Közgazdasági Szemle, LVII. évf., 2010. március (201–221. o.)

ERDŐS PÉTER–ORMOS MIHÁLY–ZIBRICZKY DÁVID

Egyenes-e a tőkepiaci árazási modell (CAPM) karakterisztikus és értékpapír-piaci egyenese?

Tanulmányunk egyrészt arra a kérdésre keresi a választ, vajon helytálló-e a tőkepiaci árazási modell (CAPM) azon feltevése, hogy a piaci kockázat mérőszáma, a béta és a várható hozam között lineáris kapcsolat áll fenn. Másrészt nem tudjuk, hogy megalapozott-e a kockázati mérőszám meghatározásához tett linearitási feltétel. Ha a karakterisztikus egyenesek linearitása sérül, akkor új kockázati mértékek levezetésére van szükség. Vizsgálatainkat a Standard & Poor's nagy-, közép- és kisvállalati részvényindex-komponensekből vett, 150 részvényből álló véletlen mintán végezzük el. Az amerikai részvények karakterisztikus egyeneseinek linearitása minden szokásos szignifikanciaszinten elvethető, ezért szemiparametrikus kockázati mértékeket vezetünk le. Írásunkban megmutatjuk, hogy ha a karakterisztikus egyenes linearitása sérül, akkor a tőkepiaci árazási modell bétaja átlagosan szignifikánsan alulbecsli az értékpapír kockázatát, ezért a standard piaci kockázati mérték nem használható. Eredményeink alapján megfogalmazhatjuk azt az állítást, hogy a piacot csak extrém körülmények között lehet megverni.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C14, C51, G12, G32.

A tőkepiaci árazás modellje *(Capital Asset Pricing Model, CAPM)* (*Sharpe* [1964], *Lintner* [1965], *Mossin* [1966]) máig az egyik legáltalánosabban alkalmazott egyensúlyi modell a pénzügyi szakirodalomban. A CAPM, illetve a standard eszközárazási modellek – lásd az arbitrált árazás elméletét *(Arbitrage Pricing Theory, APT)* (*Ross* [1976]), a háromfaktoros modellt (*Fama–French* [1996]) vagy a négyfaktoros modellt (*Carhart* [1997]) – a kockázat és a várható hozam között lineáris kapcsolatot feltételeznek.

Stapleton–Subrahmanyam [1983] a CAPM modell alapján lineáris összefüggést talált a hozam és kockázat között. Tanulmányunkban a CAPM alapján a két összefüggés linearitását vizsgáljuk, az egyik az értékpapírok hozama és a piaci hozam közötti viszony (karakterisztikus egyenes), a másik pedig az értékpapírok kockázata – amelyet a karakterisztikus egyenes meredekségével mérünk – és hozama közötti összefüggés (értékpapír-piaci egyenes).

A standard eszközárazási próbák lineáris regressziót alkalmaznak, amely helyes eljárás abban az esetben, ha a kockázat és hozam között valóban lineáris a kapcsolat. Ha ez a feltevés sérül, akkor a legkisebb négyzetek módszerével (OLS) vagy más lineáris módszerekkel becsült paraméterek torzítottak és inkonzisztensek.

* Köszönetünket fejezzük ki *Györfi László* professzor úrnak a kéthetenkénti konzultációs lehetőségért.

Erdős Péter a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem pénzügyek tanszékének munkatársa.
Ormos Mihály a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem pénzügyek tanszékének munkatársa.
Zibriczky Dávid a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem számítástudományi és információelméleti tanszékének végzős hallgatója.

A karakterisztikus egyenes két becsült paramétere az alfa és a béta; az előbbi az abnormális hozamot méri (lásd *Jensen* [1968]), utóbbi pedig az értékpapír releváns kockázatát. Ha a tőkepiac egyensúlyban van, akkor a CAPM szerint az értékpapírok a kockázatunknak megfelelő hozamot biztosítják, azaz az abnormális hozam várható értéke nulla.

A vázolt kérdéseket két irányból járjuk körül: egyrészt megvizsgáljuk, hogy a CAPM alapján levezethető két összefüggés linearitás nullhipotézise fennáll-e, másrészt megvizsgáljuk új kockázati mértékek („alfa" és „béta") levezetésének lehetőségét arra az esetre, ha a nullhipotézist elvetjük. Az utóbbira azért van szükség, mert ha általánosságban nem áll fenn a linearitás, akkor az arra épülő kockázati mértékek hibásak, és a belőlük levonható következtetések megkérdőjelezhetők.

Vizsgálatunkat az S&P (Standard & Poor's) nagy-, közép- és kisvállalati részvényindex-komponenseiből vett (S&P 500, S&P MidCap 400, S&P SmallCap 600) véletlen mintán végezzük el az 1999 és 2008 közti időszakot felhasználva. A napi hozamadatokat a Center for Research in Security Prices (CRSP) adatbázisából nyertük. Az egyes indexekből véletlen mintavételi eljárással 50-50-50 vállalatot választottunk ki. A karakterisztikus egyenesek linearitáspróbája alapján minden szokásos szignifikanciaszinten elvethetjük a piac linearitását. Négy értékpapír-piaci egyenest is becsültünk, egyet-egyet a három méret alapján meghatározott vállalati szegmensre, egyet pedig a piac egészére. Az értékpapír-piaci egyenesek linearitása nem vethető el. A kisvállalatokra illesztett értékpapír-piaci egyenes meredeksége negatív, azaz eredményeink igazolják a kisvállalati hatást (lásd például *Banz* [1981], *Basu* [1983], *Fama–French* [1995]). A pénzügyi irodalomban jól dokumentált megfigyelés, hogy a kisvállalatok kockázata nagyobb, és emiatt várható hozamuk magasabb, azaz a piaci kockázat mellett a vállalatméret is kockázati tényező. Külön kiemelést érdemel az az eredményünk, hogy a linearitás a nagyvállalati szegmensben a karakterisztikus egyenes tekintetében minden szokásos szignifikanciaszint mellett elvethető. Mivel a kis- és középvállalatok karakterisztikus egyenesének linearitása nem vethető el 95 százalékos szignifikanciaszinten, ezért a kisvállalati hatás nem magyarázhatja a linearitás sérülését.

Alkalmazott módszertan

A lineáris és nemlineáris regresszió közötti különbség

A statisztikában a regresszióanalízis során a két vagy több változó közötti kapcsolatot modellezzük. Legáltalánosabb esetben a regresszió egy feltételes várható értéket jelent, ami megadható

$$E(Y|X) = m(X) \tag{1}$$

formában, ahol Y a független, X pedig a magyarázó változó. Lineáris kapcsolat feltételezése esetén az egyszerű lineáris regressziós becslések alkalmazhatók [például legkisebb négyzetek módszere (OLS), maximum likelihood becslés, általánosított momentumok módszere (GMM)], azonban ha a linearitás sérül, akkor a lineáris becslőfüggvények torzított és inkonzisztens paraméterbecsléshez vezetnek. A bevezetőben vázolt vizsgálatokhoz olyan robusztus, eloszlástól független módszerre van szükségünk, amely nemlineáris környezetben is pontos becsléseket nyújt.

Az (1) egyenletet lineáris regresszióként értelmezve, a tőkepiaci árazás modelljét (CAPM) a következő formában adhatjuk meg:

$$Y_{i,j} = \hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_j X_{i,j} + \hat{\varepsilon}_{i,j} \qquad i = 1,2,3,...,n; \qquad j = 1,2,3,...,N, \tag{2}$$

ahol $\hat{\alpha}_j$ és $\hat{\beta}_j$ a *j*-edik értékpapír karakterisztikus egyenesének tengelymetszete és meredeksége, valamint $\hat{\varepsilon}_{i,j}$ a regresszió hibatagja. $Y_{i,j}$ és $X_{i,j}$ rendre a *j*-edik értékpapír és a piac kockázati prémiuma az *i*-edik időpontban.

Esetünkben nem feltételezünk lineáris kapcsolatot a változók között, ezért a lineáris regresszió nem megfelelő módszer az (1) egyenlet becslésére. *Nadaraya* [1964] és *Watson* [1964] kidolgozott egy magfüggvényalapú regressziós becslést, amely anélkül képes becsülni az (1) egyenlőséget, hogy az *Y* és *X* közötti kapcsolat formájáról bármit is feltennénk. A Nadaraya–Watson-féle becslőfüggvény

$$\hat{m}_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_{hi}(x) Y_i \tag{3}$$

formában írható fel, ahol $W_{hi}(x)$ az úgynevezett Nadaraya–Watson-féle súlyfüggvény, amely

$$W_{hi}(x) = \frac{K_h(x - X_i)}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K_h(x - X_j)} \tag{4}$$

összefüggés alapján határozható meg, ahol $K_h(u)$ a magfüggvény, *h* pedig egy jól választott sávszélesség.[1] A becslőfüggvény *x* pontra vonatkozó becslése a „*h* ablakban lévő” Y_i pontok súlyozott átlaga. A Nadaraya–Watson-becslőfüggvény a $W_{hi}(x)$ súlyvektort a távolságok alapján határozza meg, azaz egy-egy Y_i pont súlya arányos az $x - X_i$ távolsággal. Ha egy X_i pont távol van a becsülendő ponttól, Y_i kisebb súlyt kap a becslésben, és fordítva.

A magfüggvény kiválasztása

Härdle és szerzőtársai [2004] szerint a magfüggvény kiválasztása csak másodlagos jelentőségű, a hangsúly inkább a sávszélesség helyes megválasztásán van. Az *1. táblázat* foglalja össze a leggyakrabban használt magfüggvényeket.

Az *1. táblázatban* szereplő magfüggvények egy része *I* indikátort tartalmaz, amelynek értéke egységnyi, ha az indikátorban szereplő feltétel teljesül, egyéb esetben az értéke zérus. *Härdle és szerzőtársai* [2004] szerint az Epanechnikov-féle magfüggvény konvergál a leggyorsabban a becslés elméleti értékéhez. A későbbiekben közölt eredményeket több magfüggvény kipróbálásával is megbecsültük, de nem tapasztaltunk szignifikáns különbséget az egyes módszerek között.[2]

Ha a linearitás sérül, akkor szemiparametrikus kockázati mértékeket („alfa” és „béta”) kell használni, amihez deriváltbecslést alkalmazunk, azaz olyan magfüggvényre van szükségünk, amely minden pontban differenciálható. Az indikátor használata sok esetben törést okoz a függvényben, ezért a következő feltételeket szabjuk meg ezek kiküszöbölésére:

1. $K(u)$ folytonos a [–1, 1] zárt intervallumon,
2. $K(u) = 0$, $K'(u) = 0$ és $K''(u) = 0$, $u = -1, 1$ pontokban.

A feltétel a felsorolt magfüggvények közül csak a harmadfokúra és a Gaussra áll fenn. Mi az indikátor nélküli Gauss-kernelt (Gauss-féle magfüggvényt) alkalmazzuk, amely

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \tag{5}$$

formában írható fel.

[1] A sávszélesség a simítás mértékének paramétere, lásd részletesen a *Sávszélesség meghatározása* című alfejezetben. A tömörség kedvéért a (4) egyenletben felhasználtuk, hogy $K_h(x - X_i) = 1/h \times K[(x - X_i)/h]$.

[2] Ezeket az eredményeket itt nem közöljük, de kérésre rendelkezésre bocsátjuk.

1. táblázat
A leggyakrabban használt magfüggvények képletei

Megnevezés	Képlet
Kernel (rendszermag)	$K(u)$
Egyenletes	$\frac{1}{2} I\left(\lvert u\rvert \le 1\right)$
Háromszög	$\left(1-\lvert u\rvert\right) I\left(\lvert u\rvert \le 1\right)$
Epanechnikov	$\frac{3}{4}\left(1-u^2\right) I\left(\lvert u\rvert \le 1\right)$
Harmadfokú	$\frac{35}{32}\left(1-u^2\right)^3 I\left(\lvert u\rvert \le 1\right)$
Cosinus	$\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) I\left(\lvert u\rvert \le 1\right)$
Gauss	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right)$

Megjegyzés: $I(\cdot)$ egy indikátorfüggvény, amelynek értéke egységnyi, ha a függvényben lévő feltétel teljesül, és nulla különben.

A sávszélesség meghatározása

Mint azt említettük, a sávszélesség megválasztása fontosabb tényező, mint a magfüggvény kiválasztása, ezért erre nagyobb hangsúlyt helyezünk. A h sávszélesség a simítás mértékét reprezentálja, ha értéke növekszik, akkor a magfüggvény ellaposodik (kiszélesedik), így adott pont becslésénél a közeli kiugró értékek hatása csökken, a távolabbi értékek befolyása pedig relatíve nő. Ha a sávszélességet túl nagyra választjuk, akkor a görbénk túlsimított lesz, a torzítás mértéke nő, a becslés szórása pedig csökken, mivel kisebbek lesznek a kiugrások. Túl kis sávszélesség esetén közeli X_i pontok hatása erősödik, így a becslés Y_i-hez fog tartani, ami alulsimítottságot okoz. Ebben az esetben a becslés varianciája nő, a torzítás nőhet, vagy csökkenhet. Az optimális sávszélességtől távolodva, mindkét esetben nő a négyzetes hiba. Az *1. ábrán* ábrázoltuk az alul-/túlsimítottság eseteit, megfigyelhető, hogy ritka pontsűrűség esetén (a grafikon két szélén) az alulsimított görbe a megfigyelési pontokon ugrál, ami torzítottságra utal, a túlsimított görbe pedig „nehezen tér vissza a pontokhoz", mivel a közeli pontok hatása csekély.

Célunk az optimális sávszélesség meghatározása, amely minimalizálja a becslési hibát. A becslési hibát az átlagos négyzetes hibával *(average squared error, ASE)* mérjük, ami

$$ASE(h) = ASE\left[\hat{m}_h\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{m}_h\left(X_i\right) - m\left(X_i\right)\right]^2 w\left(X_i\right), \tag{6}$$

ahol $\hat{m}_h(X_i)$ az (1) egyenlet becsült értéke, $m(X_i)$ pedig ugyanennek az elméleti értéke. A $w(X_i)$ függvénnyel a kiugró értékek hatását csökkenthetjük, a becslés során ezt nem fogjuk használni, mivel épp az extrém értékek jelenléte miatt alkalmazzuk a kernelregressziót, és emiatt kérdőjelezzük meg a linearitást, ennek megfelelően minden i-re $w(X_i) = 1$. Mivel az $ASE(h)$ egy valószínűségi változó, vehetjük a feltételes várható értékét, hogy ez pont a torzítás négyzetének és a variancia összege, azaz

$$MASE(h) = E[ASE(h)|X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] = b^2(h) + v(h) \tag{7}$$

ahol a torzítás

$$b(h) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{K_h(X_i - X_j)}{\hat{f}_h(X_i)}m(X_j) - m(X_i)\right]^2 w(X_i)}, \tag{8}$$

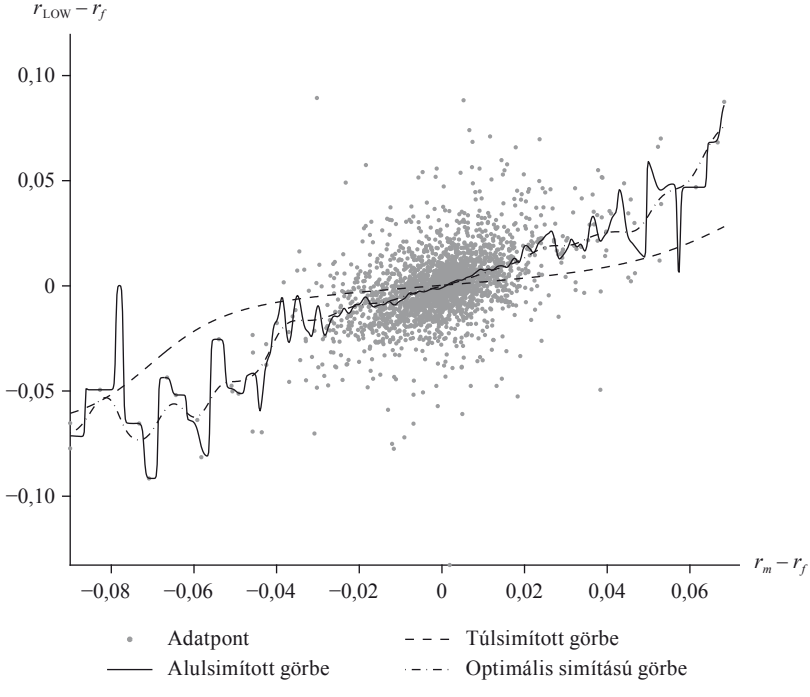
a variancia pedig

$$v(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{K_h(X_i - X_j)}{\hat{f}_h(X_i)}\right]\sigma(X_j)^2\right\}w(X_i). \tag{9}$$

Az $m(\cdot)$ függvényt nem ismerjük, ezért a torzítást nem lehet kiszámítani, így olyan módszert kell alkalmazni, ami az átlagos négyzetes hiba várható értéke *(mean average squared error, MASE)* közelítését adja, és kiszámítható az adatsorból. Ha minimalizáljuk az *ASE*-t,

1. ábra

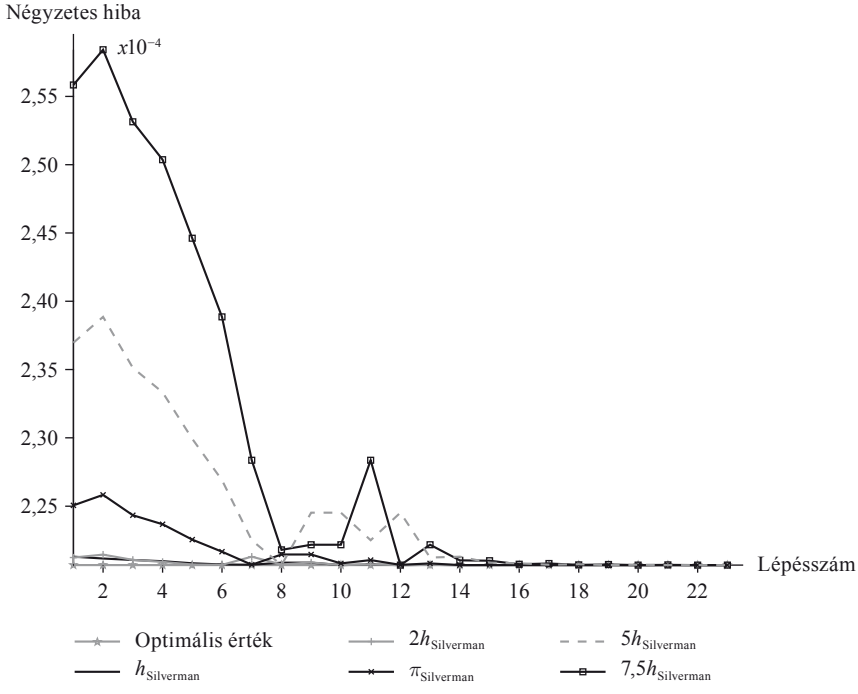
Rossz sávszélességek alkalmazása*



*A Lowe's (véletlenszerűen választott) karakterisztikus egyenesének becslése kernelregresszióval, a piaci hozam a piaci kapitalizációval súlyozott CRSP-index hozama, a kockázatmentes hozam pedig az amerikai egy hónapos diszkontkincstárjegyek napi hozama. A modell nemparametrikus CAPM, $r_{LOW} - r_f = \hat{m}_h(r_m - r_f) + \hat{\eta}_{LOW}$ formában adható meg, ahol $r_{LOW} - r_f$ a Lowe's kockázati prémium, $r_M - r_f$ a piaci kockázati prémium, $\hat{\varepsilon}_{LOW}$ pedig a reziduum. Itt és az összes többi ábrán az optimális sávszélességet, *h*-t a keresztvalidációs eljárással *(cross validation, CV)* választottuk, a kernelregresszió során a Gauss magfüggvényt és a *Nadaraya–Watson*-féle súlyozást használtuk. Az ábrán az alulsimított görbe sávszélessége ötszöröse a keresztvalidációs szerinti optimálisnak, míg a túlsimított az ötöde.

2. ábra

A kernelregresszió négyzetes hibájának minimalizálása az iterációk számának függvényében különböző kezdőértékek mellett* (négyzetes hiba–lépésszám térben)



*A Lowe's (véletlenszerűen választott) karakterisztikus egyenesének kernelregressziós becslésén vizsgáltuk az optimalizáció folyamatát. Az alkalmazott módszer leírását lásd az *1. ábra* jegyzetében. A sávszélesség induló értékei: a *Silverman* [1986] ökölszabály szerinti, illetve a Silverman-féle választás 2, π, 5 és 7,5-szerese. A minimalizálási problémát a szimplex keresési módszerrel oldottuk meg (*Lagarias és szerzőtársai* [1998]), a kezdőértékek függvényében rendre 14, 15, 16, 21 és 22 lépésben.

a *MASE* is minimális lesz. Helyettesítsük be $m(\cdot)$ helyére Y megfelelő értékeit a (6) összefüggésbe, így adódik, hogy

$$p(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - \hat{m}_h\left(X_i\right)\right]^2 w\left(X_i\right). \tag{10}$$

A (10) közelíti *MASE*-t, de ennek van egy hibája, nevezetesen hogy $\hat{m}_h(X_i)$-vel Y_i saját magát becsüli, így $h \to 0$ esetén $p(h)$ értéke tetszőlegesen csökkenthető, és így $\hat{m}_h(\cdot)$ az Y_i interpolációjához közelítene. *Härdle és szerzőtársai* [2004] büntetőfüggvény használatával küszöbölte ki ezt a hibát. Legyen

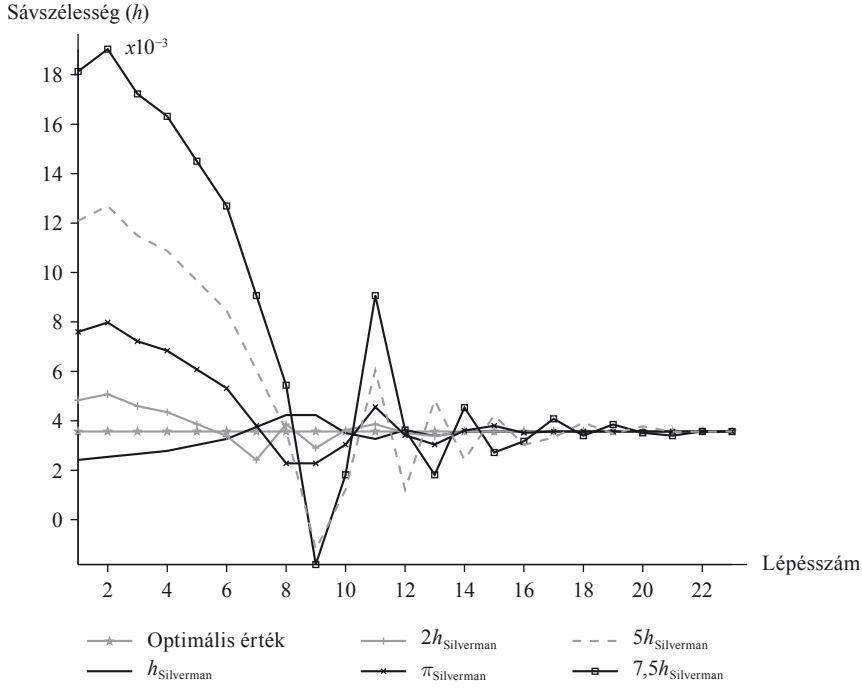
$$G(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - \hat{m}_h\left(X_i\right)\right]^2 \Xi\left[\frac{1}{n}W_{hi}\left(X_i\right)\right] w\left(X_i\right), \tag{11}$$

ahol $\Xi(h)$ faktor h csökkenésével nő, azaz korrigálja a naiv $Y_i \sim m_h(x)$ közelítésből adódó hibát. Vegyük az általánosított keresztvalidációs *(generalized cross-validation)* büntetőfüggvényt, ami

$$\Xi_{GCV}(u) = (1 - u)^{-2}, \tag{12}$$

3. ábra

A sávszélesség optimalizálásának lépésszáma különböző kezdőértékekkel*
(sávszélesség–lépésszám térben)



*Lásd a *2. ábra* jegyzetét.

ha ezt alkalmazzuk (11)-re, kapjuk, hogy

$$CV(h) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - \hat{m}_h(X_i)\right]^2\left[1 - \frac{1}{n}W_{hi}(X_i)\right]^{-2}, \tag{13}$$

amit keresztvalidációs *(cross-validation, CV)* függvénynek nevezünk. *Härdle és szerzőtársai* [2004] bizonyítása alapján, ha $CV(h)$ minimális, akkor az átlagos négyzetes hiba (*ASE*) is minimális, így a kernelregresszió sávszélessége optimális. A minimalizálási probléma megoldásához *Lagarias és szerzőtársai* [1998] által bemutatott szimplex keresési módszert *(simplex search method)* használjuk. Ha az optimálishoz közeli kezdőértéket választunk, akkor csökkenthető a lépésszám, így gyorsítható a minimalizálás.[3]

A sávszélesség becslésére alkalmazhatjuk a Silverman-féle ökölszabály korrigált változatát is (*Silverman* [1986]), ami

$$\hat{h}_{rot} = 1{,}06\min\left[\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}, \frac{R}{1{,}34}\right]n^{-\frac{1}{5}}, \tag{14}$$

ahol $R = Q_3(X) - Q_1(X)$, azaz a harmadik és az első kvartilis különbsége. A modell annál pontosabb, minél közelebb van az eloszlás a normálishoz. Mivel a vizsgált adatsorok el-

[3] Erre főleg nagy adatsorok esetén van szükség, mivel a $CV(h)$ függvény számítási igénye n^4-nel arányosan növekszik.

oszlása nem normális, az optimális becsléshez ezt a szabályt nem használhatjuk, viszont kiválóan alkalmas a minimalizáló algoritmus egy kezdőértékének meghatározására, amivel az algoritmus számításigénye jelentősen csökkenthető.[4] A *2. ábrán* látható a négyzetes hiba nagysága az iterációs folyamat lépésszámának függvényében, minél közelebb van az indulóérték az optimális sávszélességhez, annál gyorsabb a konvergencia. Az ábrán látható, hogy az algoritmus a Silverman-féle szabály szerint választott sávszélességgel találja meg leggyorsabban az optimumot. Megfigyelhető, hogy nem csökken minden lépésben a négyzetes hiba, mivel az algoritmus kiküszöböli annak a lehetőségét, hogy az optimalizáció egy lokális minimumban ragadjon. A *3. ábrán* látható, hogy az optimalizálás során a sávszélesség az optimális érték körül oszcillál, az amplitúdó a Silverman-féle választás esetén cseng le leggyorsabban.

Az illeszkedés jósága

Ahhoz, hogy eldöntsük, melyik modell becsül pontosabban, egy mértékre lesz szükségünk. Az összevethetőség érdekében a kernelregressziónál is a lineáris regressziónál gyakran alkalmazott R^2-et használjuk az illeszkedés jóságának mérésére. Az R^2 definíció szerint

$$R^2 \equiv 1 - \frac{SSE}{SST}, \tag{15}$$

ahol $SSE = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \hat{m}_h(X_i) \right]^2$, illetve $SST = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overline{Y} \right)^2$.

Ez a definíció megegyezik a lineáris regresszió legkisebb négyzetes becslésénél használt R^2-tel, azzal a különbséggel, hogy SSE-ben $\hat{m}_h(X_i)$ helyére a parametrikus, $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$ becslés kerül. Mivel azonos módon számítjuk a két statisztikát, így ezek összevethetők.[5]

Konfidenciasáv

A kernelregresszió csak közelíti $m(x)$-et, így a becslés alapján teljes bizonyossággal nem állíthatunk semmit a valós folyamatról, a becslés értéke minden x pontban egy valószínűségi változó. Konfidenciasávot becslünk, hogy egy adott bizonyossági szint választása mellett be tudjuk határolni az elméleti összefüggés által leírt görbe elhelyezkedését. Legyen

$$\left[\hat{m}_h(x) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\|K\|_2 \, \hat{\sigma}^2(x)}{nh\hat{f}_h(x)}}, \hat{m}_h(x) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\|K\|_2 \, \hat{\sigma}^2(x)}{nh\hat{f}_h(x)}} \right], \tag{16}$$

ahol a variancia x pontban

$$\hat{\sigma}^2(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{hi}(x) \{ Y_i - \hat{m}_h(x) \}^2, \tag{17}$$

$\|K_{Gauss}\|_2$ a Gauss-féle magfüggvény kettes normája, azaz

[4] A normalitást Jarque–Bera-próbával ellenőriztük, ezek az eredmények kérésre rendelkezésre állnak.

[5] A lineáris regressziónál a jobb összevethetőség érdekében célszerű korrigált R^2-et használni, mivel a paraméterbecslés miatt elveszítünk néhány szabadságfokot (a mi esetünkben kettőt). Megjegyezzük, hogy ennek a jelen értelmezésben csekély a jelentősége, mivel viszonylag nagy mintával dolgozunk.

$$\|K_{Gauss}\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |K|^2 \, dx} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}, \tag{18}$$

$\hat{f}_h(x)$ a becsült sűrűségfüggvény x pontban, α pedig a konfidenciaszint (*Härdle és szerzőtársai* [2004]).

A konfidenciasáv jellemzően kiszélesedik, ha x környezetében a megfigyelési pontok száma csökken. Mivel a piaci hozam eloszlása nem egyenletes, illetve nullától távolodva csökken a megfigyelések előfordulási valószínűsége, a karakterisztikus egyeneseknél jellemzően a szélek felé szélesedő konfidenciasáv figyelhető meg (lásd később például a *4. ábrát*).

Hipotézisvizsgálat

Hipotézisvizsgálattal fogjuk ellenőrizni azt a feltevést, hogy a CAPM lineáris-e, mind a karakterisztikus egyenes, mind az értékpapír-piaci egyenes esetén. A lineáris regresszió nullhipotézisével a kernelregresszió alternatív hipotézisét állítjuk szembe.

PRÓBASTATISZTIKA. Legyen a parametrikus modellünk

$$E(Y|X = x) = m_\theta(\cdot), \tag{19}$$

ahol θ a becsült paraméterek vektora. A nullhipotézisünket úgy fogalmazhatjuk meg, hogy X és Y közötti kapcsolat felírható parametrikus regresszió segítségével, azaz

$$H_0\colon m(x) \equiv m_\theta(x),$$

amit a

$$H_1\colon m(x) \neq m_\theta(x)$$

alternatív hipotézissel szemben tesztelünk. A $\hat{\theta}$ vektor a θ paramétervektor becslése, ami kiszámítható standard parametrikus regressziós becslésekkel. $m(x)$-et nem ismerjük, ezért ennek közelítésére $\hat{m}_h(x)$ kernelregressziót alkalmazzuk. Ha nem tudjuk elvetni H_0-t, az azt jelenti, hogy a kernelregresszió szignifikánsan nem különbözik a parametrikus regressziótól.

A két becslés közti eltérést a

$$\sqrt{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{m}(X_i) - m_{\hat{\theta}}(X_i)\right]^2 w(X_i) \tag{20}$$

függvénnyel mérhetjük. Míg az $m_{\hat{\theta}}(\cdot)$ általános feltételek mellett aszimptotikusan torzítatlan és a becsült paraméterek $\sqrt{n}$-nel konvergálnak az elméleti értékükhöz, addig a nemparametrikus becslés a simításból adódóan torzított, és a konvergencia sebessége csak $\sqrt{nh}$. A probléma orvoslására *Härdle–Mammen* [1993] mesterséges torzítást vezetett be a parametrikus becslésbe. Az $m_{\hat{\theta}}(x)$ helyett a súlyozott parametrikus kernelregressziót alkalmazták, azaz

$$\hat{m}_{\hat{\theta}}(X_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_h(X_i - X_j) m_{\hat{\theta}}(X_j)}{\sum_{j=1}^{n} K_h(X_i - X_j)}, \tag{21}$$

amiből a

$$T = \sqrt{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{m}(X_i) - \hat{m}_{\hat{\theta}}(X_i)\right]^2 w(X_i) \tag{22}$$

próbastatisztikát vezették le. A T-érték eloszlása nem ismert, viszont *wild bootstrap* eljárással meghatározható. A $w(X_i)$ itt is egy súlyfüggvény, amit tetszés szerint választhatunk. A továbbiakban $w(X_i)$ értékét bármely X_i pontban egységnyinek vesszük.[6] *Härdle–Mammen* [1993]) alkalmazta először a *wild bootstrap* (lásd például *Wu* [1986]) mintageneráló eljárást nemparametrikus hipotézisvizsgálat esetén. A módszer a parametrikus becslés $\hat{\varepsilon}_{i,j}$ hibája alapján generál új Y_i^* mintákat. Az eljárás feltétele, hogy az eredeti és az új adatsor hibatagjainak eloszlása az első három momentumukban megegyezzen.

A WILD BOOTSTRAP HIPOTÉZISVIZSGÁLAT MENETE

1. Határozzuk meg a (22)-ben definiált T értékét!
2. Számítsuk ki a parametrikus regresszió hibatagjait minden i-re!
3. Állítsunk elő $\varepsilon_{i,j}^*$-t, az „aranymetszés szabálya" alapján, azaz q valószínűséggel legyen $\varepsilon_{i,j}^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\hat{\varepsilon}_{i,j}$, $1-q$ valószínűséggel pedig legyen $\varepsilon_{i,j}^* = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\hat{\varepsilon}_{i,j}$, ahol $q = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ és $\hat{\varepsilon}_{i,j}$ a (2)-ben definiált regresszió maradéktagja![7]
4. Generáljunk minden j részvényre $Y_{i,j}^* = m_{\hat{\theta}_j}(X_i) + \varepsilon_{i,j}^*$ szerint új $\left\{\left(Y_{i,j}^*, X_{i,j}\right)\right\}_{i=1,\dots,n}$ mintát!
5. Számítsuk ki az új minta alapján a T^*-értéket, $T^* = \sqrt{h}\sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{m}(X_i) - Y_i^*\right\}^2$!
6. Generáljunk n_{boot} darab különböző mintát, a 3–5. lépések megismétlésével!
7. H_0 teljesül, ha $T < P_{(1-\alpha)100}(T^*)$, azaz ha T értéke T^* megfelelő kvantilisénél kisebb.

LINEARITÁSI PRÓBA. A bevezetőben szó volt arról, hogy a CAPM linearitást feltételez. Vizsgálni szeretnénk az értékpapír-piaci egyenes és az egyes részvények karakterisztikus egyenesének linearitását. Tegyük fel, hogy a vizsgált egyenesek jól írják le a kapcsolatot, azaz a várható hozam–kockázat, illetve az értékpapír hozam–piaci hozam párok lineáris kapcsolatban állnak egymással. Ebben az esetben a lineáris regresszió használata a legcélszerűbb, hiszen a paramétereket gyorsan, kis számítási kapacitással megbecsülhetjük például a legkisebb négyzetek módszerével, azaz (19) egyenletre adódik (az egyszerűség kedvéért az indexeket elhagyva), hogy

$$m_{\hat{\theta}}(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x. \tag{23}$$

A (21) és a (23) összefüggést a (22)-be helyettesítve, a T értékére kapjuk, hogy

$$T = \sqrt{h}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}K_h(X_i - X_k)Y_i}{\sum_{k=1}^{n}K_h(X_i - X_k)} - \frac{\sum_{k=1}^{n}K_h(X_i - X_k)\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_k\right)}{\sum_{k=1}^{n}K_h(X_i - X_k)}\right\}^2 w(X_i), \tag{24}$$

ahol $w(X_i) = 1$ bármely i-re.

A linearitási próba a korábban bemutatott hétlépéses hipotézis vizsgálat alapján történik. Amennyiben a hipotézist elvetjük, a lineáris módszerek nem használhatók paraméterbecslésre, mivel a lineáris regresszióval becsült paraméterek torzítottak és inkonzisztensek lennének. Ebben az esetben más módszert kell alkalmaznunk.

[6] Ennél az esetnél is azért nem használjuk a súlyfüggvényt, hogy a kiugró értékek (outlierek) jelentőségét ne csökkentsük.

[7] Az így generált minta teljesíti a három szükséges feltételt, azaz $E\left(\varepsilon_i^*\right) = 0$, $E\left(\varepsilon_i^{*2}\right) = \hat{\varepsilon}_i^2$, $E\left(\varepsilon_i^{*3}\right) = \hat{\varepsilon}_i^3$.

Kockázatbecslés és teljesítménymérés

A CAPM szerinti lineáris világban egy adott értékpapír kockázatát a karakterisztikus egyenes meredekségével, a bétával tudjuk mérni; az abnormális, egyensúlyitól eltérő teljesítményt pedig ugyanennek az egyenesnek a tengelymetszetével, a Jensen-alfával (*Jensen* [1968]).

Béta-becslés

A releváns, nem diverzifikálható kockázatot a lineáris regresszióval becsült $\hat{\beta}$-val, azaz a karakterisztikus egyenes meredekségével jellemezhetjük. Nemlineáris esetben, ez a $\hat{\beta}$ nem használható, így szemiparametrikus módszerekkel próbáljuk a kockázatot közelíteni. Nemparametrikus módszerről lévén szó, a kernelregresszió esetén a klasszikus értelemben vett $\hat{\beta}$-k nem adottak, így csak szemiparamterikus „bétákat" tudunk becsülni. *Härdle és szerzőtársai* [2004] szerint x pontban $\overline{\hat{\beta}(x)} = \left[\hat{\beta}_0(x), \hat{\beta}_1(x), ..., \hat{\beta}_p(x)\right]^T$ megbecsülhető

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1(X_i - x) - ... - \beta_p(X_i - x)^p\right]^2 K_h(x - X_i) \tag{25}$$

mimalizálásával. Ez a súlyozott legkisebb négyzetek módszere (WLS), ahol a súlyok (4)-ben definiáltak. A súlyozott legkisebb négyzetes szemiparametrikus bétabecslés

$$\hat{\beta}(x) = \left(X^T W X\right)^{-1} X^T W X, \tag{26}$$

ahol $X = \begin{pmatrix} 1 & X_1 - x & (X_1 - x)^2 & \cdots & (X_1 - x)^p \\ 1 & X_2 - x & (X_2 - x)^2 & \cdots & (X_2 - x)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n - x & (X_n - x)^2 & \cdots & (X_n - x)^p \end{pmatrix}$,

ahol p a regresszió fokszáma, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} K_h(x - X_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_h(x - X_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K_h(x - X_n) \end{pmatrix}$.

A (26)-ban definiált becslést lokális polinomiális regressziónak nevezzük (lásd *Härdle és szerzőtársai* [2004]). A $\hat{\beta}(x)$ vektornak annyi eleme van, amekkora a becsült egyenlet fokszáma, így például $\hat{\beta}_0(x)$ az $\hat{m}_h(x)$ regressziós függvény lokális konstans becslése, ami maga a Nadaraya–Watson-féle kernelregresszió. $\hat{\beta}_1(x)$ az x pont kis környezetében közelíti $m'(x)$-et, azaz a deriváltat, amiből már az átlagos meredekség meghatározható.

A CAPM modell lineáris, tehát azt feltételezi, hogy a regresszió fokszáma egy, ezért mi a lokális polinomiális regresszió fokszámát egynek vesszük, és így határozzuk meg a „béta" szemiparamétert. *Blundell–Duncan* [1991] alapján a béta egyszerűen a becslés deriváltjának várható értéke, azaz

$$\hat{\beta}^* = E\left[\hat{m}_h'(x)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_1(X_i). \tag{27}$$

Ezzel nemlineáris kapcsolat esetén is jó becslést adhatunk a piaci kockázatra. Ennek a módszernek az az előnye, hogy figyelembe veszi azt is, ha a karakterisztikus „egyenes" linearitása csak bizonyos szakaszon sérül; nem kívánja meg azt, hogy az adott vállalat kockázata konstans legyen bármilyen piaci körülmények között, lehetőséget ad, hogy extrém piaci körülmények között a felhasználó tudjon extrém kockázatot becsülni, ezáltal a mérték egy realisztikusabb képet fest a valós kockázatról.

Alfa-becslés

A normális hozamtól való eltérést, azaz az abnormális teljesítményt *Jensen* [1968] a karakterisztikus egyenes tengelymetszetével (az alfával) mérte. Abban az esetben, ha a linearitás sérül, ez nem járható út, mivel a becsült alfa torzított és inkonzisztens lenne. A béta-becsléshez hasonlóan szemiparametrikus mértéket fogunk levezetni. Az átlagos teljesítményt meghatározhatjuk az átlagos kockázatnak megfelelő hozam feletti többlettel, ezt nevezzük alfanak vagy szemiparametrikus alfának. Legyen az alfa becslése

$$\hat{\alpha}^* = E\left[\hat{\alpha}^*(x)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}^* X_i\right), \tag{28}$$

ahol $\hat{\beta}^*$ (27)-ben definiált.

A Jensen-féle alfa csak akkor jó teljesítménymérték, ha a karakterisztikus egyenes mindenhol pontosan alfával van a CAPM által kijelölt hozam felett, ez csak lineáris összefüggés esetén áll fenn. A (28)-ban definiált mérték ezzel ellentétben minden x pontra meghatározza az abnormális hozam értékét, ami pontonként eltérő lehet, és ezek átlagaként adódik az átlagos teljesítmény.

Adatok

Az elemzéshez 50-50-50 vállalatot választottunk ki véletlenszerűen az S&P 500, S&P MidCap 400 és S&P SmallCap 600 indexekből. Ezek az indexek jól reprezentálják a nagy-, a közepes és a kisvállalatok tőkepiaci hozamait. A piaci hozam a CRSP adatbázisában elérhető, piaci kapitalizációval súlyozott, osztalékkal korrigált index hozama (VWRETD), amely a New York Stock Exchange (NYSE), az American Stock Exchange (AMEX) és a Nasdaq részvények hozamait követi. A kockázatmentes hozam a CRSP adatbázis egy hónapos amerikai diszkontkincstárjegy napi hozama. A regressziós elemzéshez a kockázatmentes, a piaci és a részvények napi hozamát a szakirodalomban elfogadott, 10 éves időtartamra vettük, 1999. január 4-től 2008. december 31-ig. A felhasznált adatok túlélési torzítástól (lásd *Elton és szerzőtársai* [1996]) nem mentesek, azaz csak azok a vállalatok kerülhettek be az adatbázisba, amelyek a vizsgált időszak végén még a piacon voltak. Ez torzíthatja a becsült paramétereket, hiszen az átlagosnál nagyobb a kockázatuk azoknak a vállalatoknak, amelyek csődbe mennek, és esetleg szignifikánsan alulteljesítik a piacot. Meg kell jegyezni, hogy a túlélési torzítás az átlagosnál csekélyebb lehet azáltal, hogy a nagyvállalatok mellett közép- és kisvállalatokat is bevontunk az elemzésbe.

A módszerek gyakorlati illusztrálására a felhasznált adatbázisból véletlenszerűen választottunk egy részvényt, a Lowe's Companies Inc. részvényét (LOW), amely S&P 500 komponens. Szintén véletlenszerűen választottunk egy vállalatot – a National Oilwell Varco Inc.-t, ami S&P 500 komponens –, amelynek a karakterisztikus egyenese nem lineáris.

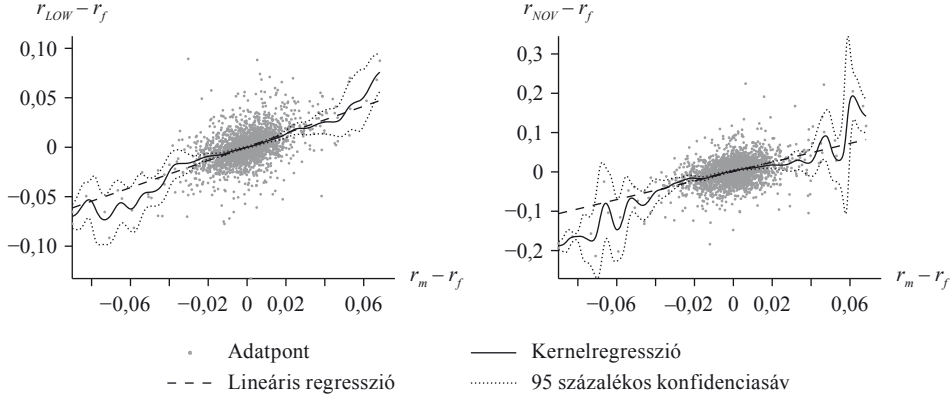
Eredmények

A következőkben a véletlen választással kijelölt LOW részvényen illusztráljuk a módszertani részben bemutatott becsléseket és az ehhez kapcsolódó hipotézisvizsgálatot. A Lowe's vállalat karakterisztikus egyenesének becslése a *4. ábra A)* részén látható. A folytonos görbe a (3)-ban definiált kernelregressziót, a szaggatott egyenes a (2)-ben megadott lineáris regresszió, a pontozott görbe a kernelregresszió konfidenciasávját mutatja. A kernelregresszió R^2 értéke közel 4 százalékkal nagyobb (0,369 szemben a 0,356-tal), az alfa értéke szignifikánsan nem különbözik, négy tizdesjegyre megegyeznek, azonban a béta értékét a lineáris regresszió jelentősen alulbecsli (1,15 *versus* 1,09). A 95 százalékos szignifikanciaszinten nem tudjuk elvetni a Lowe's karakterisztikus egyenesének linearitását, amely eredményt a kernelregresszió 95 százalékos konfidenciasávja is alátámaszt.[8] Ezzel szemben az ábra *B)* részén, a National Oilwell Varco Inc. linearitását elvetjük.

4. ábra

Karakterisztikus egyenesek becslése*

A) Lowe's Companies Inc. *B)* National Oilwell Varco Inc.



*Az ábrán kétféleképpen becsültük meg a két vállalat karakterisztikus egyenesét: *1.* kernelregresszióval, nemparametrikus CAPM-ként, azaz becsültük az $r_j - r_f = \hat{m}_h\left(r_m - r_f\right) + \hat{\eta}_j$ modellt, ahol $r_j - r_f$ az adott részvény kockázati prémiuma, $r_M - r_f$ a piaci kockázati prémium. Az alkalmazott módszer leírását lásd az *1. ábra* jegyzetében; *2.* lineáris regresszióval (szaggatott vonal) $r_j - r_f = \hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_j\left(r_m - r_f\right) + \hat{\varepsilon}_j$ formában. $\hat{\eta}_j$ és $\hat{\varepsilon}_j$ az egyes modellek reziduumai. A modellben a piaci hozam a piaci kapitalizációval súlyozott CRSP-index hozama, a kockázatmentes hozam pedig az amerikai egy hónapos diszkontkincstárjegyek napi hozama. Az ábrán pontozott vonallal ábrázoltuk a kernelregresszió 95 százalékos konfidenciasávját.

Az elemzés során mind a 150 darab véletlenszerűen választott részvényre elvégeztük a számításokat. Az eredményt az indexek alapján három csoportra osztottuk. Az R^2 alapján mindhárom csoportban jobban teljesített a kernelregresszió. A linearitáspróba szerint a nagy vállalatoknál (S&P 500) 95 százalékos szignifikanciaszinten az 50 részvényből kilencnél utasítható el a karakterisztikus egyenes linearitása. Ez majdnem eléri a 20 százalékos értéket, ami szignifikáns eredménynek mondható, így elvethetjük az S&P 500 index részvényeinek hozama és a piaci hozam közötti lineáris kapcsolatot

[8] A *T*-próba során a *wild bootstrap* eljárással 250-szer generáltunk új mintát.

(a karakterisztikus egyenes linearitását). A közép- (S&P MidCap 400) és kisvállalatoknál (S&P SmallCap 600) csupán 4 százalékban, két-két esetben vetettük el a nullhipotézist, azaz a linearitást 95 százalékos szignifikanciaszinten nem tudjuk elvetni. Megjegyezzük, hogy a kis- és középvállalatok karakterisztikus egyenesének linearitása 94 százalékos szignifikanciaszinten már elvethető. Összességében 150 részvényből 13 (8,7 százalék) esetén utasíthatjuk el a linearitást, azaz 95 százalékos szignifikanciaszint mellett elvethető az amerikai részvények karakterisztikus egyenesének linearitása; az eredményeket az *F1. táblázatban* foglaltuk össze.

A S&P 500-vállalatok 18 százalékában, míg a teljes minta 8,7 százalékában utasítjuk el a linearitást, ezekben az esetekben a lineáris regresszió paraméterbecslése torzított, ezért a kockázatot („bétát") és az abnormális hozamot („alfát") nemparametrikus módszerrel kell megbecsülni. A két különböző becslés az alfákban nem mutat szignifikáns különbséget, viszont a lineáris regresszió bétái átlagosan 11 százalékban térnek el a kernelregresszióétól, ami már szignifikáns különbségnek mondható.

A kis- és középvállalatok esetén elfogadjuk a linearitás nullhipotézisét, így használható lenne a lineáris regresszión alapuló becslés is. A nagyvállalatok esetében a becsült abnormális hozam a kernel- és a lineáris becslés alapján nem tér el szignifikánsan, sem azoknál a vállalatoknál, ahol a linearitás elutasítható (átlagosan 0,05 *versus* 0,05), sem azoknál, ahol nem vethető el (átlagosan 0,04 *versus* 0,04). A béta kernelbecslése azonban a nemlineáris karakterisztikus egyenesek esetében jelentősen eltér a lineáris becsléstől (átlagosan 1,31 *versus* 1,21), ahol a linearitást nem lehet elvetni, nincs ilyen szignifikáns eltérés (átlagosan 0,90 *versus* 0,92). A közepes méretű vállalatok esetén sincs jelentős különbség a tengelymetszetben, a linearitás elvetése esetén átlagosan 0,14 *versus* 0,13, ha nem tudjuk elvetni a nullhipotézist, akkor pedig megegyeznek (átlagosan 0,05). A béta-becslésnél itt is jelentősebb az eltérés, ha a linearitást elvetjük, akkor átlagosan 1,72 *versus* 1,39, ha nem vetjük el, akkor pedig átlagosan 0,93 *versus* 0,94. A kisvállalatok esetében az alfa, ha a karakterisztikus görbe linearitását nem tudjuk elvetni, akkor átlagosan megegyezik mindkét becslésnél (0,07), a béta pedig kernelbecslés esetén 1,00, míg lineáris becslés esetén 0,91. Ha a linearitást elvetjük, az alfák akkor is megegyeznek (0,08), míg a béták nem különböznek szignifikánsan (1,33 *versus* 1,34).

Összességében a paraméterbecslésekről elmondható, hogy az alfa kernelbecslése szignifikánsan nem különbözik a lineáristól, ellenben a lineáris regresszió átlagosan alulbecsüli a bétát azoknál a vállalatoknál, ahol a karakterisztikus görbe linearitása elvethető. A béta átlagos nagysága fordítottan arányos a vállalatmérettel, megerősítve a kisvállalathatást (lásd például *Banz* [1981], *Basu* [1983]). Azoknak a vállalatoknak a bétája, amelyek karakterisztikus egyenese nemlinearitást mutat, magasabb, ami igazolja azt a feltevésünket, hogy az extrém értékek okozhatják a linearitás sérülését, mivel az extrém megfigyelések növelik a kockázatot, másfelől a kiugró értékeket esetleg a piac nehezen tudja magyarázni, ezáltal a linearitás sérülhet.

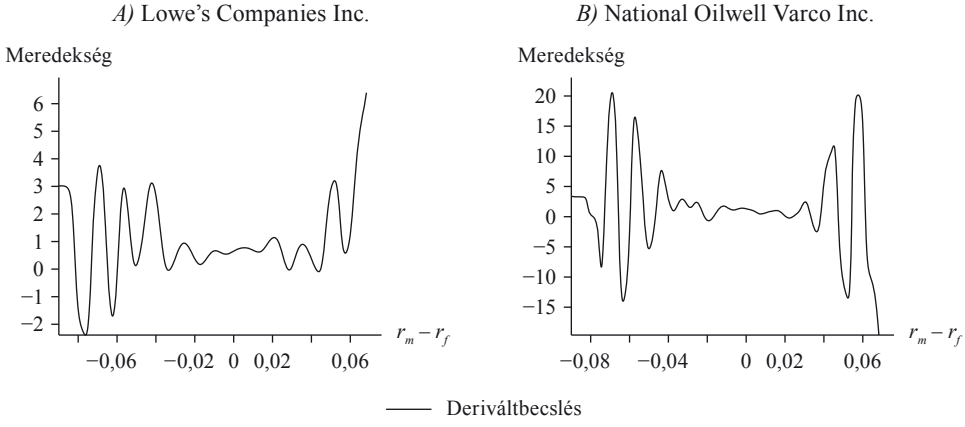
Meglepő eredmény, hogy ha a linearitást elvetjük, akkor a bétabecslésben nem a kisvállalatok esetében a legnagyobb az eltérés a két módszer között, hanem a középvállalatok esetében, igaz, az adatbázisunkban mindössze csak két középvállalat esetén tudjuk elvetni a nullhipotézist. Amennyiben a linearitás sérül, a nagyvállalatok esetében is jelentős a különbség a két becslés között, ami az előző eredménnyel együtt arra utal, hogy a linearitás nincs összefüggésben a vállalatmérettel.

Az *5. ábra A)* részén a Lowe's Companies Inc. karakterisztikus „egyenesének" meredekségét ábrázoltuk a piaci kockázati prémium függvényében. Az ábrán jól látszik, hogy a becsült releváns kockázat nem állandó, a széleken igen változékonyan viselkedik, ráadásul a pozitív oldalon egyértelműen növekvő kockázatot becsül. Az ábra *B)* részén a National Oilwell Varco Inc. derivált becslése látható. A kockázat itt is hasonlóan viselkedik, normál

piaci körülmények között nagyjából lineáris, azonban extrém körülmények között igen változékonyan viselkedik.

5. ábra

Szemiparametrikus deriváltbecslés* (WLS, Nadaraya–Watson-súlyok)



*Az *A)* és a *B)* részben véletlenszerűen választott részvények karakterisztikus egyeneseit kernel-regresszióval becsültük. A modell nemparametrikus CAPM, $r_{\text{LOW}} - r_f = \hat{m}_h\left(r_m - r_f\right) + \hat{\eta}_j$ formában adható meg, ahol $r_j - r_f$ az adott részvény kockázati prémiuma, $r_M - r_f$ a piaci kockázati prémium, $\hat{\eta}_j$ pedig a regresszió reziduuma. Az alkalmazott módszer leírását lásd az *1. ábra* jegyzetében. Az ábrán a becsült regresszió meredekségét ábrázoltuk a piaci kockázati prémium függvényében.

A nem konstans becslésnek több oka is lehet, egyrészt elképzelhető, hogy a széleken sérül a linearitás, emiatt a derivált nem konstans, másrészt az eloszlás szélein a megfigyelések száma lecsökken, ami miatt a becslés zajos lehet. Az eloszlás közepén a „béta" nagyjából konstansnak tekinthető, összhangban a CAPM-mel.

A *6. ábra A)* részén látható a Lowe's teljesítménybecslése minden *x* pontban. Normális piaci körülmények között az alfa viszonylag stabil, és közel van a nullához, a piac extrém pozitív és negatív elmozdulásaira azonban már eltérően reagál az értékpapír. A becslés alapján azt állíthatjuk, hogy a negatív oldalon a részvényárfolyam hajlamos lehet a piachoz képest túlreagálni a negatív elmozdulásokat. A pozitív oldalon ezzel szemben szignifikáns pozitív teljesítményt mértünk, minél nagyobb az extrém piaci elmozdulás, annál nagyobb az abnormális hozam. Meg kell azonban jegyezni, hogy a széleken a regresszió sokkal pontatlanabbul becsül, hiszen az extrém piaci mozgások valószínűsége viszonylag kicsi, a normál szintektől távolodva a megfigyelések előfordulási valószínűsége folyamatosan csökken.

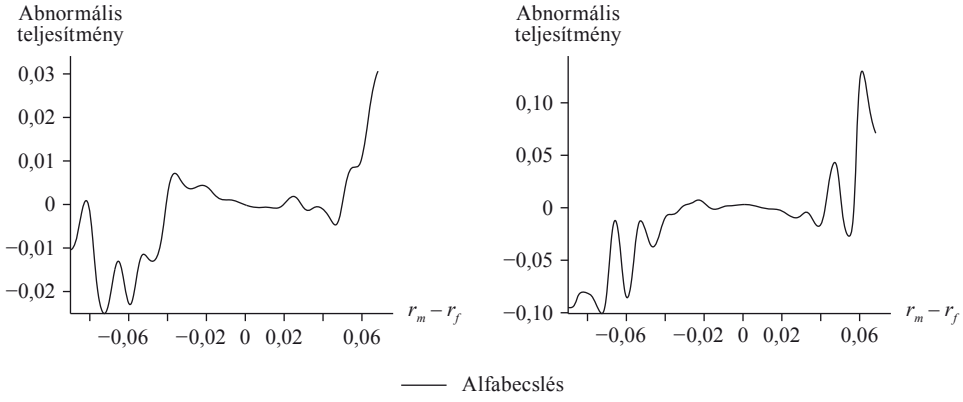
Az ábra *B)* részén a National Oilwell Varco Inc. teljesítménybecslését ábrázoltuk. Itt is hasonló eredményre jutottunk, normál piaci körülmények között az alfa viszonylag stabil, és szignifikánsan nem különbözik nullától, míg extrém helyzetekben a negatív oldalon szignifikáns negatív, de a pozitív oldalon szignifikáns pozitív az abnormális hozam értéke. Ennek az eredménynek fontos üzenete van a portfóliókezelők számára, a piacot csak extrém körülmények között lehet megverni.

Az értékpapír-piaci egyenesek felrajzolásához *az F1. táblázatban* szereplő szemiparametrikus bétákat mint magyarázó változókat, illetve a napi átlagos hozamokat mint függő változókat használtuk, a *2. táblázatban* az értékpapír-piaci egyenesek paraméterei olvashatók csoportok szerint felosztva.

6. ábra

Szemiparametrikus teljesítménybecslés* (WLS, Nadaraya–Watson-súlyok)

A) Lowe's Companies Inc. *B)* National Oilwell Varco Inc.



*A karakterisztikus egyeneseket kernelregresszióval becsültük. A nemparametrikus CAPM-modell $r_j - r_f = \hat{m}_h\left(r_m - r_f\right) + \hat{\eta}_j$ formában adható meg, ahol $r_j - r_f$ az adott részvény kockázati prémiuma, $r_m - r_f$ a piaci kockázati prémium, $\hat{\eta}_j$ pedig a regresszió reziduuma. Az alkalmazott módszer leírását lásd az *1. ábra* jegyzetében. Az ábrán a becsült regresszió szemiparametrikus alfáját – az abnormális teljesítményt – ábrázoltuk a piaci kockázati prémium függvényében.

2. táblázat

Értékpapír-piaci egyenesek paraméterei*

	S&P 500	S&P MidCap 400	S&P SmallCap 600	Összes vállalat
$E(r)$ (a realizált átlagos hozam)	0,04798	0,06083	0,06749	0,05877
p-érték	0,144	0,728	0,760	0,688
h (sávszélesség)	20,504	15,896	18,728	14,751
R^2_{KR}	0,1169	0,1311	0,0885	0,0424
$\hat{\alpha}'_{KR}$	0,0401	0,0217	0,1022	0,0504
$\hat{\beta}'_{KR}$	0,0081	0,0407	–0,0344	0,0085
R^2_{LR}	0,0516	0,1043	0,0263	0,0100
$\hat{\alpha}'_{LR}$	0,0192	0,0141	0,0957	0,0439
$\hat{\beta}'_{LR}$	0,0296	0,0486	–0,0280	0,0152
Megfigyelések száma	50	50	50	150

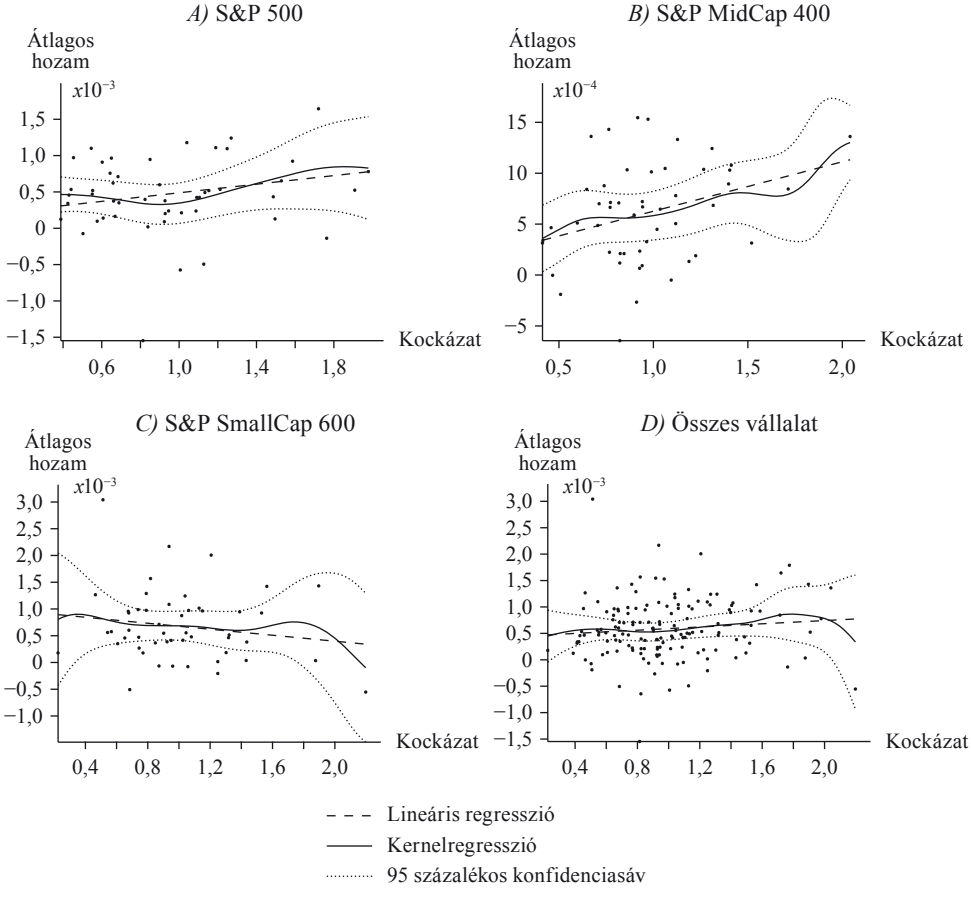
*Kétféle regresszióval számoltunk: *1.* kernelregresszióval, amit az $\overline{r_j} = \hat{m}_h\left(\hat{\beta}^*_j\right) + \hat{\lambda}_j$ formában becsültünk, ahol $\overline{r_j}$, a j-edik vállalat átlagos hozama, $\hat{\beta}^*_j$ a j-edik vállalat karakterisztikus egyenesének szemiparametrikus módszerekkel becsült meredeksége, $\hat{\lambda}_j$ a reziduum. Az alkalmazott módszer leírását lásd az *1. ábra* jegyzetében; *2.* lineáris regresszióval, amit pedig az $\overline{r_j} = \hat{\alpha}'_j + \hat{\beta}'_j\hat{\beta}^*_j + \hat{\kappa}_j$ formában becsültünk, ahol $\hat{\kappa}_j$ a maradéktag.

Megfigyelhető, hogy a középvállalatok értékpapír-piaci egyenesének meredeksége a legnagyobb (0,0407), majd ezt követik a nagyvállalati részvények (0,0081). A S&P SmallCap 600 index esetében ez az érték negatív (–0,0344), azaz a nagyobb kockázat kisebb

várható hozamot produkál. Ez az eredmény összefüggésben lehet a kisvállalati hatással, azaz a kisvállalatok várható hozama magasabb (lásd például *Banz* [1981], *Basu* [1983], *Fama–French* [1995], [1996]). A 150 részvényre számított értékpapír-piaci egyenes meredeksége 0,0085. Az egyes indexekhez, valamint az összes vállalatra számított értékpapír-piaci egyeneseket lásd a *7. ábrán.* A linearitáspróbák alapján úgy tűnik, hogy a szemiparametrikus béta (kockázat) és a hozam között lineáris kapcsolat van.

7. ábra

Értékpapír-piaci egyenesek



*Lásd a *2. táblázat* jegyzetét.

*

Eredményeink szerint a hozam és a kockázat közti linearitás nem minden esetben áll fenn, így a lineáris modellek általánosan nem alkalmazhatók a karakterisztikus és értékpapír-piaci „egyenesek” meghatározására. Az általunk összeállított nemparametrikus, illetve szemiparametrikus eljárás paraméterei megbízhatóbb becslést tesznek lehetővé mind a várható hozamok, mind a releváns, piaci kockázati mérőszám tekintetében. A kutatás folytatásaként érdemes lenne áttekinteni, hogy vajon a többfaktoros modellek – *Fama–French* [1996] háromfaktor-modellje, a *Carhart* [1997] négyfaktor-modellje – egyes paraméterbecslései esetén milyen mértékben helytálló a linearitás feltételezése.

Hivatkozások

Banz, R. W. [1981]: The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks. Journal of Financial Economics, 9. 3–18. o.

Basu, S. [1983]: The Relationship Between Earnings Yield, Market Value and Return for NYSE Common Stocks: Further Evidence. Journal of Financial Economics, 12. 129–156. o.

Blundell, R.–Duncan, A. [1991]: Kernel Regression in Empirical Microeconomics. Journal of Human Resources, 33. 62–87. o.

Carhart, M. M. [1997]: On Persistence in Mutual Fund Performance. Journal of Finance, 52. 57–82. o.

Elton, E. J.–Gruber, M. J.–Blake, C. R. [1996]: Survivorship Bias and Mutual Fund Performance. The Review of Financial Studies, 9. 1097–1120. o.

Fama, E. F. –French, K. R. [1995]: Size and Book-to-Market Factors in Earnings and Returns. The Journal of Finance, 50. 131–155. o.

Fama, E. F.–French, K. R. [1996]: Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies. The Journal of Finance, 51. 55–84. o.

Härdle, W.–Mammen, E. [1993]: Comparing Nonparametric Versus Parametric Regression Fits. The Annals of Statistics, 21. 1926–1947. o.

Härdle, W.–Müller, M.–Sperlich, S.–Werwatz, A. [2004]: Nonparametric and Semiparametric Models. Springer Series in Statistics, 1–4. fejezet.

Jensen, M. [1968]: The Performance of Mutual Funds in the Period 1945–1964. The Journal of Finance, 23. 389–416. o.

Lagarias, J. C. –Reeds, J. A. –Wright–M. H. –Wright, P. E. [1998]: Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. SIAM Journal on Optimization, 9. 112–147. o.

Lintner, J. [1965]: The Valuation of Risk Assets and The Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. The Review of Economics and Statistics, 47. 13–37. o.

Mossin, J. [1966]: Equilibrium in a Capital Asset Market. Econometrica, 4. 468–483. o.

Nadaraya, E. A. [1964]: On Estimating Regression. Theory of Probability and Its Applications, 9. 141–142. o.

Ross S. A. [1976]: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. Journal of Economic Theory, 13. 341–360. o.

Sharpe, W. F. [1964]: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. The Journal of Finance, 19. 425–442. o.

Silverman, B. W. [1986]: Density Estimation for Statistics and Data Analysis. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall, London.

Stapleton, R. C.–Subrahmanyam, M. G. [1983]: The Market Model and Capital Asset Pricing Theory: A Note. The Journal of Finance, 38. 1637–1642. o.

Watson, G. S. [1964]: Smooth Regression Analysis. Sankhya Series, 26. 359–372. o.

Wu, C. F. J. [1986]: Jackknife, Bootstrap and Other Resampling Methods in Regression Analysis. Annals of Statistics, 14. 1261–1295. o.

Függelék

Az *F1. táblázat A), B)* és *C)* részében véletlenszerűen választott 50 nagy-, 50 közép- és 50 kisvállalat kockázati prémiumára illesztett regressziók futási eredményei láthatók. Kétféle regresszióval számoltunk:

1. kernelregresszióval, azaz nemparametrikus CAPM-modellel, amit az $r_j - r_f = \hat{m}_h\left(r_m - r_f\right) + \hat{\eta}_j$ formában becsültünk, ahol $r_j - r_f$ a *j*-edik vállalat kockázati prémiuma, $r_M - r_f$ a piaci kockázati prémium, *h* a kernelregresszió keresztvalidációs büntetőfüggvénnyel optimálisan választott sávszélessége;

2. lineáris regresszióval, amit pedig az $r_j - r_f = \hat{\alpha}_j + \hat{\beta}_j\left(r_m - r_f\right) + \hat{\varepsilon}_j$ formában becsültünk. $E(r)$ az adott vállalat becslés időszakában realizált átlagos hozama.

F1. táblázat

A nemparametrikus és a lineáris karakterisztikus görbék futási eredményei

A) S&P 500

Azonosító	Megfigyelések száma	$E(r)$	p-érték	h	R^2_{KR}	$\hat{\alpha}_{KR}$	$\hat{\beta}_{KR}$	R^2_{LR}	$\hat{\alpha}_{LR}$	$\hat{\beta}_{LR}$
ACAS	2515	0,01	0,26	0,39	0,34	0,00	0,92	0,29	0,00	1,09
AES	2515	0,05	0,52	0,58	0,15	0,04	1,13	0,14	0,04	1,17
APH	2515	0,11	0,50	0,42	0,34	0,10	1,19	0,33	0,10	1,18
BA	2515	0,04	0,25	0,43	0,29	0,03	0,82	0,27	0,03	0,83
BAX	2515	0,05	0,01*	0,49	0,15	0,04	0,55	0,13	0,04	0,52
BJS	2515	0,09	0,28	0,84	0,19	0,09	0,85	0,17	0,09	0,98
BMC	2515	0,04	0,02**	0,40	0,25	0,04	1,49	0,24	0,04	1,30
BRL	2509	0,10	0,31	0,44	0,10	0,09	0,65	0,09	0,09	0,63
CPWR	2515	0,01	0,05**	0,40	0,23	0,01	1,50	0,22	0,01	1,41
D	2515	0,05	0,56	0,70	0,19	0,04	0,43	0,19	0,04	0,49
DD	2515	0,00	0,36	0,41	0,36	–0,01	0,84	0,35	–0,01	0,86
DHI	2515	0,07	0,42	0,36	0,30	0,06	1,53	0,29	0,06	1,34
DOV	2515	0,02	0,36	0,38	0,44	0,01	1,01	0,44	0,01	0,97
FDX	2515	0,04	0,04**	0,39	0,31	0,03	0,93	0,30	0,03	0,87
FO	2515	0,04	0,14	0,39	0,28	0,03	0,66	0,26	0,03	0,66
GM	2515	–0,05	0,47	0,77	0,29	–0,06	1,13	0,28	–0,06	1,29
HCBK	2383	0,11	0,64	0,79	0,26	0,10	0,55	0,26	0,10	0,61
HCP	2515	0,08	0,06*	0,66	0,32	0,07	0,64	0,27	0,07	0,82
HPC	2483	0,02	0,27	0,37	0,23	0,02	0,95	0,20	0,02	0,93
HSP	1175	0,02	0,16	0,37	0,24	0,01	0,67	0,21	0,01	0,62
KFT	1898	0,01	0,26	0,49	0,22	0,00	0,39	0,20	0,00	0,49
LMT	2515	0,05	0,48	0,61	0,13	0,04	0,44	0,12	0,04	0,51
LOW	2515	0,05	0,20	0,41	0,37	0,04	1,15	0,36	0,04	1,09
LSI	2515	0,05	0,06*	0,39	0,33	0,05	1,91	0,31	0,05	1,76
LXK	2515	0,02	0,00***	0,41	0,18	0,02	1,09	0,17	0,02	0,94
MDT	2515	0,01	0,72	0,43	0,21	0,00	0,61	0,20	0,00	0,64
MI	2515	0,02	0,19	0,55	0,40	0,01	0,93	0,35	0,01	1,10
MTW	2515	0,05	0,60	0,60	0,32	0,05	1,21	0,31	0,05	1,25
MUR	2515	0,09	0,07*	0,71	0,23	0,08	0,60	0,20	0,08	0,77
MWW	2515	0,08	0,12	0,39	0,30	0,07	1,98	0,29	0,07	1,77
NOV	2515	0,12	0,04**	0,38	0,26	0,11	1,04	0,22	0,11	1,21
NUE	2515	0,11	0,30	0,39	0,36	0,10	1,25	0,34	0,10	1,27
ORCL	2515	0,09	0,02**	0,40	0,36	0,09	1,59	0,35	0,09	1,49
PAYX	2515	0,04	0,00***	0,39	0,32	0,03	1,11	0,30	0,03	1,01
PG	2515	0,03	0,21	0,56	0,15	0,02	0,43	0,13	0,02	0,44
QCOM	2515	0,16	0,24	0,39	0,31	0,16	1,72	0,30	0,16	1,51
S	2515	–0,06	0,06*	0,53	0,29	–0,07	1,01	0,25	–0,06	1,25
S	1565	0,06	0,60	0,28	0,17	0,04	0,90	0,16	0,04	0,90
SLE	2515	–0,01	0,14	0,55	0,21	–0,02	0,50	0,18	–0,02	0,56
SPG	2515	0,07	0,28	0,70	0,37	0,06	0,68	0,30	0,06	0,90
SRE	2515	0,05	0,31	0,51	0,24	0,04	0,55	0,21	0,04	0,62
SYMC	2515	0,12	0,02**	0,40	0,22	0,12	1,27	0,21	0,12	1,19
TDC	316	–0,15	0,32	0,63	0,46	–0,04	0,81	0,42	–0,04	0,85
TE	2515	0,01	0,25	0,54	0,19	0,00	0,58	0,16	0,00	0,61
TGT	2515	0,04	0,39	0,39	0,36	0,03	1,09	0,34	0,03	1,06
TLAB	2515	–0,01	0,00***	0,39	0,30	–0,02	1,76	0,28	–0,02	1,50
WFR	2515	0,18	0,45	0,36	0,17	0,17	1,77	0,16	0,17	1,75
WLP	1805	0,06	0,21	0,36	0,24	0,05	0,66	0,19	0,05	0,68
WLP	1486	0,10	0,72	0,65	0,06	0,08	0,45	0,05	0,08	0,42
ZMH	1860	0,03	0,22	0,38	0,22	0,03	0,69	0,20	0,03	0,65
Átlag	2362	0,05	–	0,48	0,26	0,04	0,97	0,24	0,04	0,98

B) S&P MidCap 400

Azonosító	Megfigyelések száma	$E(r)$	p-érték	h	R^2_{KR}	$\hat{\alpha}_{KR}$	$\hat{\beta}_{KR}$	R^2_{LR}	$\hat{\alpha}_{LR}$	$\hat{\beta}_{LR}$
AAI	2515	0,11	0,60	0,63	0,17	0,10	1,41	0,16	0,10	1,24
AMG	2484	0,07	0,34	0,57	0,45	0,06	1,32	0,43	0,06	1,38
ARG	2515	0,10	0,49	0,48	0,24	0,09	0,99	0,23	0,09	1,03
AVCT	2118	0,03	0,06*	0,53	0,26	0,04	1,52	0,25	0,04	1,44
BRO	2515	0,08	0,21	0,47	0,21	0,07	0,65	0,20	0,07	0,64
CLF	2515	0,13	0,06*	0,40	0,32	0,13	1,13	0,26	0,13	1,35
CMG	737	0,10	0,00***	0,38	0,29	0,14	1,40	0,24	0,13	1,00
CPT	2515	0,05	0,27	0,83	0,32	0,04	0,60	0,27	0,04	0,76
CR	2515	0,01	0,29	0,31	0,39	0,00	0,94	0,33	0,00	0,92
CWTR	2515	0,12	0,16	0,36	0,15	0,12	1,31	0,13	0,12	1,25
CXW	2515	0,05	0,51	0,62	0,07	0,04	0,71	0,06	0,04	0,69
DCI	2515	0,07	0,68	0,43	0,31	0,06	0,82	0,31	0,06	0,84
ELY	2515	0,04	0,41	0,46	0,22	0,04	1,02	0,21	0,04	0,98
ENR	2168	0,07	0,12	0,54	0,18	0,07	0,71	0,17	0,07	0,71
FMER	2515	0,03	0,38	0,33	0,40	0,02	0,96	0,35	0,02	1,01
FNFG	2363	0,09	0,30	0,53	0,24	0,08	0,74	0,22	0,08	0,77
FTO	2515	0,15	0,10*	0,37	0,22	0,15	0,92	0,18	0,15	1,09
HBI	581	–0,03	0,32	0,69	0,32	0,01	0,91	0,28	0,01	1,00
HE	2515	0,03	0,89	0,62	0,18	0,02	0,41	0,18	0,02	0,39
HMA	2515	–0,02	0,08*	0,82	0,11	–0,03	0,51	0,06	–0,03	0,61
HNI	2515	0,02	0,52	0,74	0,25	0,01	0,84	0,25	0,01	0,93
HRC	2515	0,00	0,35	0,45	0,14	–0,01	0,47	0,13	–0,01	0,50
HRL	2515	0,05	0,25	0,36	0,11	0,04	0,46	0,09	0,04	0,38
IDXX	2515	0,07	0,63	0,46	0,16	0,06	0,77	0,16	0,06	0,75
IEX	2515	0,06	0,68	0,40	0,35	0,05	0,90	0,34	0,05	0,90
IRF	2515	0,08	0,07*	0,35	0,31	0,08	1,71	0,29	0,08	1,51
JBHT	2515	0,10	0,32	0,43	0,23	0,10	1,06	0,22	0,10	1,01
JBLU	1673	0,02	0,67	0,52	0,21	0,00	1,22	0,21	0,00	1,14
KMT	2515	0,06	0,10	0,41	0,38	0,06	1,04	0,37	0,06	1,09
LRCX	2515	0,14	0,02**	0,38	0,35	0,13	2,04	0,32	0,13	1,77
MEG	2515	–0,06	0,26	1,05	0,16	–0,07	0,82	0,15	–0,07	1,07
MRX	2515	0,02	0,31	0,42	0,17	0,01	0,77	0,16	0,01	0,80
MTX	2515	0,02	0,58	0,44	0,32	0,01	0,82	0,32	0,01	0,84
MVL	2515	0,14	0,41	0,40	0,09	0,13	0,76	0,09	0,13	0,79
NHP	2515	0,07	0,14	0,54	0,31	0,06	0,77	0,29	0,06	0,83
OII	2515	0,10	0,15	0,53	0,18	0,09	0,86	0,16	0,10	0,94
ORLY	2515	0,07	0,08*	0,38	0,22	0,06	0,94	0,20	0,06	0,89
OSK	2515	0,07	0,65	0,49	0,20	0,06	0,94	0,18	0,06	0,94
PSD	2515	0,03	0,43	0,63	0,13	0,02	0,41	0,13	0,02	0,38
RS	2515	0,08	0,08*	0,44	0,37	0,07	1,12	0,34	0,07	1,29
RYL	2515	0,09	0,53	0,45	0,29	0,08	1,40	0,28	0,08	1,27
SKS	2515	–0,01	0,32	0,39	0,22	–0,01	1,09	0,19	–0,01	1,05
SRCL	2515	0,14	0,44	0,39	0,11	0,13	0,67	0,10	0,13	0,64
TECD	2515	0,01	0,27	0,40	0,22	0,01	1,19	0,20	0,01	1,02
THG	2515	0,02	0,40	0,37	0,23	0,02	0,93	0,22	0,02	0,93
UTHR	2347	0,15	0,26	0,34	0,09	0,16	0,97	0,08	0,16	0,83
UTR	2515	0,01	0,28	0,50	0,36	0,00	0,82	0,32	0,00	0,92
VARI	2406	0,10	0,32	0,33	0,25	0,11	1,27	0,23	0,11	1,16
WBS	2515	0,01	0,14	0,44	0,39	0,00	0,93	0,37	0,00	1,00
WOR	2515	0,05	0,18	0,41	0,32	0,04	1,12	0,30	0,04	1,15
Átlag	2400	0,06	–	0,48	0,24	0,06	0,96	0,22	0,06	0,96

C) S&P SmallCap 600

Azonosító	Megfigyelések száma	$E(r)$	p-érték	h	R^2_{KR}	$\hat{\alpha}_{KR}$	$\hat{\beta}_{KR}$	R^2_{LR}	$\hat{\alpha}_{LR}$	$\hat{\beta}_{LR}$
ABM	2454	0,06	0,38	0,40	0,25	0,03	0,85	0,23	0,03	0,80
ACLS	2077	0,02	0,63	0,54	0,27	–0,03	2,20	0,26	–0,04	1,84
CASY	2426	0,04	0,06*	0,44	0,23	0,06	1,05	0,21	0,06	0,86
CCRN	1766	0,04	0,28	0,41	0,19	0,00	1,25	0,18	0,00	0,97
DNEX	2473	0,06	0,39	0,50	0,20	0,04	0,95	0,20	0,04	0,86
EE	2373	0,03	0,42	0,54	0,21	0,05	0,74	0,21	0,05	0,66
GFF	2396	–0,01	0,38	0,51	0,20	0,03	0,92	0,20	0,03	0,90
GTIV	2142	–0,01	0,31	0,40	0,15	0,16	0,82	0,13	0,16	0,70
HMSY	2313	0,05	0,37	0,90	0,03	0,13	0,46	0,03	0,13	0,51
HOMB	627	0,09	0,36	0,75	0,30	0,13	1,06	0,28	0,13	0,81
HTLD	2440	0,09	0,11	0,40	0,21	0,08	1,02	0,20	0,09	0,85
INT	2412	0,04	0,30	0,77	0,23	0,13	0,79	0,19	0,12	1,02
ISYS	2405	0,06	0,96	0,56	0,11	0,07	0,87	0,11	0,07	0,86
KNOT	1292	0,05	0,84	0,91	0,04	–0,03	0,68	0,04	–0,03	0,85
MANT	1716	0,02	0,24	0,48	0,11	0,11	0,94	0,10	0,11	0,71
MFB	850	0,13	0,65	0,57	0,31	–0,01	1,25	0,30	–0,01	1,19
MNT	2461	0,09	0,28	3,31	0,01	0,09	0,68	0,04	0,09	0,48
MNT	398	–0,01	0,30	1,01	0,01	0,02	0,23	0,01	0,02	0,19
MOH	1366	0,05	0,22	0,90	0,10	0,03	0,61	0,10	0,03	0,70
MTH	2417	0,10	0,27	0,70	0,25	0,14	1,56	0,21	0,14	1,48
NILE	1152	0,14	0,25	0,57	0,16	0,05	1,32	0,14	0,05	0,99
NOVN	2440	0,12	0,52	0,50	0,09	0,12	1,04	0,08	0,12	0,94
NPK	2431	0,07	0,24	0,67	0,28	0,06	0,57	0,26	0,06	0,65
NSIT	2478	0,05	0,65	0,43	0,19	0,03	1,44	0,18	0,03	1,31
NTRI	1327	0,13	0,25	0,56	0,05	0,05	1,03	0,04	0,05	0,78
NWK	2404	0,10	0,35	0,54	0,11	0,04	1,32	0,11	0,04	1,09
ONB	2387	0,10	0,64	0,67	0,26	0,02	0,77	0,25	0,02	0,75
PBY	2428	0,00	0,31	0,35	0,21	0,01	1,30	0,19	0,01	1,16
PEI	2397	0,04	0,03**	0,86	0,34	0,01	0,75	0,28	0,01	1,01
PENX	2396	0,06	0,35	0,64	0,08	0,04	0,65	0,08	0,04	0,72
PRFT	2228	0,05	0,62	0,65	0,04	0,22	0,94	0,03	0,22	1,01
PRGS	2461	0,09	0,52	0,40	0,20	0,04	1,08	0,20	0,04	0,99
PVTB	2255	0,14	0,67	0,54	0,12	0,10	0,74	0,11	0,10	0,65
RADS	2439	0,10	0,49	0,40	0,17	0,09	1,39	0,15	0,09	1,41
RBN	2424	0,22	0,08*	0,41	0,21	0,05	0,90	0,19	0,05	0,89
SAFM	2402	0,16	0,08*	0,35	0,11	0,10	0,79	0,09	0,10	0,67
SKT	2426	–0,06	0,14	0,56	0,29	0,09	0,68	0,26	0,09	0,72
SLXP	1997	0,10	0,28	0,58	0,09	0,09	1,15	0,08	0,09	0,90
SNS	2397	0,00	0,61	0,64	0,15	–0,01	0,96	0,15	–0,01	0,82
SNS	106	0,11	0,44	1,21	0,05	0,27	0,51	0,06	0,27	0,57
SSS	2434	0,04	0,36	0,55	0,34	0,06	0,68	0,31	0,06	0,78
SUP	2464	0,04	0,54	0,49	0,26	–0,01	0,87	0,25	–0,01	0,82
SYMM	2432	–0,05	0,32	0,47	0,17	0,08	1,53	0,16	0,08	1,33
TSFG	2446	0,05	0,13	0,38	0,31	–0,02	1,06	0,24	–0,02	1,20
TXRH	1046	0,00	0,14	0,32	0,30	0,00	1,43	0,20	0,00	0,87
UEIC	2426	–0,02	0,48	0,40	0,16	0,09	1,13	0,16	0,09	1,02
UNS	2381	0,10	0,19	0,52	0,21	0,05	0,54	0,20	0,05	0,61
VECO	2482	0,02	0,21	0,46	0,28	–0,01	1,88	0,24	–0,01	1,56
VSEA	2429	0,20	0,03**	0,32	0,30	0,14	1,90	0,27	0,14	1,67
ZEP	287	0,30	0,54	1,22	0,39	0,40	1,21	0,38	0,38	1,07
Átlag	2052	0,07	–	0,63	0,19	0,07	1,01	0,17	0,07	0,92

* 90 százalékos, ** 95 százalékos, *** 99 százalékos szignifikanciaszinten a nullhipotézis (a kernel-regresszió nem különbözik a lineáris regressziótól) elutasítása.