MAGYAR GEOFIZIKA
56. évf. (2015) 2. szám, 97–107

TANULMÁNY

Magnetotellurikus adatok sorfejtéses inverziója

Prácser E.[1,@], Dobróka M.[2,&]

[1] MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézet, 9400 Sopron, Csatkai E. u. 6–8.
[1] Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros
[@]E-mail: pracser.erno@csfk.mta.hu; [&]E-mail: dobroka@uni-miskolc.hu

A hagyományos két-, illetve háromdimenziós inverziók esetében a modellparaméterek a direktfeladat-megoldáshoz szükséges rács celláihoz rendelt fajlagos ellenállás értékek. Ezeknek a száma meglehetősen nagy, ami az inverziót számításigényessé és bizonyos esetekben instabillá is teszi. A geofizikai kutatások során gyakran előfordul olyan kétdimenziós geoelektromos modell, amely lényegében rétegezett, de a rétegek jellemzői (fajlagos ellenállás, vastagság) a szelvény mentén megváltoznak. Pontos előremodellezésként az ilyen modellekre is a numerikus modellezés jöhet szóba, amely a már említett rács alapján végezhető el. Ebben az esetben az inverzió ismeretlen paramétereinek a száma lényegesen nagyobb annál, mint amivel a változó rétegvastagságú rétegezett modell megadható. Ezért az ilyen modellekre az általános kétdimenziós inverzió helyett célszerű speciális inverziós eljárást alkalmazni. A módszer lényege, hogy az ilyen modelleknél az előremodellezés lényegesen kevesebb paraméterrel történhet, mint az általános kétdimenziós esetben. Az inverziót is érdemes egy ilyen, csökkentett paraméterszámú előremodellezésre alapozni. Ebben a cikkben erre mutatunk egy eljárást magnetotellurikus mérések esetére.

Prácser, E., Dobróka, M.: Series expansion inversion of magnetotelluric data

The model parameters of the traditional 2- and 3-dimensional inversions are the resistivities of the grid, which is used to the forward modeling. The fairly large number of these parameters requires large computer capacity and in some cases makes the inversion unstable. During the geophysical explorations often happens such a model, which is essentially one-dimensional but the features of the layers (resistivity, thickness) may vary along the profile. For the correct forward calculation for these models, the numerical modeling can be applied, which is based on the grid mentioned above. In this case, the number of unknowns is much higher than the number of parameters which defines the layered model with varying parameters. For this type of models, instead of the general two-dimensional inversion, it is worth to apply a special inversion algorithm. The essence of the method is that the forward modeling for these type of models requires significantly less parameters. It is worth to base the inversion for such a forward modeling with reduced number of parameters. In this paper, an algorithm will be presented for magnetotelluric measurements.

Beérkezett: 2015. július 31.; *elfogadva:* 2015. szeptember 18.

Bevezetés

A magnetotellurikus mérési adatok értelmezésére már régóta alkalmazzák a kétdimenziós inverziót (Jupp, Vozoff 1977). A linearizált inverziós számításoknál a leginkább számításigényes feladat a Jacobi-mátrix előállításához szükséges parciális deriváltak számítása. Az előremodellezés eredménye – azaz az elméleti mérési adatok – az azokat meghatározó parciális differenciálegyenlet numerikus megoldásával kapható meg. Ehhez a mérés alatti térrészben (amelyre a kutatás kiterjed) fel kell venni egy rácsot, és a rács elemeihez hozzárendelt fajlagos ellenállásértékek lesznek az inverzió ismeretlen paraméterei. Ez meglehetősen nagyszámú paramétert jelent. A rácspontok – és ezzel az ismeretlenek – száma 2D esetben 1000–10 000 nagyságrendű, 3D esetben még további két nagyságrenddel számolhatunk. A parciális differenciálegyenlet numerikus megoldásakor az elméleti mérési adatok egy lineáris egyenletrendszer megoldásából adódnak. Ennek az egyenletrendszernek a modellparaméterek szerinti deriválásával egy hatékony algoritmus kapható a parciális deriváltak számítására (Haber et al. 2000, Siripunvaraporn, Egbert 2000). Ez szükségtelenné teszi a parciális deriváltak differenciahányadossal való közelítését, ezért nincs szükség az előremodellezési feladat nagyszámú megoldására. Ezzel együtt a Jacobi-mátrix mérete (az adatok száma szorozva az ismeretlenek számával)

ISSN 0025-0120 © 2015 Magyar Geofizikusok Egyesülete

rendkívül nagy. Az így előálló inverz feladat erősen alulhatározott lesz (2D esetben tipikusan néhány száz adat, szemben néhányszor ezer vagy tízezer ismeretlennel). Alulhatározott inverz feladat megoldásához további (rendszerint önkényes, nem fizikai) segédfeltételek kitűzése szükséges. Erősen alulhatározott inverz feladatnál ezek száma jelentősen meghaladja a mérési adatok (fizikai feltételek) számát, következésképpen a megoldást egyre inkább a segédfeltételek határozzák meg. Ezen az úton rendszerint „simított, elkent" eredmény modellt kapunk.

Az általunk javasolt inverziós eljárás a rétegparaméterek sorfejtéses előállításán alapul. E sorfejtéses inverzió megvalósításakor jelenleg viszont csak a differenciálhányadosok numerikus előállítása jöhet szóba. Látni fogjuk, hogy a földtani modell elegendően pontos leírásához szükséges a sorfejtési együtthatók (az inverz feladat ismeretlenjei) száma jóval kisebb is lehet, mint a mérési adatok száma. Ebben a közelítésben tehát az inverz feladat túlhatározott lehet, nincs szükség önkényes kiegészítő feltételek bevezetésére. Továbbá, mivel a paraméterek száma nagyságrendekkel kisebb, mint a hagyományos (alulhatározott) kétdimenziós inverziók esetében, a sorfejtéses inverziós eljárás számítási igénye a numerikus differenciálhányados számítás ellenére sem növekszik meg túlságosan.

A sorfejtéses inverziós módszer

Azt feltételezzük, hogy a modell lényegében rétegezett, de a rétegek vastagságai, illetve fajlagos ellenállásai a szelvény mentén változhatnak. A modellparamétereket a Legendre-polinomok szerinti sorfejtés alakjában keressük. A Legendre-polinomok a [–1, 1] intervallumon vannak értelmezve, de tetszőleges [$y_{\min}$, $y_{\max}$] intervallum transzformálható erre az intervallumra. Például az i-edik réteg vastagságát a szelvény mentén az y koordinátájú pontban a

$$d_i(y) = \sum_{j=0}^{n} d_{i,j} P_j(\overline{y}) \tag{1}$$

képlet adja, ahol $\overline{y}$ az y pont megfelelője a [–1, 1] intervallumon, P_j a j-edik Legendre-polinom, n a figyelembe vett polinomok száma. Hasonló képlet érvényes a fajlagos ellenállásokra is:

$$\rho_i(y) = \sum_{j=0}^{n} \rho_{i,j} P_j(\overline{y}). \tag{2}$$

$d_{i,k} = 0$, ha $k > 0$ azt jelenti, hogy az i-edik réteg vastagsága állandó a szelvény mentén ($d_i(y) = d_{i,0}$). Hasonló állítás érvényes a $\rho_{i,j}$ paraméterekre is. A $\rho_{i,j}$ és $d_{i,j}$ paraméterek meghatároznak egy egyszerű, kétdimenziós szerkezetet. Ha az inverz feladat megoldására az általánosan elterjedt kétdimenziós inverziók közül alkalmaznánk egyet, akkor az ismeretlen modellparaméterek száma lényegesen meghaladná a $\rho_{i,j}$ és $d_{i,j}$ paraméterek számát. Ezért egy olyan inverziós eljárást valósítottunk meg, amely ezeket a paramétereket tekinti ismeretlen modellparamétereknek. Az előremodellezést úgy oldottuk meg, hogy a $\rho_{i,j}$ és $d_{i,j}$ paraméterek által meghatározott szerkezetet rávetítettük egy kétdimenziós rácsra, azaz annak minden egyes cellájához azt a ρ értéket rendeltük, amelyet annak koordinátái alapján az (1), (2) képletekkel meghatározott szerkezetleírás adott.

Az ilyen típusú modell-leíráson alapuló inverzióra létezik egy egyszerű megoldás is, amikor a szondázási görbéket egydimenziós előremodellezéssel számítjuk. Azt feltételezzük, hogy egy adott y koordinátájú pont alatt a modell rétegezett és a rétegparaméterek az ismertetett szerkezetleírásnak az y koordinátához tartozó rétegparamétei. A lokálisan 1D előremodellezésen alapuló inverziót alkalmazták már egyenáramú, szeizmikus és magnetotellurikus mérések inverziójára is (Gyulai, Ormos 1999, Dobróka et al. 1991, Dobróka et al. 2013).

A kétdimenziós magnetotellurikus előremodellezést Siripunvaraporn és Egbert inverziós programjából vettük át (Siripunvaraporn, Egbert 2000), amely a véges különbségek módszerével számítja az elektromágneses teret. Az algoritmussal E polarizációs látszólagos fajlagosellenállás- és fázisadatokat számítottunk. A most ismertetésre kerülő inverzió iterációs elven működő linearizált inverzió, és a Jacobi-matrix szinguláris értékek szerinti felbontásán (SVD) alapul.

A geofizikai inverzió részletes elemzésével számos könyv és publikáció foglalkozik (Tarantola 1984, Parker 1994), ezért most csak az SVD-n alapuló linearizált inverzió legfontosabb képleteit közöljük. A linearizált inverzió azon alapul, hogy a modellparaméterek kismértékű megváltozása és a számított adatok megváltozása között lineáris kapcsolat van:

$$\Delta\mathbf{d} = \mathcal{J}\Delta\mathbf{m},$$

ahol $\mathbf{m}$ a modellparamétereket tartalmazó n-dimenziós vektor, $\mathbf{d}$ az adatokat tartalmazó m-dimenziós vektor, a $\mathcal{J}$ az előremodellezés Jacobi-mátrixa, amely a mérési adatok modellparaméterek szerinti parciális deriváltjait tartalmazza. Esetünkben feltételezhetjük, hogy a mérési adatok száma meghaladja az ismeretlen modellparaméterek számát, azaz $n > m$. A Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontása (Jackson 1972),

$$\mathcal{J} = \mathcal{U}\Lambda\mathcal{V}^{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

$\mathcal{U}$ az adattérbeli sajátvektorokat tartalmazó mátrix, $\mathcal{V}$ a paramétertérbeli sajátvektorokat tartalmazó mátrix, Λ a sajátértékek átlós mátrixa, T jelenti a mátrix transzponáltját. (3)-ból kiindulva és kihasználva a sajátvektorok ortogonalitását megkapjuk a paraméterek megváltozását a $\Delta\mathbf{d}$ függvényében:

$$\Delta\mathbf{m} = \mathcal{V}\Lambda^{-1}\mathcal{U}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{d}. \tag{4}$$

Az $m \times m$ méretű Λ átlós mátrix invertálható, ha nincs 0 értékű sajátérték. Ha vannak 0 értékű sajátértékek, akkor az azokhoz tartozó oszlopvektorokat elhagyjuk az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ mátrixokból, és a Λ mátrix méretét is ennek megfelelően csökkentjük. A linearizált inverzió egy iterációs lépése során tehát a (4) képletet alkalmazzuk. A $\Delta\mathbf{d}$ vektor tartalmazza a mérési adatok és az aktuális közelítő modellhez tartozó elméleti adatok különbségét. A $\Delta\mathbf{m}$ megadja a modellparamé-

terek változását annak érdekében, hogy az új modellhez tartozó elméleti adatok közelebb legyenek a mérési adatokhoz. A (4) képlet alkalmazásakor gondot okozhat ha a Λ mátrix átlójában kis értékű sajátértékek vannak, mivel ezek reciproka túl nagy paraméterváltozást okoz, ami instabillá teszi az inverziót. Ezért egy α csillapító tényezővel módosítjuk a képletet és a Λ^{-1} mátrix átlójában

$$1/\lambda_j \quad \text{helyett} \quad 1/(\lambda_j^2 + \alpha)\text{-val számolunk.}$$

A legnagyobb és a legkisebb sajátértékek hányadosa egy jó jellemzője az inverzió stabilitásának. Egydimenziós inverziós tapasztalataink azt mutatják, hogy ha ez az arány 10 000 alatt van akkor zajmentes adatok esetén valamennyi modellparaméter nagy pontossággal meghatározható. A Jacobi-mátrix alapján a paraméterek kovariancamátrixa, korrelációs mátrixa és a szórása is könnyen számítható az adatok kovariancamátrixából. Most azt feltételezzük, hogy valamennyi adatnak a szórása σ, és az egyes adtokat terhelő hibák függetlenek. Ekkor a kovariancia mátrix

$$\mathrm{cov}(\Delta\mathbf{m}) = \sigma^2(\mathcal{J}^{\mathrm{T}}\mathcal{J})^{-1}.$$

Ennek a mátrixnak az átlója tartalmazza az egyes modellparaméterek szórásnégyzeteit. Ha nincs szükség a teljes kovarianciamátrixra, akkor a modellparaméterek szórásnégyzete a

$$\mathrm{var}(m_k) = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{v_{k,i}}{\lambda_i}\right)^2 \tag{5}$$

képlettel is számítható. m_k jelöli az $\mathbf{m}$ paramétervektor k-adik elemét (valamelyik réteg vastagságát, vagy fajlagos ellenállását), p a nem 0 sajátértékek száma, $v_{k,i}$ a $\mathcal{V}$ mátrix egy eleme. Az inverzió során kapott modellparamétereket a hozzájuk rendelt szórás értékekkel együtt érdemes elemezni.

Érdemes még szót ejteni a linearizált inverzió alkalmazásáról a sorfejtéses inverzió esetében. A linearizált inverzió alapja – amint arról már szó volt – az, hogy a paraméterek kismértékű megváltozása a modellszámítás eredményében csak kismértékű változást okoz. Itt az inverziós modell paraméterei csak közvetett módon köthetők valós fizikai paraméterekhez. A fizikai paramétereket egy polinom adja, és ezeknek az együtthatói az inverzió ismeretlen paraméterei. Ezért az együtthatók kismértékű megváltozása is okozhat nagyobb eltéréseket a fizikai paraméterekben és ezen keresztül az előremodellezés eredményében. Figyelembe kell venni, hogy az előremodellezés egy véges különbségek alapján működő numerikus differenciálegyenlet-megoldás és nem egy analitikus képlet, továbbá a sorfejtési együtthatók szerinti deriváltat a differenciahányadossal közelítjük. Ez újabb pontatlanságot okoz, és megnehezítheti a linearizált inverzió alkalmazását. Ez csak annyit jelent, hogy a kezdeti modell megválasztására ez a módszer érzekenyebb, mint a kis rétegszámú egydimenziós inverzió.

Az inverzió minőségének az egyik jellemzője az RMS, amely szám kifejezi a mérési adatok és a modellhez tartozó elméleti adatok különbségét:

$$\mathrm{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d_j^{(\mathrm{o})} - d_j^{(\mathrm{c})}}{d_j^{(\mathrm{o})}}\right)^2},$$

ahol n az adatok száma, $d_j^{(\mathrm{o})}$ a j-edik mért adat, $d_j^{(\mathrm{c})}$ a j-edik számított adat.

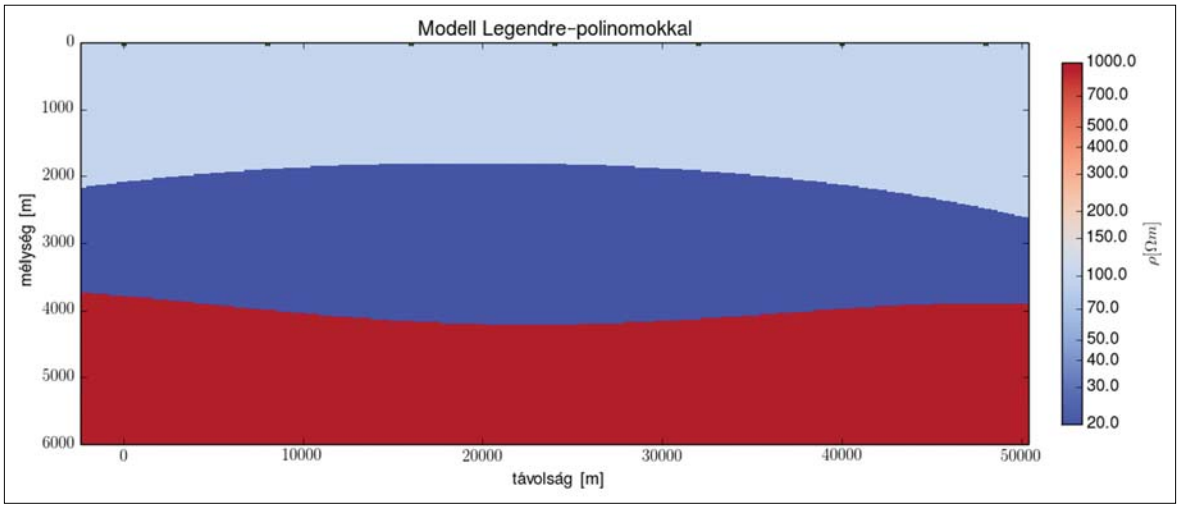
Néhány, szintetikus adatokon alapuló inverziós példán szemléltetjük a most bemutatott inverzió főbb jellemzőit. Két modellre végzünk inverziós vizsgálatokat. A két modell hasonló, csak a második modell esetén a szelvény hossza rövidebb, de a modellparaméterek ugyanazokkal a Legendre-polinomokkal írhatók le, mint az első modell esetén. Első lépésként zajmentes adatok alapján invertálunk, de megjegyzendő, hogy az előremodellezés numerikus megvalósítása eleve okozhat egy kis zajt. Össze fogunk hasonlítani algoritmusokat és modelleket, és ezeket az összehasonlításokat célszerű zajtól függetlenül megtenni. Bemutatjuk az SVD-n alapuló linearizált inverzió esetében számítható (5) szórásértékeket, valamint a sajátértékeket. A harmadik példánál az inverziót a második példa zajjal terhelt adataival végeztük el.

Első inverziós példa

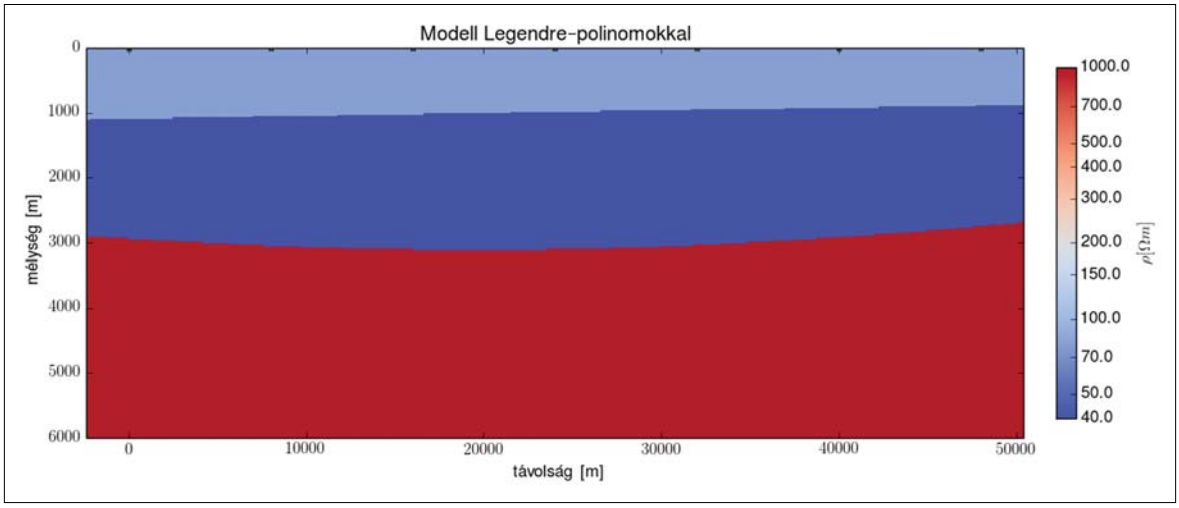
Teszteljük az inverziós eljárást szintetikus adatokon! Az adatok számítására az *1. ábrán* látható modellt használtuk, a modell paramétereit az *1. táblázat* tartalmazza. A táblázat első sorában a sorszám a Legendre-polinom együtthatóinak a sorszámára utal. A modell háromréteges, a második réteg fajlagos ellenállása kisebb, mint az első, illetve a harmadik rétegé. Valamennyi modellparamétert, azaz a rétegek fajlagos ellenállásait és vastagságait, a Legendre-polinomok szerinti sor első három tagja határozza meg. Az inverziós program a paraméterek logaritmusával számol, ezzel kerülhetjük el, hogy rétegvastagságként, illetve ellenállásértékként negatív számokat kapjunk. Bár nem lenne feltétlenül szükséges, a program egyszerűsége érdekében a 0-nál nagyobb indexű együtthatókra is a logaritmussal számolunk. A táblázatban az 1 érték tehát azt jelenti, hogy a megfelelő soregyütthető 0. A szintetikus adatok generálására szolgáló modell esetében a rétegek fajlagos ellenállásai nem változnak a szelvény mentén. Az inverziós algoritmus viszont számol a fajlagos ellenállások szelvény menti lehetséges változásaival is. Szükség esetén az együtthatókat rögzíteni lehet.

1. táblázat | Modellparaméterek az 1. példához

Sorszám	0	1	2
ρ_1 [Ωm]	100,0	1,0	1,0
ρ_2 [Ωm]	20,0	1,0	1,0
ρ_3 [Ωm]	1000,0	1,0	1,0
d_1 [m]	2000,0	1,1	1,2
d_2 [m]	2000,0	0,9	0,7

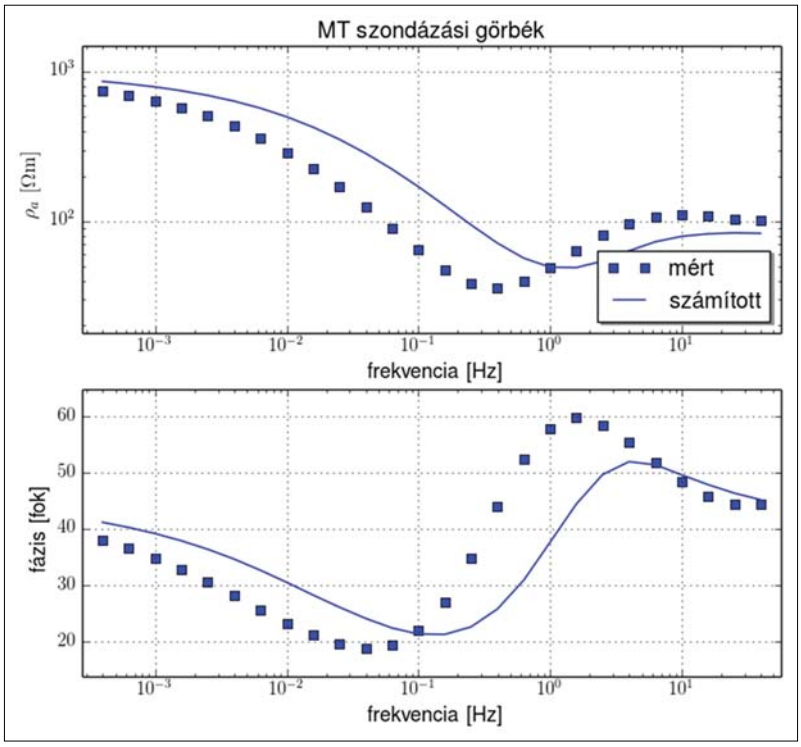


1. ábra | Modell a szintetikus adatok generálásához (1. példa)
Figure 1 | Model to generate synthetic data (1st example)



2. ábra | Startmodell az 1. inverziós példához
Figure 2 | Startmodel to the inversion of 1st example

A szelvény mentén 7 pontra számítottunk szondázási görbéket. A szomszédos szondázási pontok közötti távolság 8000 m. A linearizált inverzió startmodellje látható a *2. ábrán*. A 3. szondázási ponthoz tartozó szimulált mérési adatok és a startmodellhez tartozó adatok illeszkedése látható a *3. ábrán*. A többi mérési ponthoz tartozó szondázási görbét nem jelenítettük meg, mivel a jellegük teljesen hasonló. Az első inverziós kísérlet során valamennyi modellparaméter változását megengedtük. A második réteg a környezetéhez képest jól vezető, és a jól vezető rétegeknek a paraméterei külön-külön nem határozhatóak meg, csak az összegzett vízszintes irányú vezetőképességük, az egyenáramú elektromos méréseknél ez a fajta ekvivalencia jól ismert. Egy közönséges egydimenziós inverzió esetében is egy viszonylag vékony, jól vezető rétegre csak a fajlagos ellenállás és a vastagság hányadosa határozható meg. Ezért nem is volt túlságosan meglepő, hogy a szelvény menti adatokra elvégzett inverzió nem adta vissza a generáló modell réteghatárait. Ehelyett a második réteg fajlagos ellenállását adta meg úgy, hogy az változott a szelvény mentén. Az így kapott modell geoelektromos szempontból ekvivalens volt a generáló modellel, amit az bizonyított, hogy az egyes szondázási görbék illeszkedése és az RMS ebben az esetben is jó volt. Az ekvivalencia kiküszöbölése érdekében a továbbiakban nem engedtük meg a második réteg fajlagos ellenállásának a szelvény menti változását. A $\rho_{2,1} = 0$ és $\rho_{2,2} = 0$ (a táblázatban 1 szerepel) rögzített paraméterekkel elvégzett inverzió eredményeként kapott modell látható a *4. ábrán*. Összevetve ezt az *1. ábrával* megállapítható, hogy a két modell között nincs számottetvő eltérés. A vizuális egyezésen túl elemzünk még néhány, az inverzió minőségét jellemző mennyiséget. Az *5. ábrán* látható a mért és az inverziós modellhez tartozó görbék illeszkedése. Zajmentes adatokról léven szó, az illeszkedés teljesen megfelelő. Az RMS a startmodell esetén 0,52 volt, az ábrázolt inverziós modellhez tartozó RMS 0,004. A bemutatott inverziós modellt a 40. iteráció után kaptuk, de a modell és az RMS már a 10. iteráció után



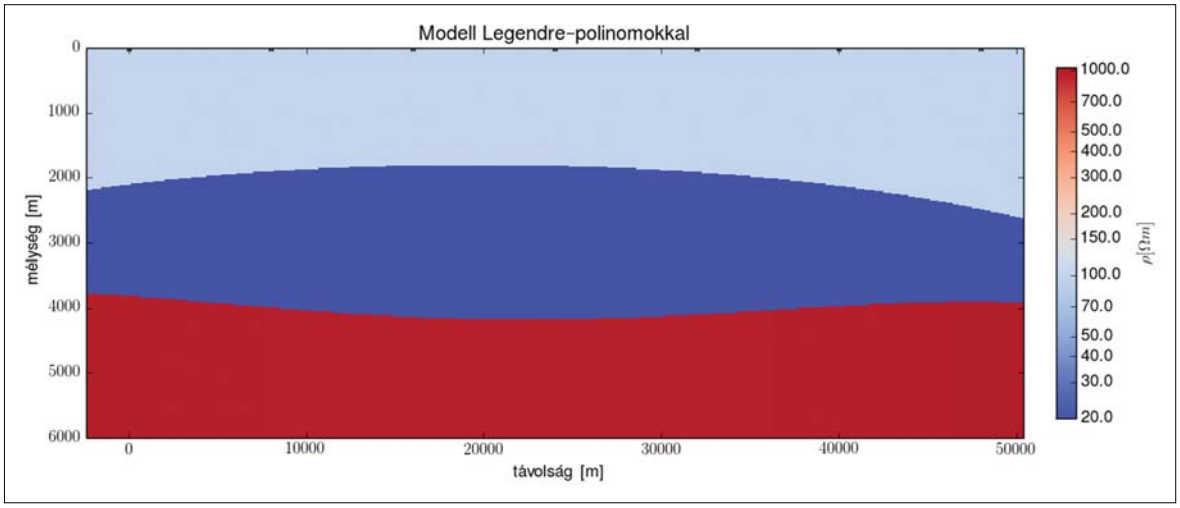
3. ábra | A szintetikus adatok és a startmodellhez tartozó elméleti adatok a 3. szondázási pontnál (1. példa)

Figure 3 | Synthetic data and theoretical data belonging to the start model at the 3rd site (1st example)

beállt egy értékre, és ezután már nem változott számottevően. A kapott modellparaméterek értékeit tartalmazza a *2. táblázat.* Látható, hogy amint az el is várható, a legnagyobb pontossággal az első réteg ellenállását meghatározó paramétereket kaptuk vissza, a leggyengébben a 3. réteg ellenállásának a változására hatással levő $\rho_{3,2}$-t. A generáló modell esetében a harmadik réteg ellenállása a szelvény mentén állandó volt, az inverziós modell esetén egy kismértékű változás fellép.

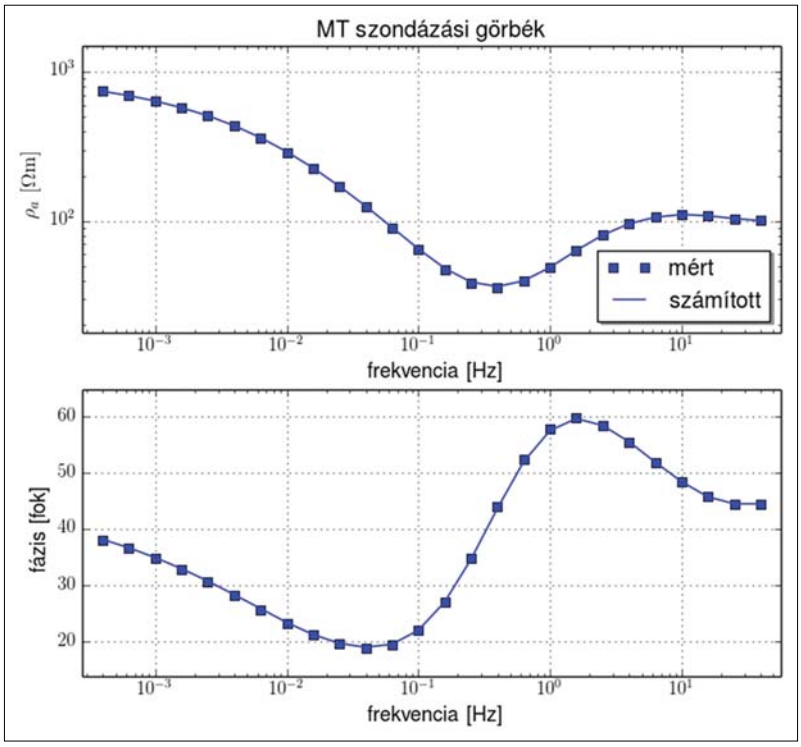
2. táblázat | Az inverziós modell parameterei (1. példa)

Sorszám	0	1	2
ρ_1 [Ωm]	99,96	1,002	0,098
ρ_2 [Ωm]	19,91	1,0	1,0
ρ_3 [Ωm]	987,51	1,008	1,036
d_1 [m]	2002,87	1,097	1,205
d_2 [m]	1991,01	0,900	0,713



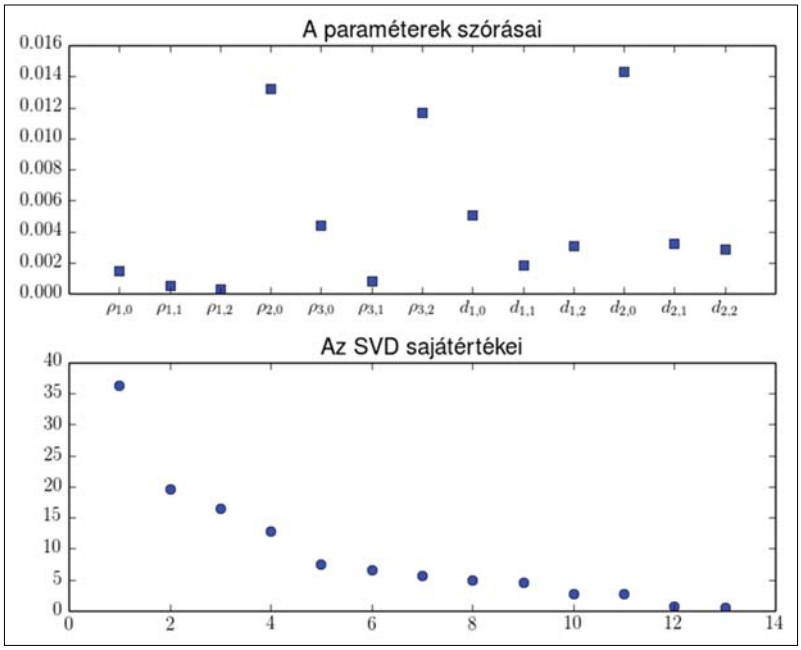
4. ábra | Az 1. példa inverziós modellje

Figure 4 | The inversion model of the 1st example

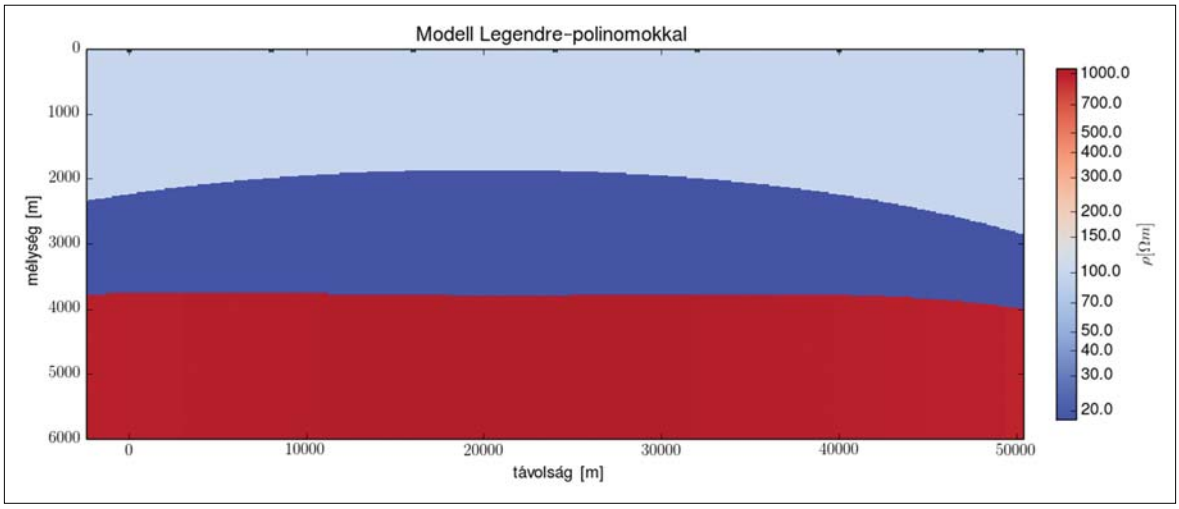


5. ábra / **Figure 5** — A szintetikus és a számított adatok illeszkedése a 3. mérési pontnál (1. példa) / The fit of synthetic and calculated data at the 3rd site (1st example)

A *6. ábrán* láthatóak a paraméterek szórásai, valamint az SVD sajátértékei. A két legnagyobb szórás érték a második réteg fajlagos ellenállásához és vastagságához tartozik. Ez a már említett, jól vezető rétegekre érvényes ekvivalenciából adódik. Egy másik viszonylag magas szórás érték a $\rho_{3,2}$-höz tartozik, ami megmagyarázza, hogy az inverziós modellben épp ennek a paraméternek az értéke esett viszonylag távol a generáló modell megfelelő paraméterértékétől. A legkisebb szórásértékek az első réteg fajlagos ellenállását meghatározó paraméterekhez tartoznak, ami kapcsolatba hozható azzal, hogy az inverziós modell e paraméterei estek legközelebb a generáló modell paramétereihez. A sajátértékek nagysága hasonlóan változik, mint a hasonló paraméterszámú egydimenziós inverziók során. A $\lambda_{max} / \lambda_{min}$ = 72,9 arány is elfogadható minőségű inverzióra utal.



6. ábra / **Figure 6** — A paraméterek szórásai és az SVD sajátértékei (1. példa) / Standard deviations of parameters and the eigenvalues of SVD (1st example)

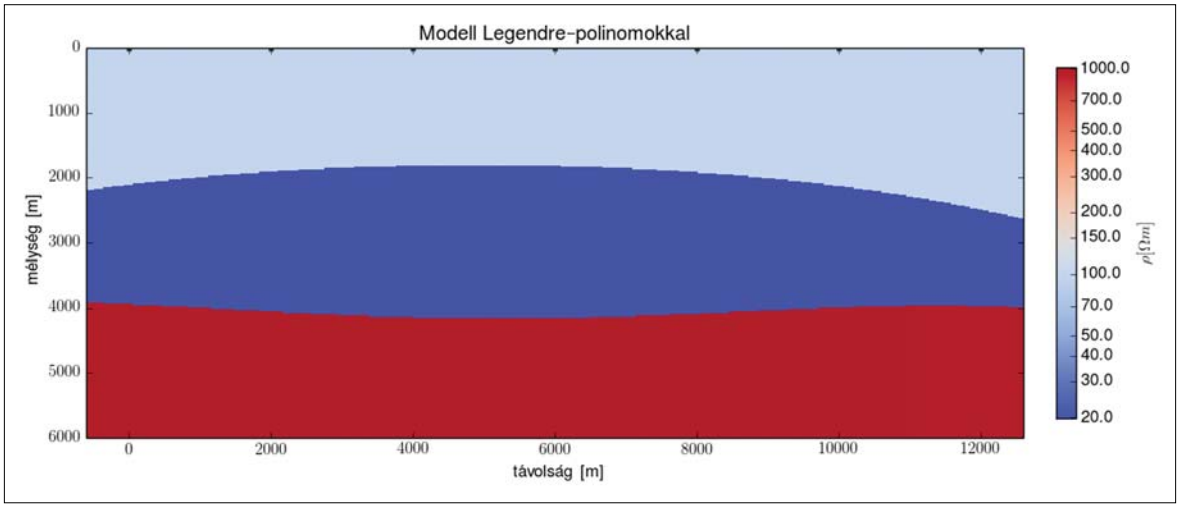


7. ábra | Az inverzió eredménye pontonkénti egydimenziós előremodellezéssel (1. példa)
Figure 7 | The result of inversion with local 1D forward modeling (1st example)

Végül nézzük meg, hogy milyen modellt kapunk, ha az inverzió a pontonkénti egydimenziós előremodellezésen alapul! Kezdeti modellként, a *4. ábrán* levő modellt választottuk, hiszen most nem volt célunk az egydimenziós előremodellezésen alapuló inverzió beható elemzése, csak a kétféle előremodellezésen alapuló inverzió közötti eltérést akartuk szemléltetni. Másképpen fogalmazva, mindössze azt néztük meg, hogy a 2D-s előremodellezésen alapuló inverziós eredményt az 1D-s előremodellezésen alapuló inverzió milyen mértékben változtatja meg. A kapott modell *(7. ábra)* elsősorban a második réteghatárban különbözik a kétdimenziós modellezésen alapuló inverziós modelltől. Az RMS = 0,019 érték nagyobb, mint a kétdimenziós előremodellezésnél, ami abból adódhat, hogy a kétdimenziós modell alapján számított szintetikus szondázási görbékhez nem illeszthetők pontosan egydimenziós modellhez tartozó szondázási görbék.

Második inverziós példa

A következő tesztmodell teljesen hasonló lesz az előzőhöz. Azt nézzük meg, hogy miként működik az inverzió abban az esetben, ha a rétegparaméterek változása a szelvény mentén nagyobb mértékű. Ehhez az előző modellt zsugorítottuk a szelvény irányában, a szondázási pontok közötti távolság így 8 km helyett 2 km lett. Az inverziós modell egyéb paraméterei, a Legendre-polinomok együtthatói változatlanok maradtak. Ezért a generáló modellt külön meg sem jelenítjük, mivel csak a vízszintes tengely skálázásában különbözik az *1. ábrán* ábrázolt modelltől. Az inverziót ugyanolyan módon alkalmaztuk, mint az előző példánál, ugyanúgy generáltuk a zajmentes szintetikus adatokat, ugyanazokat a kezdeti modellparamétereket használtuk. Az eredményül kapott inverziós modell az *8. ábrán* látható. A vízszintes tengely skálázásán látszik, hogy itt a szondázási pontok 8 km helyett 2 km-enként vannak. A szondási görbék illesz-

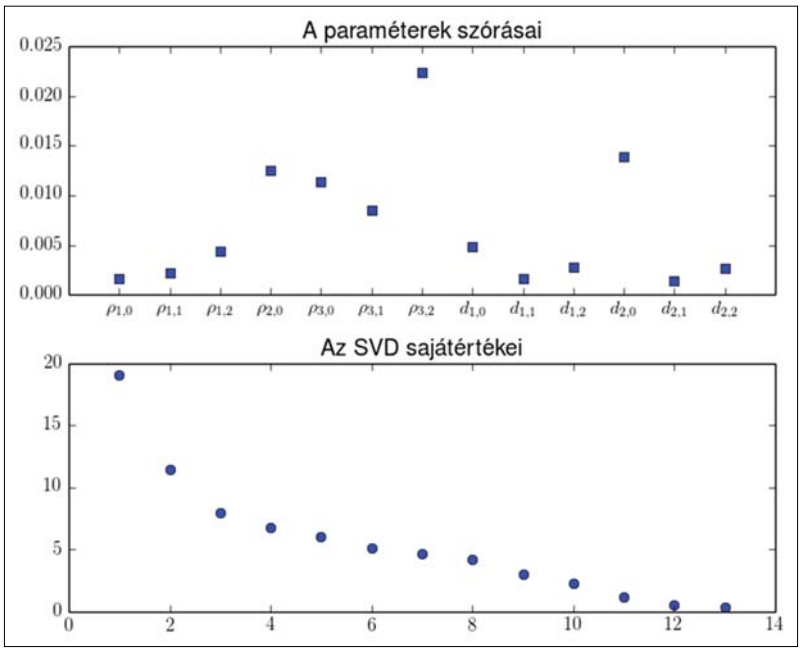


8. ábra | A második példa inverziós eredménye
Figure 8 | Inversion result of the second example

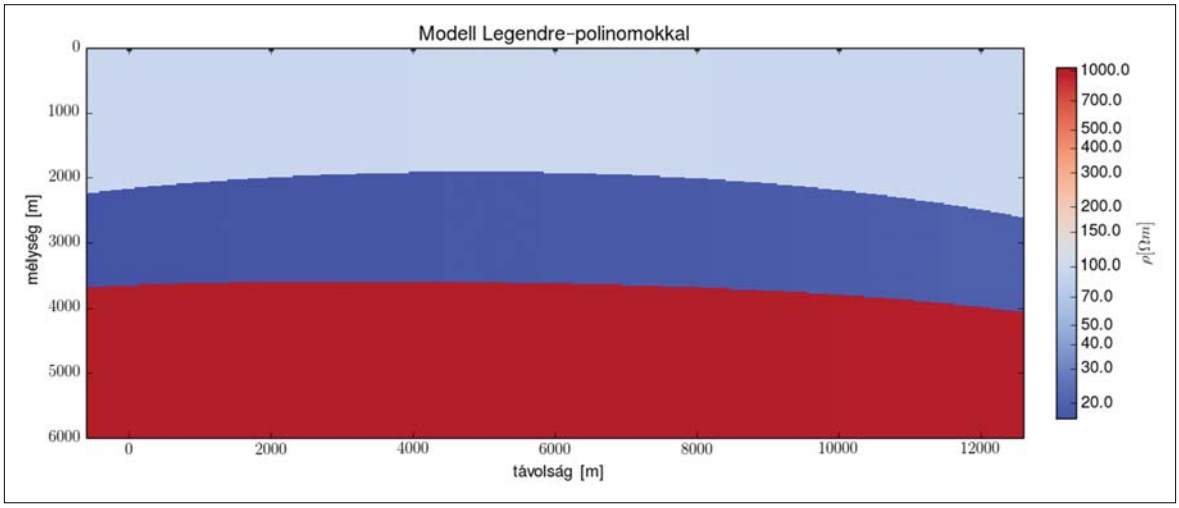
kedését ennél a modellnél nem jelenítettük meg, hiszen teljesen hasonló jellelgű ábrák lennének, mint a *3.* és az *5. ábra*. Az RMS nagyságrendje hasonlóan alakult, mint az első inverziónál. Szemmel látható, hogy a második réteghatár görbülete kissé kisebb, mint az *1.* és a *4. ábrán*. Ennek az oka jól megmagyarázható a modellparaméterekkel. A mélységet megjelenítő vonalak görbületét a Legendre-polinomok másodfokú tagjainak az együtthatói határozzák meg, azaz a $d_{1,2}$ és $d_{2,2}$. A *3. táblázatból* látszik, hogy a 2. réteghatár meghatározásában szereplő $d_{2,2}$ paraméter értéke (0,752) itt most távolabb esik a generáló modell megfelelő paraméterétől (0,700), mint az első példa esetében (0,713). A többi modellparaméter esetén is vannak eltérések, de azok kisebbek. A *9. ábrán* látható, hogy itt a $\rho_{3,2}$ paraméter szórása a legnagyobb. A következő két legnagyobb szórás a második réteg fajlagos ellenállásához és vastagságához tartozik, ami a már említett ekvivalencia következménye. Abban nincs változás, hogy a legbiztosabban az első réteg paraméterei határozhatók meg. A legnagyobb és legkisebb sajátérték hányadosa most 45,28, ami kissé jobb, mint az előző példánál.

3. táblázat | Az inverziós modell paraméterei a 2. példánál

Sorszám	0	1	2
ρ_1 [Ωm]	100,02	1,000	1,000
ρ_2 [Ωm]	19,80	1,0	1,0
ρ_3 [Ωm]	1009,38	0,994	0,988
d_1 [m]	2006,84	1,096	1,205
d_2 [m]	2023,50	0,887	0,752



9. ábra | A paraméterek szórásai és az SVD sajátértékei (2. példa)
Figure 9 | Standard deviations of parameters and the eigenvalues of SVD (2nd example)

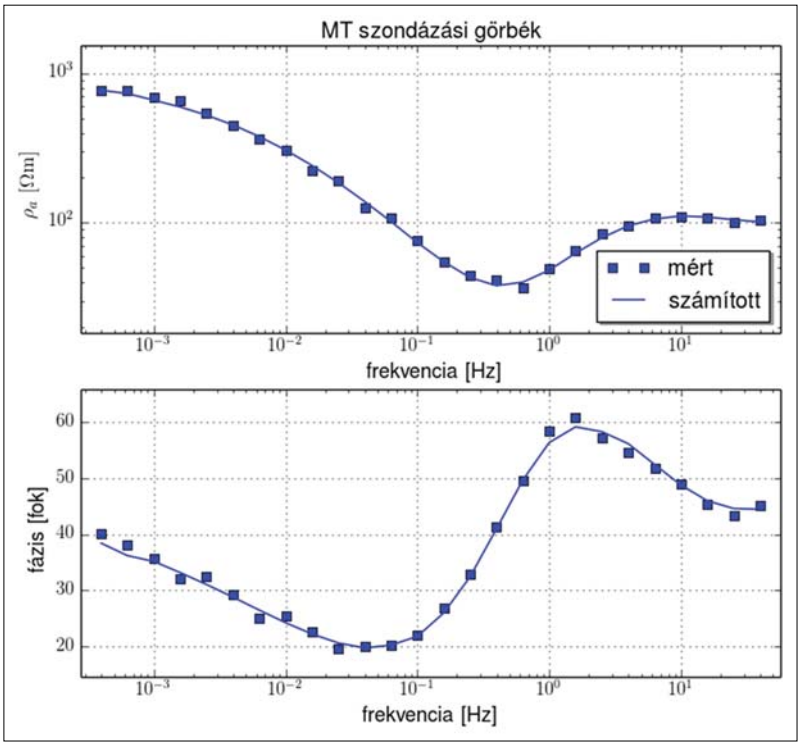


10. ábra | Az inverzió eredménye pontonkénti egydimenziós előremodellezéssel (2. példa)
Figure 10 | The result of inversion with local 1D forward modeling (2nd example)

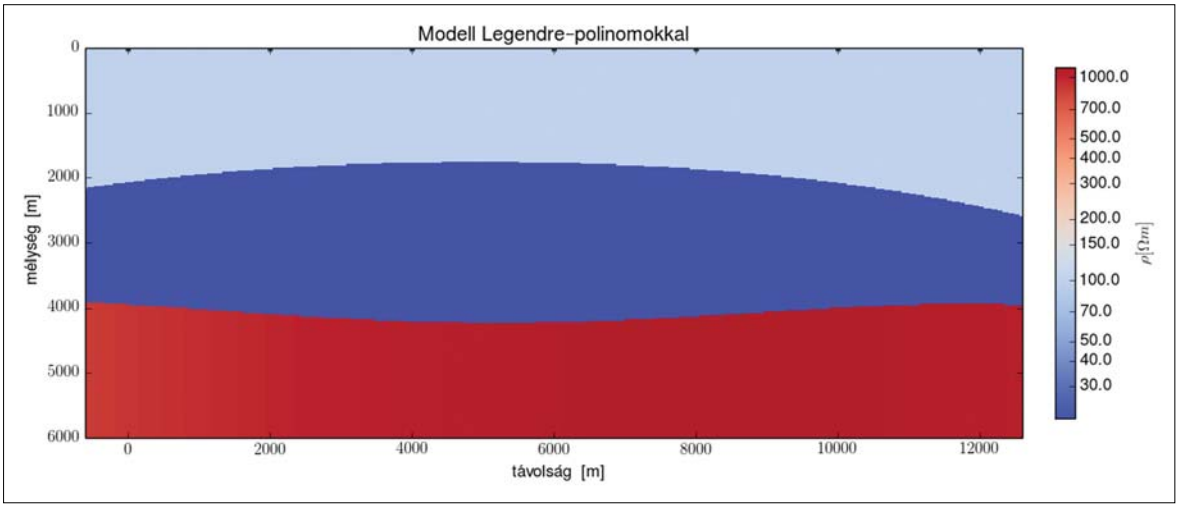
Végezzük el erre a modellre is a pontonkénti egydimenziós modellezésen alapuló inverziót *(10. ábra)*. Az RMS ebben az esetben 0,014. Összehasonlítva ezt a modellt a *7. ábrán* látható modellel megállapíthatjuk, hogy a modell kismértékben romlott – a szelvény közepe táján a második réteg vékonyabb lett – távolabb került a generáló modelltől. A második réteghatár görbülete is ellentétes lett a generáló modell második réteghatárának a görbületéhez képest. A paraméterek teljes táblázatát ennél az inverziónál nem közöljük, csak azt a két paramétert emeljük ki, amelyek esetén a legnagyobb az eltérés a várt értékhez képest. A $d_{2,2}$ paraméter értéke 0,899 lett 0,700 helyett, a $\rho_{3,0}$ értéke 1603,53 lett 2000,0 helyett. Mindkét eltérés lényegesen nagyobb annál, mint amilyen paramétereltéréseket kaptunk a kétdimenziós előremodellezésen alapuló inverziónál.

Harmadik inverziós példa zajjal terhelt adatokkal

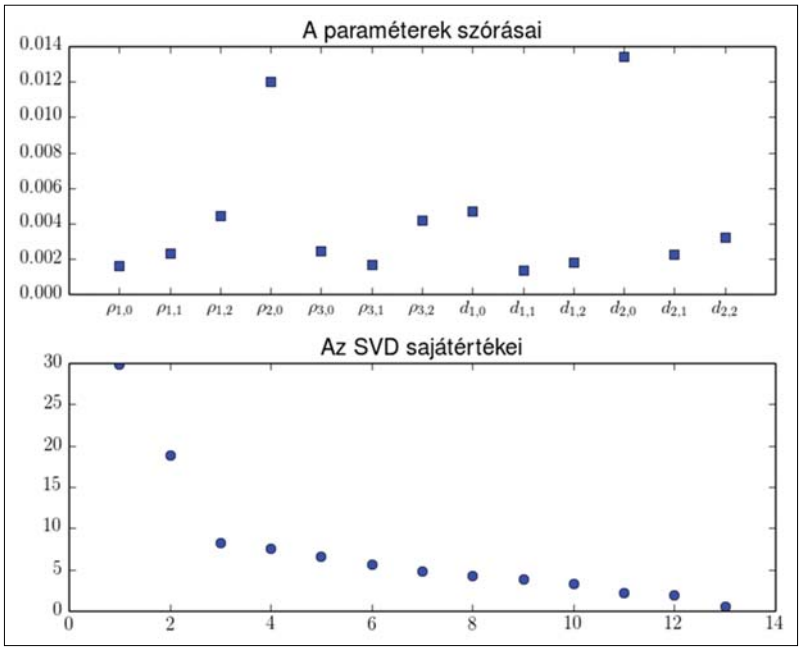
Az ismertetett inverziós eljárást zajjal terhelt adatokon is teszteltük. Ennek a sikeressége egy előfeltétele az inverzió gyakorlatban való alkalmazásának. Kiinduló modellként, a szintetikus adatok generálására a 2. példa modelljét alkal-



11. ábra | A zajos és számított adatok illeszkedése a 3. pontnál
Figure 11 | The fit of noisy and calculated data at site 3



12. ábra | A harmadik inverziós modell, zajjal terhelt adatokból
Figure 12 | The third inversion model from noisy data



13. ábra | A paraméterek szórásai és az SVD sajátértékei (3. példa)
Figure 13 | Standard deviations of parameters and the eigenvalues of SVD (3rd example)

maztuk, a mérési pontok koordinátái, a frekvenciák ugyanazok maradtak. A modell megfelel az *1. ábrán* levőnek, csak a tengely skálázása más, a mérési pontok 2 km-enként vannak. Ebben az esetben az adatokhoz 5% Gauss-eloszlású zajt adtunk. Egyébként az inverziót ugyanazzal a kezdeti modellel futtattuk. A *11. ábrán* látható a zajjal terhelt szintetikus adatok és az inverziós modellhez tartozó elméleti adatok illeszkedése a 3. szondázási pontnál. A *12. ábrán* látható az inverziós modell. Szemmel láthatóan alig különbözik a zajmentes adatokból kapott modelltől *(8. ábra)*. Az RMS értéke itt természetesen nagyobb, mint a zajjal nem terhelt adatok esetében (0,044). A kapott modellparaméterek értékeit tartalmazza a *4. táblázat*. Ezek a 40. iteráció után kapott értékek, de meg kell jegyezni, hogy az RMS már a 20. iteráció után is 0,044 érték körül mozgott, a modellparaméterek is változtak kissé. Az inverzió az ilyen esetben, amikor az iterációs lépések során az RMS már érdemben nem változik, ekvivalens modellek sorát adja, azaz a modellparaméterek kissé változhatnak, de a modellből számított elméleti mérési adatok csak elenyésző mértékben módosulnak. Ezt figyelembe kell venni az egyes modellparaméterek összehasonlításánál.

4. táblázat | A harmadik inverziós modell paraméterei zajjal terhelt adatok esetén

Sorszám	0	1	2
ρ_1 [Ωm]	100,06	1,001	0,993
ρ_2 [Ωm]	20,44	1,0	1,0
ρ_3 [Ωm]	1063,14	1,027	0,904
d_1 [m]	1959,92	1,168	1,240
d_2 [m]	2058,23	0,852	0,718

A paraméterek szórásértékei a *13. ábrán* láthatók. Érdekes, hogy a 2. példánál a $\rho_{3,2}$-höz tartozó viszonylag nagy szórásérték itt viszonylag lecsökkent. A valódi ekvivalenciát jellemző kapcsolatra utaló, $\rho_{2,0}$-hoz és $d_{2,0}$-hoz tartozó szórásértékek itt jobban elkülönülnek a többi paraméter szórásértékeitől, mint a zajmentes esetben. A legnagyobb és legkisebb sajátérték hányadosa 55,18, ami nem jelent lényeges különbséget az inverzió stabilitására vonatkozólag az előző két példához képest.

Összefoglalás

Speciális, változó rétegvastagságú szerkezetekre sorfejtéses inverziós eljárást mutattunk be. Az előremodellezés és a parciális deriváltak számítása az általános numerikus 2D modellező programmal történt. Szintetikus adatokon bemutattuk, hogy az iterációs elven működő inverzió jól adja vissza a generáló modellt. Példákon mutattuk meg, hogy a bemutatott inverziós algoritmus jobb eredményt ad, mint a pontonkénti egydimenziós előremodellezésen alapuló inverzió. Az inverziót eredményesen teszteltük zajjal terhelt adatokon is. Ezért a gyakorlati alkalmazásnak sem látjuk akadályát.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak a K109441. számú OTKA projektben kapott kutatási támogatásáért.

A tanulmány szerzői

Prácser Ernő, Dobróka Mihály

Hivatkozások

Dobróka M., Gyulai A., Ormos T., Csókás J., Dresen L. (1991): Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an underground coal mine. Geophysical Prospecting 39, 643–665

Dobróka M., Prácser E., Turai E., Kavanda R. (2013): Quick imaging of MT data usingan approximate inversion algorithm. Acta Geodaetica et Geophysica 48/1, 17–25

Gyulai Á., Ormos T. (1999): A new procedure for the interpretation of VES data: 1.5-D simultaneous inversion method. Journal of Applied Geophysics 41, 1–17

Haber E., Ascher U. M., Aruliah D. A., Oldenburg D. W. (2000): Fast simulation of 3D electromagnetic problems using potentials. Journal of Computational Physics, 163/1, 150–171

Jackson D. D (1972): Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society 28, 97–190

Jupp D. L. B., Vozoff K. (1977): Two-dimensional magnetotelluric inversion. Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society 50, 333–352

Parker R. L. (1994): Geophysical Inverse Theory. Princeton University Press, p. 386

Siripunvaraporn W., G. Egbert (2000): An efficient data-subspace inversion method for 2-D magnetotelluric data. Geophysics 65, 791–803

Tarantola A. (1984). Inverse Problem Theory. Elsevier Science Publishers B. V., p. 613