A karotázs elektromos direkt feladat megoldása sok radiális rétegből álló modellre

*DRAHOS DEZSŐ**

A szénhidrogénkutatásban használatos elektromos kőzetmodell három homogén fajlagos ellenállású radiális rétegből áll, amelyekből a középső az elárasztott zónát reprezentálja. A valóságban ennek fajlagos ellenállása nem állandó, hanem a fúrólyuktól mért távolsággal változik. Ilyen modellre azonban a direkt feladat megoldása rendkívül bonyolult. Bármilyen elárasztási ellenállás-profil tetszőleges pontossággal megközelíthető lépcsőfüggvénnyel, ami az elárasztott zónának sok vékony radiális réteggel való helyettesítését jelenti. A cikkben egy rekurziós formulát vezetünk le, amellyel a sokrétű probléma egyszerűen oldható meg. Numerikus példákon szemléltetjük a lineáris fajlagos ellenállás hatását különböző laterológ elrendezések esetében.

Модель электрических свойств породы, применяемая при поисках углеводородов, состоит из трех радиальных слоев с однородным удельным сопротивлением, средний из которых представляет собой затопленную зону. На самом деле удельное сопротивление этой зоны не является постоянным, а меняется с расстоянием от скважины. Однако для такой модели решение прямой задачи чрезвычайно сложно. Любой профиль сопротивления затопления с произвольной точностью может быть аппроксимирован ступенчатой функцией, что означает замену затопленной зоны множеством тонких радиальных слоев. В работе выведена рекурсивная формула, с помощью которой можно просто решить задачу многих слоев. Влияние линейного удельного сопротивления иллюстрируется численными примерами для различных случаев распределения латерологов.

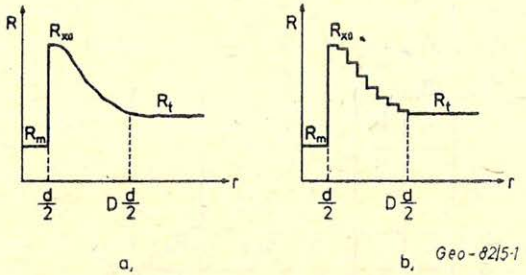
The ideal rock model in electrical well logging consists of three cylindrical layers characterized by constant resistivities. The second layer represents the invaded zone, where under real circumstances, the resistivity changes with the distance from the borehole. The solution of the direct problem for such model is very complicated. Any kind of invasion resistivity profile can be approximated by step functions, i. e. the invasion zone is devided into many cylindrical layers of constant resistivities. In this paper a recursive formula is derived by which the many layer problem can be solved simply. Numerical apparent resistivity values of different laterologs were calculated to show the effect of the linear resistivity profile of the invaded zone.

Bevezetés

A mélyfúrási geofizikában a mérési eredmények kiértékelésére olyan közegmodell használatos, amely egymástól végtelen hosszú koaxiális henger határfelületekkel elválasztott radiális rétegekből áll. Az egyes rétegek homogén fajlagos ellenállásúak. Ez a cilindrikus modell két vagy három rétegből állhat. A kétréteges modellnél a rétegek az iszappal töltött fúrólyuk és az ezen kívül elhelyezkedő érintetlen zóna. Háromréteges esetben az előbb említettek között egy átmeneti réteg van, az elárasztott zóna. Ez permeábilis képződményekben jön létre, ahol az iszapfiltrátum beáramlik a rétegbe és keveréket képez az eredeti rétegtartalommal. Az iszapfiltrátum szaturáció a fúrólyuktól távolodva csökken, majd az elárasztott zóna határánál gyakorlatilag eltűnik. Ez azt jelenti, hogy az elárasztott zóna fajlagos ellenállása nem állandó, hanem a lyuktól mért távolsággal változik *(1a. ábra)*. Ilyen változó fajlagos ellenállású modell feltételezésével hűebben közelíthetjük meg a valóságos viszonyokat. Az elektromos direkt feladat megoldása viszont erre az esetre rendkívül bonyolult, jelenlegi ismeretek

* ELTE Geofizikai Tanszék, Budapest

szerint csak numerikus módszerekkel lehetséges, *Szohranov, (1980)*. Bármilyen radiális fajlagos ellenállású profil megközelíthető azonban lépcsőfüggvénnyel, ami az elárasztott zóna vékony, külön-külön homogén fajlagos ellenállású rétegek sorozatával való helyettesítését jelenti *(1b. ábra)*. A rétegszám növelésével a folytonos profilt tetszőleges pontossággal közelíthetjük meg.



1. ábra. Folytonos fajlagos ellenállás eloszlás az elárasztott zónában *(a)* és ennek megközelítése lépcsőfüggvénnyel *(b)*. Jelölések: *d:* a fúrólyuk átmérője, *D:* az elárasztott zóna átmérője *d* egységekben

Рис. 1. Непрерывное распределение удельного сопротивления в зоне проникновения *(a)* и ее аппроксимания *(b)* с помощью ступенчатой функции. Обозначения: *d* – диаметр скважины, *D* – диаметр зоны проникновения в единицах *d*

Fig.1. Continuous specific resistivity profile in the invaded zone *(a)* and its approximation by step function *(b)*. Abbreviations: *d:* diameter of the borehole, *D:* diameter of the invaded zone in units of *d*

A dolgozatban ezt az utat követve megmutatjuk, hogy hogyan lehet a sokrétű problémát viszonylag egyszerűen megoldani. A módszer az *L. M. Alpin (1938) V. N. Dakhnov (1962)* által háromréteges közegre kidolgozott módszer továbbfejlesztése.

A direkt feladat megoldása

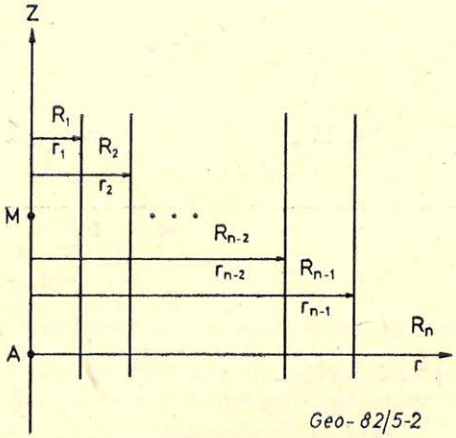
A feladatmegoldás megértéséhez szükséges az *L. M. Alpin* és *V. N. Dakhnov* által háromréteges közegre adott megoldás ismertetése. A sokréteges modell vázlata a *2. ábrán* látható. $R_1, R_2, \ldots, R_n$ az egyes radiális rétegek fajlagos ellenállásai, $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ rétegek közötti henger határfelületek sugarai. A z tengely a fúrólyuk tengelye, amelynek kezdőpontjában (A) helyezkedik el az $I = áll.$ erősségű pontszerű áramforrás. Feladatunk a fúrólyuk tengelyén, az M pontban az $U_1(z)$ potenciál, illetve az AM szondaelrendezés $R_a(\overline{AM})$ látszólagos fajlagos ellenállás elméleti érték meghatározása $(\overline{AM} = |z| = L)$.

1. Az U potenciál függvény ki kell elégítse a Laplace-egyenletet, az A pont kivételével:

$$\Delta U = 0 . \tag{1}$$

Mivel a modell és az áramtér forgásszimmetrikus, a potenciál csak az r és z változók függvénye. Ilyenkor célszerű a hengerkoordinátákkal felírt Laplace-egyenletet használni:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0 . \tag{2}$$



2. ábra. Az n-réteges modell vázlata. $R_1, R_2 \ldots, R_n$ az egyes radiális rétegek fajlagos ellenállásértékei; $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ a henger-határfelületek sugarai

Рис. 2. Схема модели, состоящей из слоев. $R_1, R_2, \ldots, R_n$ значения удельных сопротивлений отдельных радиальных слоев; $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ значения радиусов ограничивающих цилиндрических поверхностей

Fig. 2. Sketch of the n-layer model, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ are the specific resistivities of the layers and $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ are the radii of the cylindric boundaries

2. Az A áramforráshoz közeledve, a potenciál az R_1 fajlagos ellenállású végtelen homogén közegben fellépő potenciált közelíti:

$$U_1 \to \frac{I R_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}, \quad \text{ha} \quad \sqrt{r^2+z^2} \to 0 . \tag{3}$$

3. A réteghatárokon a potenciál és az áramsűrűség normális komponense folytonos. Az i-edik réteghatáron:

$$U_i(r_i) = U_{i+1}(r_i) ,$$

$$\frac{1}{R_i} \frac{\partial U_i}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} = \frac{1}{R_{i+1}} \frac{\partial U_{i+1}(r)}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} . \tag{4.a–b}$$

4. Az áramforrástól végtelen távolságban a potenciál nullához tart az alábbi módon:

$$U_n \to \frac{I R_n}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}, \quad \text{ha} \quad \sqrt{r^2+z^2} \to \infty . \tag{5}$$

5. A közegben kialakuló áramtér-szimmetria miatt a potenciál a z változó szerint páros függvény:

$$U(r_1, -z) = U(r, z). \tag{6}$$

Ezek után írjuk fel a potenciált két függvény szorzataként:

$$U = f(r) \cdot g(z),$$

ezt behelyettesítve a (2) differenciálegyenletbe, a következő alakra jutunk:

$$\frac{g''}{g} + \frac{f''}{f} + \frac{1}{r}\frac{f'}{f} = 0.$$

Mivel g csak z-nek, f csak r-nek függvénye, a fenti differenciálegyenlet két külön egyenletre esik szét:

$$f'' + \frac{1}{r} f' - m^2 f = 0 \quad \text{és} \quad g'' + m^2 g = 0.$$

Az első egyenletnek az $I_0(mr)$ és a $K_0(mr)$ módosított Bessel-függvények lineárkombinációi, a másik egyenletnek pedig a $\sin(mz)$, $\cos(mz)$ függvények lineárkombinációi lesznek a megoldásai.

A $\sin(mz)$ nem tesz eleget az *5.* feltételnek, ezért az ezt tartalmazó megoldásokat el kell hagyni. Az összes m értéket számításba véve, a potenciál az i-edik rétegben a következő:

$$U_i(r, z) = \int_0^\infty [A_i(m) I_0(mr) + B_i(m) K_0(mr)] \cos(mz)\, dm. \tag{7}$$

A (4.a) feltétel következtében $n-1$ algebrai egyenletet kapunk, amelynek általános alakja

$$A_i(m) I_0(m r_i) + B_i(m) K_0(m r_i) = A_{i+1}(m) I_0(m r_i) + B_{i+1}(m) K_0(m r_i). \tag{8}$$

Hasonlóképpen $n-1$ egyenlet származik a (4.*b*) feltétel kielégítéséből:

$$\frac{1}{R_i}[A_i(m) I(m r_i) - B_i(m) K_1(m r_i)] = \frac{1}{R_{i+1}}[A_{i+1}(m) I_1(m r_i) - B_{i+1}(m) K_1(m r_i)], \tag{9}$$

ahol

$$\frac{d I_0(x)}{dx} = I_1(x) \quad \text{és} \quad \frac{d K_0(x)}{dx} = -K_1(x).$$

$I_1(x)$ és $K_1(x)$ az első- és másodfajú elsőrendű módosított Bessel-függvények. A (3) és (5) feltételek miatt $B_1(m)$ és $A_n(m)$ értékét célszerű az alábbi módon választani:

$$B_1(m) = \frac{I R_1}{2\pi^2} \quad \text{és} \quad A_n(m) = 0.$$

Ezek után az ismeretlen együttható függvények a következők lesznek:

$$A_1(m), A_2(m), \ldots, A_{n-1}(m)$$
$$B_2(m), \ldots, B_{n-1}(m), B_n(m);$$

amelyek teljes száma $2(n-1)$, így ezek meghatározhatók a (8) és (9) egyenletek segítségével. Vezessünk be új együttható függvényeket $A_i(m)$ és $B_i(m)$ helyett a következő módon:

$$C_i(m) = \frac{2\pi^2}{I R_1} A_i(m) \quad \text{és} \quad D_i(m) = \frac{2\pi^2}{I R_1} B_i(m).$$

$$\begin{aligned}
C_1 I_0(x_1) - C_2 I_0(x_1) - D_2 K_0(x_1) &= -K_0(x_1) \\
C_1 \frac{I_1(x_1)}{R_1} - C_2 \frac{I_1(x_1)}{R_2} + D_2 \frac{K_1(x_1)}{R_2} &= \frac{K_1(x_1)}{R_1} \\
C_2 I_0(x_2) + D_2 K_0(x_2) - C_3 I_0(x_2) - D_3 K_0(x_2) &= 0 \\
C_2 \frac{I_1(x_2)}{R_2} - D_2 \frac{K_1(x_2)}{R_2} - C_3 \frac{I_1(x_2)}{R_3} + D_3 \frac{K_1(x_2)}{R_3} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\vdots \qquad (10) \\
C_{n-2} I_0(x_{n-2}) + D_{n-2} K_0(x_{n-2}) - C_{n-1} I_0(x_{n-2}) - D_{n-1} K_0(x_{n-2}) &= 0 \\
C_{n-2} \frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} - D_{n-2} \frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} - C_{n-1} \frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} + D_{n-1} \frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} &= 0 \\
C_{n-1} I_0(x_{n-1}) + D_{n-1} K_0(x_{n-1}) - D_n K_0(x_{n-1}) &= 0 \\
C_{n-1} \frac{I_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} - D_{n-1} \frac{K_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} + D_n \frac{K_1(x_{n-1})}{R_n} &= 0
\end{aligned}$$

Az új ismeretlenekkel felírt egyenletrendszerben (10) az egyszerűség kedvéért $C_i(m)$ és $D_i(m)$ argumentumát elhagytuk és a Bessel-függvények argumentumában $x_i = mr_i$. Ezek után az i-edik rétegben a potenciál a következő:

$$U_i(r, z) = \frac{I R_1}{2\pi^2} \int_0^\infty [C_i(m) I_0(mr) + D_i(m) K_0(mr)] \cos(mz)\, dm,$$

az első rétegben pedig

$$U_1(r, z) = \frac{I R_1}{2\pi^2} \int_0^\infty [C_1(m) I_0(mr) + K_0(mr)] \cos(mz)\, dm. \qquad (11)$$

Az integrál második tagját analitikusan meg lehet határozni, mivel igaz az alábbi kifejezés (Weber–Lipschitz-integrál):

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(mr) \cos(mz)\, dm = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \qquad (12)$$

Felhasználva ezt az egyenletet, az U_1 potenciál a fúrólyuk tengelyében

$$U_1(r = 0, z) = \frac{I R_1}{2\pi^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{|z|} + \int_0^\infty C_1(m) \cos(mz)\, dm \right\} \qquad (13)$$

lesz, mivel $I_0(0) = 1$.

Ebből a kifejezésből származtathatók az ismert látszólagos fajlagos ellenállás kifejezések.

Ideális potenciál szondára:

$$R_a^P = R_1 \left\{ 1 + \frac{2L}{\pi} \int_0^\infty C_1(m) \cos(mL)\, dm \right\}. \tag{14}$$

Ideális gradiens szondára:

$$R_a^G = R_1 \left\{ 1 + \frac{2L^2}{\pi} \int_0^\infty C_1(m) \sin(mL)\, dm \right\}. \tag{15}$$

A (14), (15) kifejezésekben először a $C_1(m)$ együttható függvényt kell meghatározni ahhoz, hogy azután az R_a^P, R_a^G látszólagos fajlagos ellenállás értékeket megkapjuk.

Homogén végtelen izotrop fajlagos ellenállású közegben a C_1 függvény azonosan nulla, vagyis a látszólagos fajlagos ellenállás megegyezik a közeg fajlagos ellenállásával. Ha kétréteges közeget tekintünk, a (10) egyenletrendszer a következő két egyenletre egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} C_1\, I_0(x_1) - D_2\, K_0(x_1) &= -K_0(x_1) \\ C_1 \frac{I_1(x_1)}{R_1} + D_2 \frac{K_1(x_1)}{R_2} &= \frac{1}{R_1} K_1(x_1), \end{aligned} \tag{16}$$

ahonnan

$$C_1 = \frac{(R_2 - R_1)\, K_0(x_1)\, K_1(x_1)}{R_1\, I_0(x_1)\, K_1(x_1) + R_2\, I_1(x_1)\, K_0(x_1)}. \tag{17}$$

A módosított Bessel-függvényekre igaz az alábbi azonosság:

$$I_0(x)\, K_1(x) + I_1(x)\, K_0(x) = \frac{1}{x}, \tag{18}$$

amelynek felhasználásával

$$C_1 = \frac{(R_2 - R_1)\, K_0(x_1)\, K_1(x_1)}{(R_2 - R_1)\, I_1(x_1)\, K_0(x_1) + \dfrac{R_1}{x_1}} \tag{19}$$

lesz.

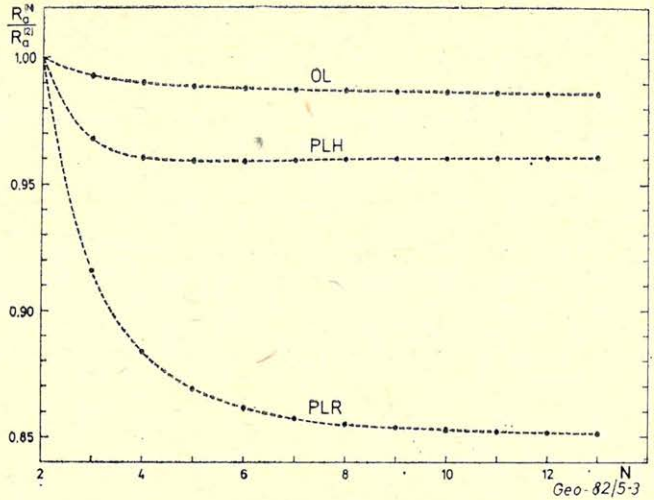
A rétegszám növekedtével C_1 kifejezése egyre bonyolultabbá, nehezen kiértékelhetővé válik. A következőkben egy rekurziós formulát vezetünk le, amely segítségével a C_1 függvény meghatározása tetszőleges rétegszám esetén is egyszerű feladat.

A Cramer-szabály szerint a C_1 ismeretlen függvény az n-rétegből álló modellre a következő módon fejezhető ki:

$$C_1^{(n)} = \frac{\delta_1^{(n)}}{\delta_2^{(n)}}, \tag{20}$$

$$\delta_1^{(n)} = \begin{vmatrix} -K_0(x_1) & -I_0(x_1) & -K_0(x_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{K_1(x_1)}{R_1} & -\frac{I_1(x_1)}{R_2} & \frac{K_1(x_1)}{R_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_0(x_2) & K_0(x_2) & -I_0(x_2) & -K_0(x_2) & \dots & 0 \\ 0 & \frac{I_1(x_2)}{R_2} & -\frac{K_1(x_2)}{R_2} & -\frac{I_1(x_2)}{R_3} & \frac{K_1(x_2)}{R_3} & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & I_0(x_{n-2}) & K_0(x_{n-2}) & -I_0(x_{n-2}) & -K_0(x_{n-2}) & 0 \\ 0 & \dots & \frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_0(x_{n-1}) & K_0(x_{n-1}) & -K_0(x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{I_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & -\frac{K_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-1})}{R_n} \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$\delta_2^{(n)} = \begin{vmatrix} I_0(x_1) & -I_0(x_1) & -K_0(x_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{I_1(x_1)}{R_1} & -\frac{I_1(x_1)}{R_2} & \frac{K_1(x_1)}{R_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_0(x_2) & K_0(x_2) & -I_0(x_2) & -K_0(x_2) & \dots & 0 \\ 0 & \frac{I_1(x_2)}{R_2} & -\frac{K_1(x_2)}{R_2} & -\frac{I_1(x_2)}{R_3} & \frac{K_1(x_2)}{R_3} & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & I_0(x_{n-2}) & K_0(x_{n-2}) & -I_0(x_{n-2}) & -K_0(x_{n-2}) & 0 \\ 0 & \dots & \frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_0(x_{n-1}) & K_0(x_{n-1}) & -K_0(x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{I_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & -\frac{K_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-1})}{R_n} \end{vmatrix} \tag{22}$$



3. ábra. A lineáris fajlagos ellenállás lefutású elárasztott zóna megközelítése különböző számú vékony réteggel. Vízszintes tengelyen az N rétegszám; függőleges tengelyen pedig az egyes laterológ látszólagos ellenállások $N = 2$ esettel normált értékei vannak. Jelölések: *OL:* optimális laterológ; *PLR:* rövid pszeudolaterológ; *PLH:* hosszú pszeudolaterológ. A vizsgált modell paraméterei: $d = 0{,}2$ m, $R_m = 1\ \Omega$m, $R_{x0} = 10\ \Omega$ m, $D = 8$, $R_t = 100\ \Omega$ m

Рис. 3. Аппроксимация зоны проникновения с линейным удельным сопротивлением при помощи различного числа тонких слоев. На горизонтальной оси указано число слоев N, на оси ординат значения кажущихся сопротивлений отдельных латерологов, нормированные на случай $N=2$. Обозначения: *OL* – оптимальный латеролог, *PLR* – короткий псевдолатеролог, *PLH* – длинный псевдолатеролог. Параметры исследуемой модели: $d = 0{,}2$ *м*, $R_m = 1$ *омм*, $R_{x0} = 10$ *омм*, $D = 8$, $R_t = 100$ *омм*

Fig. 3. Approximation of the linear specific resistivity profile of the invaded zone by thin layers. The figure shows the apparent resistivities of different laterologs as the function of the number of layers *(N)*. The apparent resistivities are normalized by the apparent resistivity obtained for the case of $N = 2$. Abbreviations: optimal laterolog *(OL)*, short pseudolaterolog *(PLR)* and long pseudolaterolog *(PLH)*. The parameters of the model are $d = 0.2$ m, $R_m = 1\ \Omega$ m, $R_{x0} = 10\ \Omega$ m, $D = 8$ and $R_t = 100\ \Omega$ m

ahol $\delta_1^{(n)}$ és $\delta_2^{(n)}$ a (10) egyenletrendszer együtthatóiból és az egyenletrendszer jobb oldalából megfelelően alkotott determinánsok, amelyek szerkezete a (21) illetve (22) sorszámú képletekben vizsgálható. Fejtsük ki $\delta_1^{(n)}$-et és $\delta_2^{(n)}$-et kettővel alacsonyabbrendű aldeterminánsaik segítségével:

$$\delta_1^{(n)} = -\left[\frac{I_1(x_1)\,K_0(x_1)}{R_2} + \frac{I_0(x_1)\,K_1(x_1)}{R_1}\right]\delta_1^{(n)} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) K_0(x_1)\,K_1(x_1)\,\delta_2^{(n-1)} \quad (23)$$

és

$$\delta_2^{(n)} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) I_0(x_1)\,I_1(x_1)\,\delta_1^{(n-1)} - \left[\frac{I_0(x_1)\,K_0(x_1)}{R_2} + \frac{I_1(x_1)\,K_0(x_1)}{R_1}\right]\delta_2^{(n-1)}, \quad (24)$$

ahol a $\delta_1^{(n-1)}$ és $\delta_2^{(n-1)}$ determinánsok szerkezete a (25) és (26) képletekben vizsgálható. A (20) formula szerint $C_1^{(n)}$ kifejezhető $\delta_1^{(n-1)}$ és $\delta_2^{(n-1)}$-nel:

$$\delta_1^{(n-1)} = \begin{vmatrix} -K_0(x_2) & -I_0(x_2) & -K_0(x_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{K_1(x_2)}{R_2} & -\frac{I_1(x_2)}{R_3} & \frac{K_1(x_2)}{R_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_0(x_3) & K_0(x_3) & -I_0(x_3) & -K_0(x_3) & \dots & 0 \\ 0 & \frac{I_1(x_3)}{R_3} & -\frac{K_1(x_3)}{R_3} & -\frac{I_1(x_3)}{R_4} & \frac{K_1(x_3)}{R_4} & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & I_0(x_{n-2}) & K_0(x_{n-2}) & -I_0(x_{n-2}) & -K_0(x_{n-2}) & 0 \\ 0 & \dots & \frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_0(x_{n-1}) & K_0(x_{n-1}) & -K_0(x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{I_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & -\frac{K_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-1})}{R_n} \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$\delta_2^{(n-1)} = \begin{vmatrix} I_0(x_2) & -I_0(x_2) & -K_0(x_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{I_1(x_2)}{R_2} & -\frac{I_1(x_2)}{R_3} & \frac{K_1(x_2)}{R_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_0(x_3) & K_0(x_3) & -I_0(x_3) & -K_0(x_3) & \dots & 0 \\ 0 & \frac{I_1(x_3)}{R_3} & -\frac{K_1(x_3)}{R_3} & -\frac{I_1(x_3)}{R_4} & \frac{K_1(x_3)}{R_4} & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & \dots & I_0(x_{n-2}) & K_0(x_{n-2}) & -I_0(x_{n-2}) & -K_0(x_{n-2}) & 0 \\ 0 & \dots & \frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-2}} & -\frac{I_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-2})}{R_{n-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_0(x_{n-1}) & K_0(x_{n-1}) & -K_0(x_{n-1}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{I_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & -\frac{K_1(x_{n-1})}{R_{n-1}} & \frac{K_1(x_{n-1})}{R_n} \end{vmatrix} \tag{26}$$

$$C_1^{(n)} = \frac{-\left[\frac{I_1(x_1)\,K_0(x_1)}{R_2} + \frac{I_0(x_1)\,K_1(x_1)}{R_1}\right]\delta_1^{(n-1)} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) K_0(x_1)\,K_1(x_1)\,\delta_2^{(n-1)}}{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) I_0(x_1)\,I_1(x_1) - \left[\frac{I_0(x_1)\,K_1(x_1)}{R_1} + \frac{I_1(x_1)\,K_0(x_1)}{R_1}\right]\delta_2^{(n-1)}}. \tag{27}$$

Ha összehasonlítjuk $\delta_1^{(n-1)}$ és $\delta_2^{(n-1)}$ szerkezetét $\delta_1^{(n)}$ illetve $\delta_2^{(n)}$ szerkezetével, azt tapasztaljuk, hogy $\delta_1^{(n-1)}$ és $\delta_2^{(n-1)}$ hányadosa is C_1 függvény, amely az R_2, r_2, R_3, $r_3, \ldots, r_{n-1}$, R_n paraméterekkel jellemzett modellre vonatkozik. Ezt beláthatjuk úgy is, hogy a (10) egyenletrendszert a fenti paraméterekkel megadott modellre felírjuk és ekkor a megfelelő determinánsok a $\delta_1^{(n-1)}$ illetve $\delta_2^{(n-1)}$ lesznek. Tehát

$$C_1^{(n-1)} = \frac{\delta_1^{(n-1)}}{\delta_2^{(n-1)}}. \tag{28}$$

Ezek után (27)-ben a számlálót és nevezőt elosztva $\delta_2^{(n-1)}$-nel és a (18) azonosság alkalmazásával $C_1^{(n)}$ kifejezhető $C_1^{(n-1)}$-nel:

$$C_1^{(n)} = \frac{\left[(R_2 - R_1)\,I_0(x_1)\,K_1(x_1) + \frac{R_1}{x_1}\right] C_1^{(n-1)} + (R_2 - R_1)\,K_0(x_1)\,K_1(x_1)}{(R_2 - R_1)\,I_0(x_1)\,I_1(x_1)\,C_1^{(n-1)} + (R_2 - R_1)\,I_1(x_1)\,K_1(x_1) + \frac{R_1}{x_1}}. \tag{29}$$

A (29) képlet egy rekurziós formula, amely megadja a kapcsolatot $C_1^{(n)}$ és $C_1^{(n-1)}$, valamint az első réteg R_1, r_1 paraméterei között. A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $C_1^{(n-1)}$ előállítható egy $C_1^{(n-2)}$ függvényből és a második réteg R_2, r_2 paramétereiből. Fokozatosan folytatva a rétegek belülről kifelé való lebontását, végül eljutunk a $C_1^{(1)}$ függvényhez, amely az R_n fajlagos ellenállású homogén végtelen közegre vonatkozik. Ellenőrizzük a formula helyességét úgy, hogy állítsuk elő a kétréteges modellre vonatkozó $C_1^{(2)}$ függvényt. Ekkor $n = 2$ és $C_1^{(1)} = 0$. Ezt behelyettesítve (29)-be, visszakapjuk a (19) képletet. Ezzel a matematika teljes indukciós bizonyítási módszerével igazoltuk a rekurziós összefüggés általános érvényességét. Az n-réteges modell $C_1^{(n)}$ függvényét előállító formula a következő:

$$C_1^{(i+1)} = \frac{\left[(R_{n-i+1} - R_{n-i})\,I_0(x_{n-i})\,K_1(x_{n-i}) + \frac{R_{n-i}}{x_{n-i}}\right] C_1^{(i)} + (R_{n-i+1} - R_{n-i})\,K_0(x_{n-i})\,K_1(x_{n-i})}{(R_{n-i+1} - R_{n-i})\,I_0(x_{n-i})\,I_1(x_{n-i})\,C_1^{(i)} + (R_{n-i+1} + R_{n-i})\,I_1(x_{n-i})\,K_0(x_{n-i}) + \frac{R_{n-i}}{x_{n-i}}} \longrightarrow \tag{30}$$

ahol $C_1^{(1)} = 0$, és a formulát $(n-1)$-szer kell alkalmazni az i index alábbi értékeire:

$$i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

1. táblázat – Таблица 1. – Table 1.

Az elárasztott zónában lineáris fajlagos ellenállású és az azt helyettesítő $R_i = const.$ modellekre kapott látszólagos fajlagos ellenállás értékek összehasonlítása különböző laterolog elrendezéseknél

Сравнение кажущегося удельного сопротивления, определенного для моделей с $R_i = const.$ и сопротивления, соответствующего зоне проникновения с функцией линейного удельного сопротивления

Comparison of the apparent resistivities of different laterologs for linear resistivity profile and for constant resistivity in the invaded zone. The connection between the two types of models is $R_i = (R_{x0}+R_t)/2$.

D	R_{x0}	R_t	D	R_i	R_t	R_a (OL)	R_a (PLR)	R_a (PLH)
2	10	1				1,6	2,6	2,2
			2	5,5	1	1,6	2,4	2,1
4	10	1				2,5	4,3	4
			4	5,5	1	2,2	3,6	3,5
8	10	1				3,7	5,8	6
			8	5,5	1	3,1	4,2	4,7
2	100	10				17,9	21,2	25,5
			2	55	10	17	20	24
4	100	10				28,6	33,6	43,7
			4	55	10	25,1	29,1	37,8
8	100	10				41,2	43,4	63,9
			8	55	10	33,5	33,8	50,1
2	10	50				44,6	29,3	49,9
			2	30	50	45	29,7	50,3
4	10	50				40,2	22,3	41,4
			4	30	50	41,4	25,5	43,2
8	10	50				35	16,8	31,2
			8	30	50	37,2	23,7	37,5
2	10	100				90,3	50,8	100,3
			2	55	100	91,1	51,6	101,2
4	10	100				80	37,6	81,2
			4	55	100	82,6	34,8	84,9
8	10	100				67,6	26,5	57,3
			8	55	100	72,3	40,3	71,7

A (14) és (15) képletekben előírt integrálok numerikus kiértékeléséhez hasznos ismerni a $C_1^{(n)}$ függvény aszimptotikus viselkedését. Az aszimptotikus összefüggések, amelyek (30)-ból származtathatók, a következők:

$$C_1^{(n)} \to \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{i+1}-R_i}{R_1} K_0(x_i), \quad \text{ha} \quad m \to 0$$

és

$$C_1^{(n)} \to 0, \quad \text{ha} \quad m \to \infty.$$

Numerikus példák

Elméleti látszólagos fajlagos ellenállás értékeket számoltunk lineáris fajlagos ellenállás profillal jellemzett elárasztott zóna esetére. A lineáris profilt azonos vastagságú, homogén fajlagos ellenállású radiális rétegek sorozatával közelítettük meg. A vizsgált elrendezések az optimális laterolog, rövid pszeudolaterolog és a hosszú pszeudolaterolog. Először azt tanulmányoztuk, milyen finom felosztást kell választani ahhoz, hogy a lineáris ellenállás profilt elegendően jól megközelítsük. A $d = 0{,}2\ m$, $D = 8$, $R_m = 1\Omega m$, $R_{x0} = 10\Omega m$ és $R_t = 100\ \Omega m$ paraméterekkel megadott modellre számítottuk a látszólagos fajlagos ellenállás elméleti értékét $N = 2, 3, \ldots, 13$ számú réteggel közelített elárasztási ellenállás profilra. Ezek az $N = 2$-es felosztással normált értékeit tartalmazza a *3. ábra* az N rétegszám függvényében. Az eredmények szerint az optimális és a hosszú pszeudolaterolog látszólagos ellenállás értéke gyorsan konvergál, míg a sekély behatolású rövid pszeudolaterolognál hasonló mértékű megközelítéshez finomabb felosztásra van szükség.

A következő vizsgálat célja a nonhomogenitás hatásának mérése. Itt két modellt hoztunk egymással kapcsolatba, az egyiknél az elárasztott zóna ellenállás lineáris lefutású (nyolcréteges közelítéssel), míg a másiknál konstans. Az utóbbinál az állandó R_i értéket úgy választottuk, hogy az a lineáris ellenállás profil kezdő és végértékének számtani közepe: $R_i = (R_{x0}+R_t)/2$. A lyukátmérő és iszap fajlagos ellenállás itt is $d = 0{,}2\ m$ és $R_m = 1\ \Omega\ m$. A nonhomogenitás hatást az ily módon megadott modellekre számított látszólagos értékek eltérésével mérjük.

Az *1. táblázat*ban közölt eredmények alapján látható, hogy az eltérés sekély elárasztásnál ($D = 2$) elhanyagolható. A hatás közepes elárasztásnál növekszik, és legnagyobb relatív eltéréseket mély ($D = 8$) elárasztásnál kapunk. Az effektusra legérzékenyebb a sekély behatolású rövid pszeudolaterolog.

Következtetések

1. A vizsgált lineáris fajlagos ellenállás lefutású modell csupán egy a lehetséges modellek közül, a nem homogén fajlagos ellenállású elárasztott zóna első megközelítése. A számítási módszer előnye, hogy segítségével tetszőleges ellenállásprofilra megoldható a direkt feladat.

2. A számítások eredményei szerint a vizsgált hatás sekély és közepes elárasztási mélységeknél nem számottevő, tehát a gyakorlati esetek nagy részénél jó közelítés homogénnek tekinteni az elárasztott zónát. Amennyiben az elárasztott zóna szerkezetének vizsgálata a cél, akkor sekély behatolású elektromos szondákat kell használni, illetve konstruálni.

3. A direkt feladat ilyen módszerrel történő megoldása alkalmazható egyéb fizikai terek, mint például elektromágneses, termikus, diffúziós stb. leírására is.

IRODALOM

Alpin, L. M.: A fúrások elektromos szelvényezésének elmélete: (oroszul), ONTI, Moszkva, 1938.

Barlai Z.: Fúrólyukban végzett geofizikai vizsgálatok speciális problémái, I. kötet NIMDOK, Budapest, 1971.

Dakhnov, V. N.: Geophysical Well Logging: Quaterly of Colorado School of Mines, v. 57, No. 2. 1962. (Translated by George V. Keller).

Drahos D., Salát P.: Application of the linear filter theory in the direct and indirect interpretation of geoelectrical and well logging measurements, Annales Univ. Sci, Budapestinensis R. Eötvös Nom. Sec. Geol, Tom. XVII., p. 133 – 152.

Szohranov, N. N., Zaharov E. V., Jarmakov I. G.: A valóságos fajlagos ellenállás eloszlású elárasztott zóna hatása a BKZ-mérések eredményeire: (oroszul) Prikladnaja Geofizika, vip. 97, 1980. p. 201 – 209.