csokoládét. Persze akadhat olyan ember, aki ilyen esetben dühös lesz az automatára, talán még össze is töri. De gondolom, nem ezt a magatartást fogjuk az irodalomban népszerűsíteni, akár csokoládéautomatáról, akár „logikai automatáról", azaz következtetési szabályról legyen is szó.

E kis kitérő után folytassuk az implikáció általános érvényű törvényeinek összegyűjtését. A harmadik nevezetes törvény így hangzik: *Ha egy igaz impli-*

[9] El tudom képzelni, hogy a vázolt esetben egy mélyen babonás ember inkább hinne Tamásnak, mint a logikának.

káció utótagja hamis, akkor előtagja is biztosan hamis. Valóban, ha az előtag igaz volna, az utótag pedig hamis, akkor az implikáció cáfolási törvénye szerint maga az implikáció is hamis lenne. Így, ha egy implikáció igaz, és utótagja hamis, akkor előtagja csak hamis lehet. E szabályt következtetési séma alakjában így formulázhatjuk:

Ha A, akkor B.
Nem B.
———————
Nem A.

Itt „nem B" rövid jelölése annak, hogy „nem igaz, hogy B", azaz hogy „B hamis", és hasonló áll persze „nem A"-ra is. E sémát az *indirekt cáfolás* sémájának nevezhetjük, azon az alapon, hogy egy A állítás hamisságát e séma szerint úgy bizonyíthatjuk, hogy kimutatjuk: A maga után von egy olyan B állítást (első premissza), amely ismerten hamis (második premissza). A hagyományos logika e sémát *modus tollens*-nek nevezte.

Ha egyszer Tamás György nem fogadta el helyes következtetésnek a leválasztási szabályt, akkor ebből szinte elkerülhetetlenül következik, hogy az indirekt cáfolás általános érvényességét is tagadja. Idézett cikkében az ellenpéldát Varga Tamás „Matematikai logika kezdőknek" c. könyvéből[10] veszi. A könyv szerzője éppen az indirekt cáfolás egy esetét használja fel példának a logikai következményfogalom előzetes szemléltetésére. Példája a következő:

Ha a benzin elfogyott, az autó megáll.
Az autó nem áll meg.
———————
A benzin nem fogyott el.

(E példában A = „a benzin elfogyott", B = „az autó megáll"; ezeknek megfelelően „nem B" = „az autó nem áll meg", „nem A" = „a benzin nem fogyott el". A példa azt is illusztrálja, hogy az élő nyelv a tagadást hogyan fogalmazza át. „Nem igaz, hogy az autó megáll" = „az autó nem áll meg".)

A leválasztási szabállyal kapcsolatban említettük a következményfogalom téves értelmezését. Varga Tamás a fenti példához olyan magyarázatot fűz, amelynek célja ugyancsak a következtetés fogalmával kapcsolatos félreértési lehetőségek elhárítása. Idézzük magyarázatát, mert Tamás György e magyarázat helyessége ellen érvel. Varga fejtegetése a következő:

„Azt mondta erre egy autós barátom: ‚Ez teljesen hibás okoskodás! Lehet, hogy az autó nem áll meg, holott elfogyott a benzin: sima úton, különösen, ha lejt is egy kicsit, jó darabig elgurulhat benzin nélkül.'

Igaza volt? Ami az autó gurulását illeti, igen. De ami a következtetés hibás voltát illeti, abban nem volt igaza. Egyszerűen elfeledkezett az első premisszáról . . . Autós barátomnak joga van — hivatkozva a tehetetlenségre vagy lejtő esetén a tömegvonzásra — kétségbe vonni ezt a premisszát. Más kérdés azonban kétségbe vonni egy premisszát, és megint más kétségbe vonni azt, hogy *adott premisszákból egy adott konklúzió következik.*"

Tamás György, idézett cikkében, a következő észrevételt teszi e magyarázattal kapcsolatban.

[10] 1. köt. IV. kiad., Tankönyvkiadó, Bp. 1966, 13.

„Véleményünk szerint az autós barát nem feledkezett el az első premisszáról, csak — teljes joggal — nem volt hajlandó implikációnak tekinteni." (956.) (Emlékeztetünk arra, hogy a Tamás-féle implikáció kb. azonos azzal, amit e cikk terminológiája szerint *igaz* szigorú implikációnak mondanánk.) Így végül is Tamás véleménye röviden ez: az autós barát az első premisszát nem fogadta el *igaznak*. És így Tamás semmivel sem mond többet, mint a Varga idézte autós barát: „attól, hogy az autó nem áll meg, a benzin elfogyhatott". Ez nem vitás, de nem érinti az idézett következtetés helyességének kérdését. Különös érvelési mód a Tamásé: egyszer a konklúzió igazságát, máskor az egyik premissza igazságát vonja kétségbe, ahelyett hogy *a kérdésről*, a következtetés helyességéről beszélne.

Az implikáció negyedik, általánosan érvényes törvényeként az ún. *láncszabályt* említjük meg. A láncszabályt az alábbi következtetési séma alakjában fogalmazhatjuk meg tömören:

Ha A, akkor B.
Ha B, akkor C.
———
Ha A, akkor C.

E szabály „ránézésre" is evidens, de lássuk be részletesen is helyességét. Azt kell kimutatnunk, hogy bármilyen kijelentések legyenek is A, B és C, ha mindkét premisszánk igaz, a konklúzió is feltétlenül igaz. Először azt mutatjuk ki, hogy ha a premisszák igazak, akkor a konklúzió *az implikáció cáfolási törvénye alapján* nem cáfolható: nem fordulhat elő az az eset, hogy előtagja igaz, utótagja pedig hamis. Valóban, ha A igaz, akkor az igaznak feltételezett első premissza szerint B-nek is igaznak kell lennie. De második premisszánk szerint B igaz volta esetén C is igaz. Így ha A igaz, akkor C is igaz, tehát a „ha A, akkor C" konklúzió a premisszák igazsága esetén valóban nem cáfolható. Ha a konklúziót csupán feltételes kijelentésnek tekintjük, akkor ezzel készen is vagyunk. Sémánk azonban akkor is helyes, ha mind a premisszákat, mind a konklúziót szigorú implikációnak tekintjük. Hiszen ha A szükségszerűen maga után vonja B-t, B pedig C-t, akkor A szükségszerűen maga után vonja C-t is: a szükségszerűség, amely A-ból B-hez, majd B-ből C-hez vezet, B közvetítésével elvezet A-ból C-hez.

Az eddigiek után az olvasó bizonyára nem lepődik meg azon, hogy Tamás György a láncszabályt sem fogadja el általánosan érvényesnek. Cáfolására két példát is hoz. Az első példában azt „bizonyítja", hogy a láncszabály segítségével egymásnak ellentmondó konklúziókat is lehet kapni. Tekintsük ugyanis a láncszabály alábbi két alkalmazását:

Ha csökken a gázra gyakorolt nyomás, akkor a gáz kiterjed.
(12) Ha a gáz kiterjed, akkor lehűl.
———
Ha csökken a gázra gyakorolt nyomás, akkor a gáz lehűl.

Ha csökken a gázra gyakorolt nyomás, akkor a gáz kiterjed.
(13) Ha a gáz kiterjed, akkor felmelegszik.
———
Ha csökken a gázra gyakorolt nyomás, akkor a gáz felmelegszik.

Mindkét következtetésben a láncszabályt alkalmaztuk. A kapott konklúziók azonban ellentmondanak egymásnak, hiszen az első szerint a nyomáscsökkenés

lehűlést, a második szerint pedig felmelegedést okoz a gázban. „A matematikai logika szerint viszont ez a következtetés azonosan igaz", írja Tamás György (itt az „azonosan igaz" nyilván azt akarja jelenteni, hogy általánosan érvényes), majd így folytatja: „Az ‚általános érvényű' formula eszerint lehetővé teszi, hogy két egymásnak ellentmondó zárótételhez vezető következtetés egyaránt helyesnek minősüljön." (947.)

Tamás György itteni tévedése ugyanolyan természetű, mint korábban idézett tévedései. *Mindkét következtetés helyes.* Ha az elsőnek igazak a premisszái, akkor igaz a konklúziója is, és ha a másodiknak igazak a premisszái, akkor konklúziója is igaz. A premisszák szemrevételével megállapíthatjuk, hogy az első premissza a két következtetésben azonos, a második premisszák azonban ellentétesek: az első következtetés 2. premisszája szerint a gáz *lehűl*, ha kiterjed, a második következtetés 2. premisszája szerint viszont *felmelegszik* kiterjedés során. Persze, ez a két premissza nem lehet egyszerre, azonos körülmények között, azonos gázra igaz. Semmi csodálatos nincs abban, hogy ugyanazzal a következtetési sémával *különböző, akár egymásnak ellentmondó* konklúziókhoz juthatunk, persze *más-más premisszákból.* A következtetési séma csak akkor volna hibás, ha *ugyanazon premisszákból* (amelyek nem tartalmaznak belső ellentmondást) folyna két, egymásnak ellentmondó konklúzió. Elvégre egy gépkocsi haladhat előre is, hátra is; baj csak akkor van a szerkezettel, ha az irányító mechanizmus egy meghatározott állapota esetén a kocsi hol előre, hol hátra megy. Tamás György az idézett fejtegetésben rajta akarja kapni „a matematikai logikát" azon, hogy segítségével ellentmondó állításokat is lehet bizonyítani.[11] Újra meg újra elfeledkezik arról, hogy a következtetés helyessége csak abban az esetben jelenti a konklúzió *bizonyítását, ha a premisszák már bizonyított állítások.* Mivel egyazon feltételek mellett nem lehet igaz az, hogy kiterjedés során ugyanazon gáz le is hűl, meg fel is melegszik, a Tamásféle két következtetés premisszái egyszerre nem lehetnek igazak, és így a láncszabállyal nem is bizonyítható ugyanazon gázra, ugyanazon feltételek mellett mind a két konklúzió.

Lássuk Tamás György másik cáfoló példáját. Ezt a példát egy kis könyvecskéből[12] idézi:

Ha javítani akarjuk iskoláinkban az oktatást, akkor jobban össze kell kapcsolnunk az iskolát az élettel.

Ha az iskolát jobban össze akarjuk kapcsolni az élettel, akkor az jelenleg csak a politechnikai oktatás útján történhetik.

Ha javítani akarjuk iskoláinkban az oktatást, akkor az jelenleg csak a politechnikai oktatás útján történhetik.

Tamás György kommentárja: „A szerzők szerint a megadott előzményekből szükségszerűen következik a szóban forgó zárótétel igazsága. Véleményünk szerint . . . nem helyes a következtetés, mivel a premisszák nem határozzák meg egyértelműen a konklúziót. A példa illusztrálja véleményünket, hiszen nem kell a pedagógia szakemberének lenni annak elismeréséhez, hogy nincs

[11] Persze fölösleges itt „a matematikai logikára" hivatkozni. Elég volna egyszerűen „a logikáról" beszélni. Hiszen eddig még nem ismeretes olyan logikai elmélet, amely kétségbe vonta volna a láncszabály helyességét.

[12] Händel—Kneist: „A logika rövid vázlata", Kossuth, Bp. 1964, 68.

kizárólagos üdvözítő módszer az oktatás megjavításához ... A példában szereplő zárótétel hamis. Tételezzük fel, hogy valaki nem ért egyet ezzel a véleményünkkel, és a példa zárótételét igaznak tartja. Ez nem változtatna azon a megállapításon, hogy az adott előzményekből nem következik szükségszerűen a zárótétel." (948.)

Először is jegyezzük meg, hogy a konklúzió igaz vagy hamis volta *önmagában* se nem bizonyítja, se nem cáfolja a következtetés helyességét. Ha a premisszák igazak és a konklúzió hamis, az persze elég a következtetési mód megcáfolásához. Így Tamás érvelésének első fele, melyben a konklúzió hamisságára hivatkozik, csak akkor értelmes, ha elfogadja a premisszákat igaznak. Erről azonban explicit formában nem nyilatkozik.

Lássuk az érvelés másik részét, mely szerint az adott premisszákból nem következik elkerülhetetlenül a konklúzió. Mire alapozza ezt Tamás György? *Az implikáció általa bevezetett értékelésére* (amelyet már előbb ismertettünk). Ezen értékelésre támaszkodva összeállít egy 64 rekeszes táblázatot. (Megjegyezzük, hogy még ebben a fölöslegesen terjedelmes táblázatban sincs egyetlen olyan rekesz sem, amely a láncszabályt cáfolná, azaz amelyben a premisszák logikai értéke igaz, a konklúzió értéke pedig hamis lenne!) E táblázat azon rekeszében, amely Tamás szerint a szóban forgó példára alkalmazandó, mindhárom kijelentés logikai értéke i/h. Tehát a Tamás-féle értékelés szerint a példában szereplő következtetés két premisszája is, konklúziója is lehet hogy igaz, lehet hogy hamis. Ezt fejezi ki ő úgy, hogy „az adott előzményekből nem következik szükségszerűen a zárótétel". Ám szerte a világon a logika művelői a következtetés helyességén azt értik, hogy a premisszák igazsága elkerülhetetlenül maga után vonja a konklúzió igazságát. Nem az a kérdés, hogy Tamás György szerint (vagy akár az ő módszere, kiszámítási szabálya szerint) igazak-e a premisszák és a konklúzió. A kérdés az, hogy *ha* a premisszák igazak, *akkor* igaz-e a konklúzió, illetve, ennek szubjektív vetületeként: *ha* valaki elfogadja igaznak a premisszákat, *akkor* el kell-e fogadnia a konklúziót is igaznak (hacsak nem akar önmagával ellentmondásba kerülni). Mint korábban láttuk, a láncszabály esetén e kérdésre (szubjektív vetületét is beleértve) csak igennel lehet válaszolni. *Ezellen* Tamás egy szót sem tud felhozni cikkében. Arról senki sem tehet, hogy ő mást ért a következtetés helyességén, mint ami a logikában általánosan elfogadott.[13] Mindenesetre furcsa vitamódszer a macska fogalmát úgy módosítani, hogy a vasmacska is beleférjen, majd kimutatni, hogy nincs igazuk azoknak, akik azt állítják, hogy a macska emlős állat.

Az implikáció alaptörvényeinek felsorolását folytatva, ötödikként az ún. *kontrapozíció-törvényt* említeném. Eszerint egy igaz implikáció tagjainak sorrendjét fölcserélve és mindkét tagot negálva, igaz implikációhoz jutunk. Ezt a szabályt következtetési séma formájában így fejezhetjük ki:

Ha A, akkor B.

Ha nem B, akkor nem A.

[13] Egy korábbi cikkemben (Hol a hiba a logikában; „Magyar Filozófiai Szemle", XIII. (1969), 5, 909—931) részletesen elemeztem Tamás György „következmény"-fogalmát.

E törvény igazolása igen egyszerű. Az indirekt cáfolás törvénye szerint „ha A, akkor B"-ből *és* „nem B"-ből következik „nem A". Másképp: „ha A, akkor B" igaz volta esetén „nem B" maga után vonja „nem A"-t, utóbbi viszont azt jelenti, hogy ekkor a „ha nem B, akkor nem A" implikáció is igaz. Világos, hogy a kontrapozíció törvénye a szigorú implikációra is érvényes. — A törvényt egy példával szemléltetjük:

Ha a munka termelékenysége növekszik, akkor az önköltség csökken.

Ha az önköltség nem csökken, akkor nem növekszik a munka termelékenysége.

(Ne feledjük el, hogy nem a konklúzió igazságát állítjuk, hanem csupán azt, hogy a premissza igazsága esetén a konklúzió is igaz. Aki tud ellenpéldát a konklúzióra, az a premisszára *ugyanazt* adhatja ellenpéldaként.) — Jegyezzük meg, hogy a tagok sorrendjének puszta felcserélése nem biztosítja azt, hogy igaz implikációból igaz implikációt kapjunk. „Ha 49 éves vagyok, akkor éveim száma osztható 7-tel" igaz, de „ha éveim száma osztható 7-tel, akkor 49 éves vagyok" lehet igaz is, hamis is. (Ha pl. 35 éves ember állítja, akkor hamis.) Tamás György szerint ezt az eredményt ösztönzésnek kell tekinteni „avégett, hogy további információkra tegyünk szert" (idézett cikkének 942. oldala). Vagyis itt véget ért a logika szerepe, következzék az információszerzés. De mi köze ennek a logikához, és milyen alapot nyújt annak kimondásához, hogy „az i/h értéket . . . nem az eldönthetetlenség szimbólumának kell tekinteni, hanem közvetítő szerepet kell neki tulajdonítani"? *A logikán belül* semmit nem közvetít az „i/h". Az pedig, hogy „ha nem tudsz valamit, fiam, próbálj utána járni", a pedagógia és nem a logika hatáskörébe tartozik.

Az eddig felsorolt összefüggések mind érvényeseknek bizonyultak a *szigorú implikációra* is. Természetes, hogy a szigorú implikáció igazsága maga után vonja a közönséges implikáció igazságát (vagy legalábbis nem-hamisságát). E tényt az alábbi következtetési sémába foglalhatjuk:

Szükségszerű, hogy ha A, akkor B.

Ha A, akkor B.

Az implikáció cáfolási törvénye szerint: ha egy implikáció előtagja igaz, utótagja hamis, akkor az implikáció hamis. E törvényt így is megfogalmazhatjuk:

(14) Ha „A és nem B" igaz, akkor „ha A, akkor B" hamis.

Ugyanis „A és nem B" akkor és csak akkor igaz, ha az „és"-sel összekapcsolt komponensek mindegyike igaz, tehát ha A is, „nem B" is igaz. De „nem B" éppen akkor igaz, amikor B hamis. Összefoglalva: „A és nem B" pontosan akkor igaz, amikor A igaz és B hamis. De ebben az esetben „ha A, akkor B" valóban hamis. A (14) alatti összefüggés tehát igaz.

Megfigyelhetjük, hogy a (14) alatti mondat is *implikáció*. Előtagja: „ ‚A és nem B' igaz", utótagja: „ ‚ha A, akkor B' hamis". Alkalmazzuk (14)-re a *kontrapozíció* törvényét. Ehhez föl kell cserélnünk az előtagot és az utótagot, és mindkét tagnak a tagadását kell vennünk. Világos, hogy „ ‚A és nem B' igaz" tagadása ez: „ ‚A és nem B' hamis"; „ ‚ha A, akkor B' hamis" tagadása

pedig „ ,ha A, akkor B' igaz". Ezek figyelembevételével (14)-ből kontrapozícióval ezt kapjuk:

Ha „ha A, akkor B" igaz, akkor „A és nem B" hamis.

Még gondoljuk meg, hogy „A és nem B" hamissága egyenértékű tagadásának igazságával. „A és nem B" tagadását így írhatjuk:

Nem igaz, hogy *(A és nem B)*.

(A zárójel mutatja, hogy a tagadás a teljes összetett mondatra vonatkozik.) Mindent összefoglalva, azt kaptuk, hogy amennyiben egy „ha A, akkor B" implikáció igaz, akkor a „nem igaz, hogy *(A és nem B)*" kijelentés is igaz. Ezt a megállapítást is következtetési szabályba foglaljuk:

(15)
$$\frac{\text{Ha } A\text{, akkor } B.}{\text{Nem igaz, hogy } (A \text{ és nem } B).}$$

Természetesen ez a séma akkor is érvényes, ha a premisszát a megfelelő szigorú implikációval helyettesítjük.

Az alábbi implikációk *mindig igazak*, bármilyen kijelentéseket teszünk is A és B helyére:

(16)
$$\begin{cases} \text{Ha } A \text{ és } B\text{, akkor } A. \\ \text{Ha } A \text{ és } B\text{, akkor } B. \\ \text{Ha } A\text{, akkor } A. \end{cases}$$

Ehhez bizonyára nem szükséges kommentár.

Ezzel be is fejezzük az implikáció általánosan érvényes törvényeinek bemutatását, természetesen nem azért, mintha kimerítettük volna e törvényeket. Áttérünk most annak vizsgálatára, hogy hogyan kezeli az implikációt a *szimbolikus* vagy *matematikai logika*.

A MATERIÁLIS IMPLIKÁCIÓ

A matematikai logika formális logikai problémák matematikai vizsgálatával foglalkozik; ilyen vizsgálatok céljaira rendszerint *matematikai modellt* alkot a logika egy-egy témakörére, fejezetére vonatkozóan. Az, amit nálunk a köztudat „matematikai logikának" nevez, valójában nem más, mint a formális logika *egyik fejezetének* (napjainkban kétségtelenül *a legfontosabb* fejezetének): *az alternáló vagy kétértékű logikának a matematikai modellje*. De tévedés volna azt gondolni, hogy pusztán ez alkotja ma a szimbolikus vagy matematikai logikát.

Az alternáló logika három, többé-kevésbé Arisztotelésztől származó posztulátumon nyugszik: az ellentmondástalanság, a kizárt harmadik és az azonosság elvén. Ezen logika matematikai modelljében a negyedik alapelv a következő: minden összetett kijelentés logikai értékét egyértelműen meghatározza komponenseinek logikai értéke. Más szóval: az alternáló logika matematikai modellje csak olyan összetett kijelentések elemzésére vállalkozik, amelyek logikai értékét a komponensek logikai értéke determinálja. E korlátozás alap-

vető oka az, hogy elhagyása olyan nehézségekhez vezet, amelyekkel máig sem tudott kielégítő módon megbirkózni a logika tudománya. Hangsúlyozni kell azonban, hogy ez a korlátozás a gyakorlati alkalmazások szempontjából semmiféle hátrányt nem jelent, és inkább csak bizonyos „szépséghibákat" eredményez. Ennek az állításnak a bizonyítása azonban lehetetlen az egész elmélet kimerítő ismertetése nélkül, és így természetszerűleg nem tartozik e cikk keretébe.

A legegyszerűbb példa olyan műveletre, amelyben a komponensek logikai értékei egyértelműen meghatározzák a művelet eredményének igaz vagy hamis voltát, kétségtelenül a *negáció* és a *konjunkció* (ÉS-kapcsolat) (mindkettőt említettük már).

A matematikai logika jelentős vívmánya annak kimutatása, hogy *minden olyan logikai művelet, amely véges sok kijelentésből képez kijelentést úgy, hogy az eredmény logikai értéke csak a tagok logikai értékétől függ, kifejezhető a negáció és a konjunkció ismételt alkalmazásaival.*

Mint láttuk, az implikáció nem olyan művelet, amelynek logikai értékét mindig meghatározzák komponenseinek logikai értékei. Ebből következik, hogy a kétértékű logika matematikai kalkulusában nincs mód a „ha A, akkor B" alakú kijelentések adekvát elemzésére. Ez azonban nem zárja ki azt, hogy valamilyen értékelő művelettel *szimuláljuk, modelláljuk* az implikációt. Kíséreljük meg összeállítani egy ilyen művelet értéktáblázatát. Jelöljük a bevezetendő műveletet „$A \rightarrow B$"-vel (olv.: „A nyíl B"). Hogy ez jó utánzata legyen az implikációnak, minimális követelményként előírjuk, hogy tegyen eleget mindazon törvényeknek, amelyeket az implikáció minden elfogadható felfogása esetén érvényeseknek tartunk. Nos, a (16) alatti egyik szabály szerint „ha A, akkor A" mindig igaz. Akkor stratégiánk szerint „$A \rightarrow A$"-nak mindig igaznak kell lennie. Akkor is, ha A igaz, akkor is, ha A hamis. Tehát van legalább egy eset, amikor mindkét tag igaz, és a művelet eredménye is igaz (hiszen A helyébe tehetünk igaz állítást, pl. azt, hogy „$2 \cdot 2 = 4$"), és van legalább egy eset, amelyben mindkét tag hamis, és a művelet eredménye igaz (pl. A = „$2 \cdot 2 = 5$" esetében). De mert a művelet eredményének értékét az értékelő logikában kizárólag a tagok értékeitől tehetjük függővé, ha egy esetben a fentiek szerint döntünk, minden hasonló esetben ugyanígy kell döntenünk. Következésképp ha a tagok logikai értéke egyenlő (mindkét tag igaz, vagy mindkettő hamis), a művelet eredményét „igaz"-nak kell definiálnunk:

A	B	$A \rightarrow B$
igaz	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz

Az implikáció cáfolási törvénye szerint igaz előtagú és hamis utótagú implikáció feltétlenül hamis. Ebből nyomban megkapjuk a keresett értéktáblázat egy újabb sorát:

A	B	$A \rightarrow B$
igaz	hamis	hamis

Végül tegyük föl, hogy A hamis és B igaz. Akkor az „A és B" konjunkció hamis, „(A és B) $\rightarrow$ B" tehát egy olyan esete a keresett műveletnek, amelynek előtagja hamis, utótagja pedig igaz. Ám (16) szerint a „ha A és B, akkor B" implikáció (mint a logikai tartalmazás egy esete) mindig igaz. Így, stratégiánknak megfelelően, „(A és B) $\rightarrow$ B" értékét is igaznak kell megállapítanunk. Tehát egy konkrét esetben hamis előtag és igaz utótag esetén műveletünk értéke igaznak adódik. Ezt azonban általános érvényűvé kell tennünk, hiszen a művelet eredményének értékét most csak a tagok értékeitől tehetjük függővé. Ezzel megkaptuk az értéktáblázat még hiányzó sorát:

A	B	$A \rightarrow B$
hamis	igaz	igaz

A teljes értéktáblázat a következő:

(17)

A	B	$A \rightarrow B$
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz

Az egész értéktáblázatot összefoglalhatjuk a következő meghatározásban: „$A \rightarrow B$" akkor és csak akkor hamis, ha A igaz, és B hamis. — E műveletet (Russell nyomán) rendszerint *materiális implikációnak* nevezik. Emeljük ki még egyszer, hogy értelmezése egyértelműen folyik az implikáció általános törvényeiből *és* abból az elvből, hogy a művelet logikai értékét a tagok logikai értékeinek kell egyértelműen meghatároznia. *A kétértékű értékelő logikában az implikációt kizárólag a materiális implikáció műveletével lehet modellálni.*

A fenti táblázatot összehasonlítva a feltételes állítás (7) alatti értéktáblázatával, látjuk, hogy vele megegyezik, azzal az eltéréssel, hogy hamis előtag esetén a bizonytalanságban hagyott „nem hamis" helyett itt a határozott „igaz" érték szerepel. Ezért mondhatjuk, hogy a materiális implikáció „lényegében" a feltételes állítás (ígéret, előrejelzés stb.) kifejezője, azzal a lényegtelen eltéréssel, hogy a köznapi használatban érdektelen „hamis" előtag esetén a materiális implikáció „igaz"-nak számít. Be lehet bizonyítani (az egyes esetek egyszerű végiggondolásával), hogy az implikáció valamennyi általánosan érvényes törvénye a materiális implikációra is érvényes, tehát e művelet nevében nem minden alap nélkül szerepel az „implikáció" szó.

Említettük, hogy az alternáló logika meghatározott műveletei mind kifejezhetők negáció és konjunkció segítségével. Ez természetesen érvényes a materiális implikációra is:

(18) „$A \rightarrow B$" = „nem igaz, hogy (A és nem B)".

Ezt összehasonlítva a (15) alatti következtetési sémával, látjuk, hogy a séma konklúziója éppen „$A \rightarrow B$". E sémát tehát a materiális implikáció bevezetése után így is felírhatjuk:

$$\frac{\text{Ha } A\text{, akkor } B}{A \rightarrow B}$$

Sémánk a „ha ... akkor" bármilyen (a nyelvhasználattal összeegyeztethető) felfogása esetén érvényes.

E séma alapján az alternáló logikában a következtetések premisszáiban szereplő implikációkat a megfelelő materiális implikációkkal helyettesíthetjük. Ezzel semmiképp sem hibázunk, hiszen egy állítást olyan állítással helyettesítünk, amely az eredetinél biztosan nem mond többet (esetleg kevesebbet). Viszont e fogással ahhoz a hatalmas előnyhöz jutunk, hogy a kétértékű logika matematikai apparátusának minden eszközét alkalmazhatjuk a szóban forgó következtetés vizsgálatára (pl. helyességének bizonyítására). Semmilyen más logikai elmélet nem rendelkezik manapság olyan egyszerű és viszonylag könnyen kezelhető matematikai apparátussal, mint a kétértékű logika. Így az említett fogás alkalmazása rendkívüli előnyökkel jár, minden hátrány nélkül.

Hibás eredményhez csak akkor juthatunk, ha egy következtetés *konklúziójaként* nyert materiális implikációt a materiális implikációtól eltérő értelemben „ha ... akkor" alakban interpretálunk. Pl. ha egy következtetés konklúziója ez volna:

„$2 \cdot 2 = 5 \rightarrow$ a hó fehér",

és ezt így olvasnánk:

„Ha $2 \cdot 2 = 5$, akkor a hó fehér",

akkor alighanem végtelen vitába bonyolódnánk embertársainkkal vagy premisszáink igazságát, vagy következtetési módunk helyességét illetően. Ha viszont a materiális implikáció (18) alatti szöveges átfogalmazását használjuk, akkor konklúziónkat így fejezhetjük ki:

„Nem igaz, hogy ($2 \cdot 2 = 5$ és a hó nem fehér)",

és ez a fogalmazás már nem ad okot vitára. — Persze, amikor egy matematikus azt mondja, hogy „ha A, akkor B", akkor majdnem biztos, hogy ezen sem többet, sem kevesebbet nem ért, mint, hogy „nem igaz, hogy (A és nem B)" (legalábbis ha A és B matematikai mondatok). A matematikusok implikáción általában materiális implikációt értenek.

Összefoglalva: „$A \rightarrow B$" pontos jelentését nem a „ha A, akkor B" forma fejezi ki (mint láttuk, e forma nem is egyértelmű), hanem a (17) alatti értéktáblázat vagy a (18) alatti átfogalmazás.

Egyes szerzők mégis a „ha A, akkor B" nyelvi formát ajánlják „$A \rightarrow B$" kiolvasásához. Persze, amennyiben a matematikai logika szakembereiről van szó, mindig hozzáfűzik: ez nem jelenti azt, hogy az egyértelműen definiált

„$A \rightarrow B$" azonos a távolról sem egyértelmű „ha A, akkor B"-vel. Wilhelm Ackermann például ezt írja:[14]

„Filozófiai részről kifogásokkal illetik azt a körülményt, hogy a beszédben ‚$A \rightarrow B$'-t rendszerint az ‚A-ból következik B' vagy pedig a ‚ha A, akkor B' alakban adjuk vissza. E kifogásnak jogos magva van. Hiszen a mindennapi beszédben sem a ‚$2 \cdot 2 = 4$-ből következik, hogy a hó fehér' mondatot, sem a ‚ha $2 \cdot 2 = 5$, akkor a hó fehér' mondatot nem tekintik értelmesnek, mert a két kijelentés között nincs logikai összefüggés. A mindennapi nyelvben a ‚következik' vagy akár a ‚ha . . . akkor' értelme nehezen ragadható meg, és aligha egyértelmű. Bár képletesen, persze a feltételes mód használatával, mondunk ilyeneket, hogy ‚ha $2 \cdot 2 = 5$ volna, akkor a hó fekete volna'. De ezzel a problematikával nem kell itt foglalkoznunk, mivel ‚$A \rightarrow B$'-nek pontosan definiált értelme van, és csak erre gondolunk, ha ebben az összefüggésben a ‚ha . . . akkor'-t használjuk."

Hasonló magyarázatot ad Alonzo Church is:[15]

„A ‚ha . . . akkor', ‚következik szavak használatát a műveleti jelek szóbeli kifejezésében nem szabad úgy felfogni, mintha azt jeleznék, hogy a megfelelő művelet minden vagy akár csak a legtöbb esetben is tökéletesen visszaadja e szavak jelentését. Ellenkezőleg, a műveletek értelmét a táblázat megfelelő oszlopából kell teljes pontossággal elsajátítani; a szóbeli kifejezések legföljebb egy durva megközelítést jelentenek.

Tény, hogy a ‚ha . . . akkor' és a ‚következik' szavak, úgy, ahogyan a mindennapi beszédben használják őket, többnyire állítások közötti és nem logikai értékek közötti kapcsolatot jelölnek. Ha ilyen módon használják őket, lehetséges jelentéseiket bonyolult pontosan rögzíteni; nem is fogjuk ezt megkísérelni. Hanem kiválasztjuk a ‚ha . . . akkor' (vagy ‚következik') szavaknak azt a használatát — a materiális használatát, ahogyan nevezni fogjuk —, amely úgy értelmezhető, mint igazságértékek közötti reláció . . ."

Szükséges volt idézni ezeket a fejtegetéseket, mert Tamás György már idézett cikkében úgy véli, hogy a matematikai logika művelői a materiális implikációt azonosítják a „ha A, akkor B" alakú kijelentéssel. Az előbbi idézetek, úgy vélem, elég autentikusak ahhoz, hogy Tamás vádját, legalábbis mint általánosan helytállót, elhárítsák. Tamás György néhány forrásmunkából vett idézettel támasztja alá vádját. Sajnos, nem idézi *mindazt*, ami az illető szerző véleményét a szóban forgó kérdésben megvilágítaná. Például Quine-tól a következőt idézi: „Ha viszont az előtag hamis, jóval önkényesebbé válik az implikáció logikai értékének meghatározása, de legalkalmasabbnak az bizonyul, ha úgy döntünk, hogy minden hamis előtagú implikációt igaznak tekintünk." Majd sietve hozzáfűzi az idézethez: „Ez a felfogás, legalábbis részben, bevallottan önkényes." (936.) Néhány bekezdéssel előbb bebizonyítottuk, hogy a materiális implikáció értéktáblázata *nem önkényes*. Igaz, Quine nem fordít gondot ennek kimutatására, de azzal semmiképp sem

[14] D. Hilbert—W. Ackermann: „Grundzüge der theoretischen Logik", IV. kiad., Springer, 1959, 5. Az idézetben szereplő görög betűket, a zavartalanabb kiolvasás kedvéért, latin betűkkel (A, B) helyettesítettem.

[15] A. Church: „Introduction to Mathematical Logic", 1. köt., Princeton 1956 (II. kiad., 1958), 37—38. (89. lábj.). Az itt közölt idézet tartalmilag hű fordítás, bár jelentéktelen részletekben eltér a pontos fordítástól, annak érdekében, hogy ne kelljen a magyar olvasó számára magyarázatokat hozzáfűzni.

vádolható, hogy a materiális implikációt azonosítja a „ha . . . akkor" relációval. Erről meggyőzően tanúskodik pl. az alábbi idézet:

„Az a kérdés, hogy ‚$p \supset q$' (így jelöli Quine a materiális implikációt — R. I.) hogyan vág össze a közönséges kijelentőmódbeli, ‚ha — akkor'-ral, mindenesetre nyelvtani elemzés tárgya, és kevés kihatással van céljainkra. Csak azt fontos tudni, hogy ‚$q \supset q$' az úgynevezett materiális implikáció pontos jelentése ‚$-(p\bar{q})$' (e szimbólum jelentése: ‚nem igaz, hogy (p és nem q)' — R. I.), (vagy ‚$\bar{p} \vee q$') (jelentése: ‚nem p, vagy q' — R. I.[16]); és a továbbiakban majd eléggé világos lesz, hogy ez a fogalom milyen jól alkalmazható olyan célokra, amelyekre a ‚ha — akkor' kifejezés természetes módon kínálkozik."[17]

Tehát Quine véleménye, röviden, ennyi: (a) A materiális implikáció pontos jelentése „nem igaz, hogy (p és nem q)"; (b) majd látni fogjuk, hogy a logikai gyakorlatban e művelet kiválóan alkalmas a „ha . . . akkor" helyettesítésére. Nyilvánvaló, hogy ezt az álláspontot nem lehet diszkreditálni bizonyos konstans értékű állításokból képzett implikációk igaznak minősítése fölötti szörnyülködéssel,[18] hanem csakis annak kimutatásával, hogy logikai alkalmazása ellentmondásokra vagy a tapasztalattal összeegyeztethetetlen eredményekre vezet.

Tulajdonképpen nem is volna szükséges Tamásnak más szerzőkre vonatkozó hasonló vádjaival tovább foglalkozni. Hiszen lehetséges, hogy egyik vagy másik szerző pedagógiailag nem a legszerencsésebb módon vezeti be a materiális implikációt, és ilyen esetben a pedagógiai hiba pedagógiai bírálata teljesen jogosult is. De Tamás György a pedagógiai hibákat elvi-logikai hibáknak tünteti föl, és így bírálata nagyobb részben nem az egyes szerző, hanem a logikai elmélet ellen irányul.

Így pl. Varga könyvéből kiragad egy idézetet, számára alkalmas helyen elvágja, majd hozzáfűzi a kommentárt: „Nincs tehát minden rendben, de ne bolygassuk meg a már kialakított rendszert." (939.) Persze, a Tamás elvágta idézet folytatásaként még nagyon fontos érvek következnek Varga könyvében a materiális implikáció értéktáblázatának magyarázatát illetően.[19] Nem mondom, hogy ezeket még nem lehetne bővíteni és folytatni. De hát nem ez valójában a kérdés. A kérdést inkább így kell feltenni: Tamás György *valóban azt hiszi, hogy valami nincs rendben* a logika matematikai elméletében? Talán az utolsó 35—40 év lenyűgöző eredményei, Gödel nagy tételeitől Cohen legújabb eredményéig, valami zavaros, netán ellentmondásoktól terhes matematikai logika alapján keletkeztek? (És eddig ezt senki nem vette észre!)

Hasonló eredményre jutunk, ha Tamás Györgynek a Ruzsa—Urbán-féle tankönyvből vett idézeteit és hozzáfűzött bírálatát vesszük szemügyre.[20] A materiális implikáció itt kifejtett tárgyalásával kapcsolatban is helye van bizonyos pedagógiai bírálatnak. Az egyik bíráló észrevétel az lehetne, hogy a „ha A, akkor B" alakú kijelentésekkel kapcsolatban túlzott egyoldalúsággal szerepel ezeknek feltételes állításként való interpretálása. A másik jogos észrevétel pedig az lehetne, hogy helyesebb lett volna az „$A \rightarrow B$" materiális

[16] A materiális implikáció ezen kifejezési módjára még visszatérünk.

[17] Quine: „A logika módszerei", Akadémiai Kiadó, Bp. 1968, 42—43.

[18] Tamás György idéz Quine könyvéből olyanfajta groteszk implikációkat, mint e cikkben a (10) alattiak. De nem idézi Quine ezt követő kommentárját, amely tartalmát tekintve ugyanaz, mint amit e cikkben is megtalál az olvasó.

[19] Lásd Varga Tamás, 40.

[20] Ruzsa Imre—Urbán János: „Matematikai logika", Tankönyvkiadó, Bp. 1966. — A könyv előszavából megállapítható, hogy a Tamás idézte szövegrészek e sorok írójától származnak.

implikáció általános jelentését (úgy mint e cikkben) a „nem igaz, hogy (A és nem B)" kifejezéssel visszaadni, a könyvben szereplő „nem A, vagy B" helyett. Ez utóbbi kifejezési forma variánsként szerepelt már a Quine-könyvből vett idézetünkben is: illő, hogy némi magyarázatot fűzzünk hozzá.

Az élő beszédben gyakran előforduló megengedő értelmű „vagy" kötőszó, ha mondatokat kapcsol össze, olyan logikai műveletnek fogható fel, amelynek eredménye csak akkor hamis, ha mindkét tagja hamis, minden más esetben igaz. Pl. „esett az eső vagy locsolták az utat" csak akkor hamis, ha sem az eső nem esett, sem az utat nem locsolták; minden más esetben igaz. E műveletet a logikai szaknyelv *diszjunkciónak* nevezi. Így „nem A, vagy B" akkor és csak akkor hamis, ha „nem A" is, B is hamis; de mert „nem A" akkor és csak akkor hamis, ha A igaz, azért végül is „nem A, vagy B" akkor és csak akkor hamis, amikor A igaz és B hamis, vagyis pontosan akkor, amikor az „$A \rightarrow B$" materiális implikáció. Az idézett összefüggés tehát helyes. A probléma csak az, hogy „$2 \cdot 2 = 5$, vagy a tenger sós" semmivel sem jobb kiolvasása a „$2 \cdot 2 \neq 5 \rightarrow$ a tenger sós" materiális implikációnak, mint „ha $2 \cdot 2$ nem 5, akkor a tenger sós". Valójában a diszjunkció *általános* értelmét sem a „vagy" kötőszóval, hanem negáció és konjunkció segítségével definiálhatjuk (bevezetve a $\vee$ jelet a diszjunkció kifejezésére), így:

$$„A \vee B" = „\text{nem igaz, hogy (sem } A\text{, sem } B\text{)},$$

ahol „sem A, sem B" természetesen annak rövidítése, hogy „nem A és nem B". A $\vee$ művelet éppúgy nem fordítható *mindig* „vagy"-gyal, ahogyan a $\rightarrow$ nem fordítható *mindig* „ha . . . akkor"-ral. Ezért helyesebb pedagógiailag a materiális implikációnak diszjunkció (és negáció) helyett konjunkcióra (és negációra) való redukálása.

De Tamás Györgynek itt sem pedagógiai természetű észrevételei vannak. Mivel a könyvben szerepel az a megállapítás, hogy a „ha A, akkor B" alakú kijelentés értelmessége egyes esetekben vitatható, a következő megjegyzést teszi: „Annak eldöntésére, hogy valamelyik ítélet értelmes-e vagy sem, nincs logikai kritérium. A kondicionális ítélet logikai elemzésével kapcsolatban tehát e kérdés feltevése indokolatlan." Az első mondatot senki sem vitatja, az idézett könyvben nincs egyetlen sor sem, amely az ellenkezőjét állítaná. Az implikáció elemzésével kapcsolatban pedig nem azt a kérdést vetjük föl, hogy hogyan dönthető el valamely kijelentés értelmessége, csupán azt, hogy képezhetők olyan implikációk, amelyek értelmessége vitatható — és bőségesen láttuk, hogy e tény milyen nehézségekhez és félreértésekhez vezet. A megjegyzés így fejeződik be: „De nemcsak indokolatlan, hanem szükségtelen is, mivel az ítéletviszonyok felhasználásával *bármilyen* ítélet értéke eldönthető." (939.) *Láttuk*, hogy hogyan dönthető el.

Igaza van Tamás Györgynek, amikor a könyv ezen mondatát bírálja: „A, ha P, akkor Q' ítélet akkor és csak akkor hamis, amikor P igaz és Q hamis." Ez a mondat csak akkor volna elfogadható, ha benne „ítélet" helyett „feltételes kijelentés" szerepelne (a (7) táblázatból tudjuk, hogy erre az esetre helyes a megállapítás). A könyv egy korábbi helyén (240—241.) olyan előkészítő példa szerepel, amelyben a „ha A, akkor B" alakú mondatok mind feltételes állítások, és nem törvényszerű összefüggéseket kifejező implikációk. A könyv Tamás idézte helyei ezekre a példákra hivatkoznak, és *ezekre a példákra vonatkoztatva* az idézet tulajdonképpen helyes; de kétségtelen, hogy itt a kellő precizírozás hiányzik.

A materiális implikáció bírálatát Tamás György három pontban foglalja össze: „1. a kondicionális ítélet értékét a tételek értékéből próbálják — sikertelenül — levezetni, 2. a hamis előtagú implikáció értékét önkényesen és hibásan állapítják meg, 3. a materiális implikáció interpretációs paradoxonokhoz vezet." (939.) Az első két pontra vonatkozóan kár volna több szót vesztegetni. Ami a 3. pontot illeti, ez az adott fogalmazásban bizony a „karzatnak" szóló érv. Aki nem tudja, miről van szó, azt hiheti, hogy a materiális implikáció talán logikai ellentmondásokhoz vezet. Sajnos, nem olyan nagy a logikai műveltség hazánkban, hogy túl sokan tudnák, mit ért a szakirodalom „a materiális implikáció interpretációs paradoxonain". Lássunk hát egyet-kettőt mutatóba e „paradoxonok" közül.

Tekintsük az

$$(19) \qquad (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow \text{nem } B)$$

kifejezést. Könnyű belátni, hogy bármi is legyen A és B logikai értéke, ezen összetett kifejezés *mindig igaz*. Próbáljuk meg úgy kiolvasni e kifejezést, hogy a $\rightarrow$-at „ha . . . akkor"-ral, a $\vee$-t „vagy"-gyal fordítjuk. Ezt kapjuk: „ha A, akkor B, vagy, ha A, akkor nem B". Még élesebb lesz az eredmény, ha „ha . . . akkor" helyett „-ból következik"-et olvasunk: „A-ból következik B, vagy A-ból következik nem B", és ezt persze így alakíthatjuk át: „A-ból vagy B, vagy nem B következik". Mivel (19) mindig igaz, bármilyen kijelentések legyenek is A és B, eredményünk azt fejezi ki, hogy két tetszőleges állítás esetén az egyikből mindig következik vagy a másik, vagy a másik tagadása. Tehát pl. abból, hogy $2 \cdot 2 = 4$, következik az, hogy a Marson van élet, vagy ha ez nem, akkor az, hogy a Marson nincs élet. Ez természetesen abszurd eredmény. Úgy jutottunk hozzá, hogy a materiális implikációt mint „ha .. . akkor"-t, ill. mint „következik"-et interpretáltuk. Ezért nevezik ezt az összefüggést (és még néhány hasonlót) *interpretációs* paradoxonnak. — Elégszer hangsúlyoztuk e cikkben, hogy a materiális implikáció nem adekvát kifejezője a „ha . . . akkor"-nak, még kevésbé a valamivel erősebb „következik"-nek. Semmiféle abszurd eredményre nem jutunk, ha a $\rightarrow$-at (18) szerint olvassuk ki. Ekkor ugyanis a (19) kifejezés, némileg átfogalmazva és tömörítve, ennyit mond: „(A és B), valamint (A és nem B) egyike biztosan hamis". Ez valóban így van, hiszen B és „nem B" egyike biztosan hamis, így a két konjunkció egyikének biztosan van hamis tagja, tehát legalább egyikük hamis. Ebben már persze nyoma sincs az abszurditásnak.

Hasonló interpretációs paradoxonhoz vezet az ugyancsak mindig igaz $A \rightarrow$ (nem $A \rightarrow B$) kifejezés is, amely a materiális implikációnak „ha . . . akkor"-ral való fordítása esetén így fogalmazható: „ha A igaz, akkor tagadásából következik B". A „$\rightarrow$" (18) szerinti fordítása esetén viszont ezt kapjuk: „„A, nem A, és nem B' egyszerre nem lehetnek igazak", ami természetes, hiszen már A és „nem A" sem lehetnek egyszerre igazak. Nevezetes a fenti kifejezés azon speciális esete, amikor B helyére is A-t írunk: $A \rightarrow$ (nem $A \rightarrow A$). Ez az ún. *consequentia mirabilis*, amely helytelen fordítással így olvasható: „ha A igaz, akkor nem A maga után vonja A-t". Ezt idézi Tamás György is cikkében (945.), azzal fűszerezve, hogy a matematikai logika szerint tehát amikor esik az eső, olyankor abból, hogy nem esik az eső, következik, hogy esik az eső. Persze, a $\rightarrow$-nak (18) szerinti fordításával ennyit kapunk: „A, nem A, és nem A egyszerre nem lehetnek igazak" — és ez nyilvánvalóan így van.

Természetesen ezek az interpretációs paradoxonok éppen úgy nem érintik a materiális implikációnak a következtetésekben való felhasználását, ahogyan az a tény, hogy ha egy medencébe, amelyben két nagy hal tartózkodik, beteszünk két kis halat, s a nagy halak felfalják a kicsiket, nem érinti a $2 + 2 = 4$ aritmetikai törvény gyakorlati alkalmazásait. Szükséges azonban, legalább röviden, utalni arra, hogy a materiális implikáció nem az egyetlen eszköze a kétértékű logikának a köznyelvi „ha A, akkor B" kifejezésre. A további eszközök megvilágítására induljunk ki az alábbi példamondatból:

(20) Ha a felvonó működik, akkor a jelzőlámpa ég.

Ha ezt a mondatot nem feltételes állításnak tekintjük (amely csupán egy meghatározott esetre állítja, hogy a felvonó működése esetén a jelzőlámpa is ég), hanem tartósan érvényes összefüggésnek, amely azt kívánja kifejezni, hogy (legalábbis egy bizonyos időintervallumon belül) *valahányszor* a felvonó működik, *mindannyiszor* a jelzőlámpa is ég, akkor e mondat logikai ábrázolására a materiális implikáció már elégtelen. Hiszen ha egy adott időpontban az előtag történetesen hamis — azaz a felvonó nem működik —, akkor a (20) állításnak megfelelő

a felvonó működik → a jelzőlámpa ég

materiális implikáció máris igaznak számít, noha lehetséges, hogy olyankor, amikor a felvonó ténylegesen működik, a jelzőlámpa nem ég. A (20) állítás helyes ábrázolása a következő:

(21) Minden t-re: (a felvonó működik a t időpontban → a jelzőlámpa ég a t időpontban).

Ha a zárójelek közé tett kifejezésben t helyére egy konkrét időpontot gondolunk, egy konkrét materiális implikációt kapunk. A zárójel előtti „Minden t-re:" mintegy összegezi az összes lehetséges ilyen materiális implikációkat. A (21) kifejezést, egy adott I időintervallumban, akkor és csak akkor tekintjük igaznak, ha a zárójelek közti materiális implikáció minden I-beli t időpontra nézve igaznak bizonyul — azaz ha minden olyan I-beli időpontban, amelyben a „felvonó működik" igaz, egyben a „jelzőlámpa ég" is igaz. A „Minden t-re:" kifejezést *univerzális kvantornak* nevezik (természetesen t szerepében más betű is lehetséges). A (21) alatti kifejezést, és természetesen a hozzá hasonlókat is, gyakran *általánosított implikációnak* mondják. Általános alakja a következő:

Minden x-re: $(Ax \rightarrow Bx)$,

ahol Ax és Bx valamely I tartományon végigfutó x paramétertől függő kijelentések.[21]

[21] A szó szigorú értelmében Ax és Bx nem kijelentések, hanem ún. nyílt mondatok, melyekből úgy kaphatunk zárt mondatokat, kijelentéseket, ha x-et az I tartomány egy elemével (ill. annak nevével) helyettesítjük.

Az általánosított implikáció különösen alkalmas természeti törvények kifejezésére, hiszen a természeti törvények többségükben nem individuális objektumokra, hanem dolgok, jelenségek széles osztályára vonatkoznak. Az általánosított implikáció lehetővé teszi a szigorú implikáció teljes mellőzését a tudományos bizonyítások, definíciók stb. logikai elemzésében, a formalizált tudományos rendszerek tanulmányozásában, algoritmusok és komputerek konstruálásában, általában *a logika minden gyakorlati alkalmazásában.* Ez a magyarázata annak, hogy a szigorú implikáció elmélete ez idő szerint másodrangú, és inkább csak filozófiai jelentősége van.

Mindez nem jelenti azt, hogy a szigorú implikáció, filozófiai jelentőségén túl, egyszer s mindenkorra haszontalan. Már ma is mutatkoznak olyan területek, amelyeken a szigorú implikáció alkalmazása bizonyos előnyökkel jár (noha nem nélkülözhetetlen), a jövőt illetően pedig nem bocsátkozhatunk jóslásokba. De e téma tárgyalása már túlhaladná kereteinket. Ezért, befejezésül, a szigorú implikáció elméletének (az ún. *szigorú logikának)* csupán néhány problémáját említjük meg.

A szigorú logika első rendszeres tárgyalása C. I. Lewis és C. H. Langford amerikai logikusok munkája. Egyik fő céljuk olyan művelet bevezetése volt, amely a „ha . . . akkor" kapcsolatnak azt a variánsát ragadja meg, amely a logikai következmény kifejezésére szolgál. Jelöljük „$A \Rightarrow B$"-vel azt, hogy „A-ból következik B". A szigorú logika fő célja éppen a $\Rightarrow$ művelet karakterizálása; e műveletet nevezték eredetileg szigorú implikációnak. (A materiális implikáció művelete a szigorú logikában is megmarad. Téves tehát Tamás Györgynek az az állítása (idézett cikkének 940. oldalán), hogy ebben az elméletben leszűkítik a „ha . . . akkor" kapcsolat ábrázolását.) Ha egy materiális implikáció mindig igaz (tehát logikai törvény a kétértékű logikában), akkor a neki megfelelő szigorú implikáció is logikai törvény a szigorú logikában. Így például „(A és B) $\rightarrow A$" mindig igaz a kétértékű logikában, megfelelőleg „(A és B) $\Rightarrow A$" a szigorú implikáció egy törvénye. (Teljes joggal, hiszen „A és B"-ből valóban következik A.) Nevezetes tény, hogy a materiális implikáció úgynevezett paradoxonainak megfelelői a szigorú logikában nem lépnek föl. A cikkünkben idézett két paradoxon megfelelői ezek lennének:

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow \text{nem } B), \quad \text{és} \quad A \Rightarrow (\text{nem } A \Rightarrow B),$$

azonban ezek egyike sem tétel a szigorú logikában. Viszont ezek helyett más interpretációs paradoxonok lépnek föl, pl. az

$$A \text{ szükségszerűen igaz} \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

kifejezés tétele a szigorú logikának, s e tétel így interpretálható: egy szükségszerűen igaz A állítás tetszőleges B állításból következik. Ez, ha úgy értjük, hogy egy szükségszerűen igaz állítást tetszőleges állításból be tudunk bizonyítani, természetesen abszurd. A szigorú logikában fellépő ilyen interpretációs paradoxonok azt tanúsítják, hogy a Lewis—Langford-féle $\Rightarrow$ művelettel sem sikerült adekvát módon megragadni a „következik" intuitív fogalmát.

Hasonló jellegű a következő probléma is. Az alternáló logikában „(A és nem A) $\rightarrow B$" mindig igaz. Következésképp

$$(A \text{ és nem } A) \Rightarrow B$$

a szigorú logika egy törvénye. Interpretációja: egy ellentmondásból („*A* és nem *A*") tetszőleges *B* állítás bizonyítható. Ez igaz lehet egy formalizált rendszeren belül — amikor is éppen azt fejezi ki, hogy a rendszernek nem szabad ellentmondást tartalmaznia —, de természetesen a „józan ész" minden erővel tiltakozik az ellen, hogy pl. abból, hogy „süt a nap és nem süt a nap", be lehetne bizonyítani, teszem azt, a Püthagorasz-tételt.

A szigorú implikáció e szépséghibáinak korrigálása terén jelentős eredményekhez jutottak W. Ackermann német, valamint A. R. Anderson és N. D. *Belnap* amerikai logikusok. Az utóbbi két szerzőtől származó rendszerben (ez ideig) nem bukkantak interpretációs paradoxonokra.