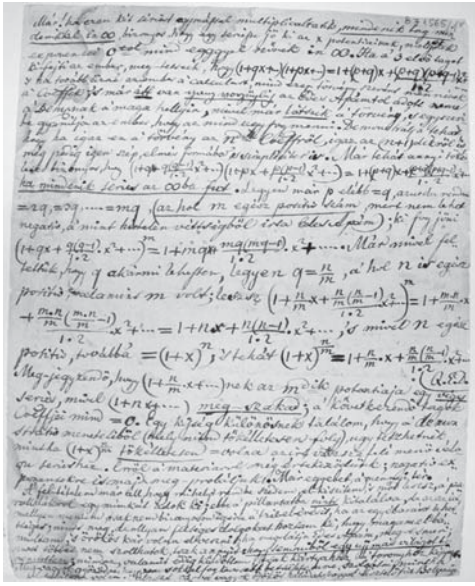
# Istennel osztozó

Ittzés András

## *Százötven éve halt meg Bolyai János*

Bolyai Jánosról nemcsak díjat, tudományos társaságot, iskolát és egyetemet, de kisbolygót és Hold-krátert is elneveztek. Halálának kerek évfordulója indokolta, hogy – folytatva a kerek évfordulókhoz kapcsolódó, már rendszeresnek tekinthető megemlékezéseket – a Magyar Tudományos Akadémia 2010. májusi közgyűlésének díszelőadása is róla szóljon, a nyár végén pedig Budapesten és Marosvásárhelyen emlékkonferenciát szervezzenek tiszteletére. Bolyai Jánosra emlékező írásunkban életpályájának és hagyatéka utóéletének felidézése mellett kísérletet teszünk arra, hogy rövid, közérthető formában felvillantsuk, miben is állt „új világot teremtő" geometriai munkája.

Ma már elmondható, hogy könyvtárnyi irodalom foglalkozik Bolyai Jánossal; a nemeuklideszi geometriát megalkotó műve és sok szenvedést megélt személye itthon és külföldön egyaránt megkapta a méltó elismerést az utókortól. A matematikai alkotásához talán nem is értő, de a magyar kultúrában valamelyest is tájékozott közvélemény azonban azt is tudja, hogy élete a saját korában meg nem értett és meg nem becsült tudóst példázza. Újat teremtő gondolata és életének tragédiája számtalan irodalmi alkotás ihletője lett Adytól és Babitstól Németh Lászlón és Székely Jánoson át Szilágyi Domokosig és Esterházy Péterig. A Bolyai-kultusz, amely az erdélyi magyar kultúrát különösen is átjárja, képzőművészeti alkotásokban is megnyilvánul. Bár hiteles arckép nem maradt fenn Bolyai Jánosról, megpróbálták ezt is rekonstruálni, és egyre több szobor is őrzi emlékét. Születésének 200. évfordulóján pedig Marosvásárhelyen, a Bolyai-hagyatékot is őrző Teleki Téka közelében felavattak egy matematikus által tervezett „szobrot", az úgynevezett Pszeudoszféra-emlékművet. Ez a köztéri alkotás, amely Bolyaihoz kapcsolódva a felfedezés, az alkotó gondolat emlékműve kíván lenni, azon kevés felületek egyikét jeleníti meg, amelyen – matematikus nyelven fogalmazva – lokálisan megvalósul a nemeuklideszi síkgeometria.



1. kép. Bolyai János 1823. nov. 3-án apjának írt levelének második oldala, amelyben hírt ad felfedezéséről.

Élete folyamán egyetlen műve jelent meg nyomtatásban, a híres *Appendix,* amelyben megalapozta a nemeuklideszi geometriát, és amelyet joggal nevezhetünk korszakalkotónak. Akkor sem túlzó ez a minősítés, ha gyakorlatilag Bolyaival egy időben más matematikus is hasonló eredményre jutott, hiszen egymástól függetlenül ők mutatták meg, hogy nem csak az a térfogalom létezik, amelyet Euklidész nevéhez szoktunk kötni, és amelyet mindannyian ismerünk és természetesnek tartunk. Ez az új megközelítés ráadásul nemcsak a geometria tudományára hatott, hanem döntő lépés volt a teret, gravitációt, dinamikát, mozgást vizsgáló modern fizika elméleti eszközrendszerének létrejöttében is. Hatása kimutatható az axiomatikus gondolkodás fejlődésében, és így közvetve a filozófiában, sőt a teológiában is.

## Életpályája

Bolyai János 1802. december 15-én Kolozsvárott született.[1] Édesapja az elszegényedett nemesi családból származó bolyai Bolyai Farkas (1775–1856), akinek élete, munkássága saját okán és fia életével való összefonódása miatt is jól ismert. Édesanyja árkosi Benkő Zsuzsanna (1780[?]–1821).

Bolyai János gyermekkoráról apja levelei révén, illetve későbbi saját feljegyzéseiből is sok információ maradt fenn. Első másfél évét Domáldon[2] töltötte, ahol apja kis birtokán élt a család. 1804 tavaszán azonban Bolyai Farkas meghívást kapott a Marosvásárhelyi Református Kollégium megüresedett matematika-fizika-kémia tanszékére, így a család Marosvásárhelyre költözött. János sokoldalú tehetsége – bár számolni későn tanult meg – hamar nyilvánvaló lett. Sokáig apja és felsőbb éves diákok tanították otthon. 1814-től lett ő is a kollégium diákja, rögtön IV. osztályosként, és 1817-ben osztályelsőként tette le a záróvizsgát, a rigorózumot.

Apja egészen János kiskorától kezdve abban reménykedett, hogy fia felsőbb tanulmányait Göttingenben, ifjúkori barátjánál, a matematika és a matematikai módszerekkel leírható természettudományok egyre kiemelkedőbb és elismertebb személyiségénél, Gaussnál végezheti majd.[3] Tudjuk, hogy a felnövekvő János számára is csalódást jelentett, amikor apja 1816-ban, fia további tanulmányai ügyében írt levelére Gauss nem válaszolt. Bolyai Farkas e levelének szerencsétlen megfogalmazása alapján azonban – különösen akkor, ha mellétesszük egy korábbi levélbeli „összeszólalkozásukat" – azt lehet megállapítani, hogy igazából nem vehető rossz néven Gauss elzárkózása. A kútba esett németországi tanulmányok helyett – egy, a marosvásárhelyi kollégiumban töltött további esztendő után – a bécsi hadmérnöki akadémiára került Bolyai János. A sikeres felvételi vizsga után 1818 nyarának végén kezdte meg itteni tanulmányait. E szintén sok költséggel járó iskoláztatást apja szerény anyagi helyzete miatt mecénások, elsősorban gróf Kemény Miklós és gróf Kendeffi Ádám támogatása tette lehetővé. 1822-ben kitűnő eredménnyel fejezte be az utolsó osztályt, de – mint a két legkiválóbb hallgató egyikét – mérnökkari tisztjelöltként még egy évig az akadémián tartották további tanulmányokra. Közben 1821-ben hosszas betegeskedés után meghalt édesanyja, de az otthoni hírekről János, aki 1818 után hat és fél évig nem jutott el Marosvásárhelyre, csak apja leveleiből értesült.

Bolyai János bécsi tanulmányai alatt is kitűnt matematikai képességeivel, és ekkor kezdett el intenzíven foglalkozni a „parallelák problémájával", vagyis a híres euklideszi V. posztulátum (más rendszerezés szerint a XI. axióma) bizonyít-

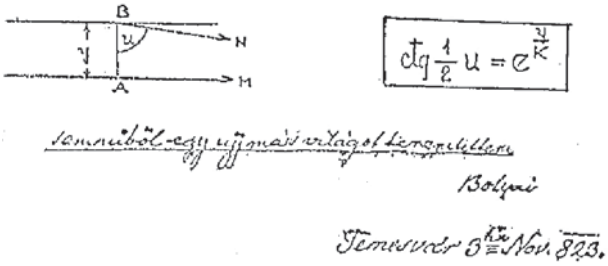
---

[1] Életrajzi adatai és élete fontos eseményeinek leírása számos könyvben fellelhetők, amelyek azonban viszonylag sok részlet tekintetében korrigálják is egymást. Tanulmányunk megírásához e könyvek és az interneten elérhető számos forrás mellett a Bolyai-bicentenárium alkalmából megjelent tematikus folyóiratszámok (*Korunk* 2002. november; *Természet Világa* 2003. I. különszám) és emlékkötet (Prékopa et al. 2004) több cikkét, tanulmányát is felhasználtuk.

[2] A 19. század elején többségében szászok lakta falu a két Küküllő között. Ma Csatófalva (Viişoara, Hohndorf) része. Az egykori Bolyai-kúria már nem áll, de a falu feletti dombon az itt eltemetett Bolyai Farkasné Benkő Zsuzsanna tiszteletére 1981-ben – székelykeresztúri diákok által faragott – kopjafát állítottak (vö. Weszely 2002, 209–210. o.).

[3] Bolyai Farkas báró Kemény Simon mentoraként jutott el németországi egyetemekre, és göttingeni tanulmányai alatt került közeli barátságba Johann Carl Friedrich Gauss-szal (1777–1855), akit később számos területre kiterjedő kiemelkedő eredményei – és talán egyszerű származása ellenére elért társadalmi elismertsége – miatt tisztelői a matematikusok fejedelmének *(princeps mathematicorum)* neveztek. Bolyai Farkas és Gauss barátsága, amelyet elválásukkor kölcsönösen egymásnak ajándékozott pipákkal is megerősítettek, eleinte sűrűbb, később ritkább, esetenként évtizedekig szünetelő levelezésben, és a körülményekből adódóan messze nem kiegyenlített kapcsolatként, de életük végéig, vagyis több mint fél évszázadon át fennmaradt (vö. Benkő 1975). Levelezésük, amely 1899-ben németül és magyarul is megjelent, óriási tudomány- és művelődéstörténeti érték, és Bolyai János életére vonatkozó adatokat is bőséggel tartalmaz.

hatóságának kérdésével. Ez az úgynevezett párhuzamossági axióma, amelyről a későbbiekben részletesebben is szó lesz, több mint 2000 éve adott témát a matematikával foglalkozóknak. Röviden összefoglalva arról volt szó, hogy az euklideszi geometriai rendszer felépítéséhez felhasznált egyik axiómáról azt feltételezték a matematikusok, hogy fölösleges, mert valójában a többi axiómából levezethető állítást fogalmaz meg. Az erre irányuló bizonyítási kísérletek azonban sorra kudarcot vallottak. Sok más neves matematikus mellett Gauss és Bolyai Farkas eszmecseréiben is téma volt a párhuzamossági axióma, és Bolyai Farkasnak is volt több sikertelen kísérlete a bizonyítására. Éppen ez magyarázza azt a tényt, hogy amikor Bécsben tanuló fia arról számolt be leveleiben, hogy ő is a parallelák problémájával foglalkozik, akkor szinte megrémült, és hevesen próbálta lebeszélni erről. Fiát azonban nem tudta eltántorítani a témától. János a maga sikertelen bizonyítási kísérletei után, egyre inkább meggyőződve a XI. axióma bizonyíthatatlanságáról, új gondolati útra indult. Ennek az útnak az első lépéseiről nem sokat tud a tudománytörténet, mert a gazdag Bolyai-hagyatékból is jócskán tűntek el iratok, de fennmaradt az a híres levél *(1. kép),* amelyet 1823. november 3-án küldött apjának Temesvárról az alhadnagyként odahelyezett Bolyai János. Ebben szerepel a sokat idézett mondat: „semmiből egy új, más világot teremtettem." *(2. kép)*[4] Ez az új világ az a geometria, amelyik különbözik a mindennapos szemléletünk szerinti teret leíró euklideszi geometriától. A nemeuklideszi geometriát is magában foglaló úgynevezett abszolút geometriáról kidolgozott elméletét *(3. kép)* Bolyai Jánosnak apjával sem sikerült megértetnie, aki pedig a matematikai témákban – mindenféle személyes torzsalkodásuk ellenére – lényegében egyetlen társa volt. Még akkor sem sikerült ez, amikor 1825 februárjában hosszú idő után először látogatott haza Marosvásárhelyre.




2. kép. Montázs Bolyai János geometriai művének és kézírásos hagyatékának néhány fontos részletéből. A bekeretezett képlet a nemeuklideszi geometria egyik alapösszefüggése.

Az előző évben újra megnősülő apa és fia vitája azonban nemcsak e körül, hanem – az anyai örökség miatt – anyagi kérdések körül is zajlott. Ugyanakkor Bolyai Farkas egy barátjához írt levelében nagyon elismerőleg nyilatkozott fiáról: „rendkivül valo mathematicus; igazi genie, excellens hegedüs" (idézi Dávid 1979, 143. o.). Ez utóbbit, amivel társasági sikereket is elért, más források is megerősítik. Állítólag kiválóan blattolta Paganini darabjait. Itt jegyezzük meg, hogy az operát és balettet is kedvelő Bolyai jó vívó is volt. A későbbi években párbajairól is sokféle, ugyanakkor a fellelhető adatok szerint túlzó híresztelés kelt szárnyra.

1826-ban az aradi erődítési igazgatóságra helyezték, ahol felettese volt korábbi bécsi matematikatanára, Johann Wolter von Eckwehr. Későbbi feljegyzésekből tudunk arról, hogy Bolyai János még ebben az évben átadta neki az abszolút geometriára vonatkozó elméletének német nyelvű összefoglalását. A kézirat sajnos eltűnt, de mivel Bolyai és egykori tanára más témában később is leveleztek, joggal feltételezhető, hogy ő sem értette meg az új elméletet.

Az életrajzi adatok szerint a következő években többször rendelték Bolyait különböző helyőrségekbe felmérések végzésére, gyakran betegeskedett, és kétszer látogatott haza, amikor ismét személyesen folytathatott eszmecserét apjával matematikai kérdésekről. A második alkalom 1830 decemberétől a következő év május elejéig tartott, a ko-

[4] A levél, amelynek fakszimiléje könyvekben és az interneten több helyen fellelhető (pl. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Bolyai_letter.html; letöltve: 2010. aug. 26.), nagyrészt egészen más matematikai témákról szól. Bolyai János a levél végén csak röviden számol be arról, hogy a parallelákról egy munka kiadását tervezi, mert ha még nincs is kész, de elámult azon, amit már talált. Az idézett mondat és környezete betűhíven: „örökös kár volna el-veszni; ha meg-látja Édes Apám, meg-esméri; most többet nem szollhatok, tsak annyit: hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem".

lerajárvány miatti intézkedések ugyanis megakadályozták, hogy korábban utazzon el új állomáshelyére, Lembergbe. (Végül májusban odautazván a betegséget ő maga is megkapta.) Valószínűleg ekkor készítette elő kiadásra az abszolút geometriáról kidolgozott elméletét. Elhatározták, hogy apja készülő nagyszabású matematikai művének, a *Tentamen*nek a függelékeként jelentetik meg. Innen származik a latin nyelvű mű azóta is közismert rövid címe, az *Appendix,* amely azonban – címlappal és mellékletekkel együtt 29 oldalas – különlenyomatként kikerülve a marosvásárhelyi kollégium nyomdájából már 1831 nyarának elején önállóan is megjelent.[5]

Megállapodásuk alapján rögtön Gausshoz is eljuttatták a művet, kérve a véleményét. Bolyai János abban bízott, hogy az ő elismerése a valamelyest még mindig értetlenkedő apját és a világot is meggyőzi az „új tan" igazságáról. Régóta szünetelő levelezésük csöndjét megtörve Bolyai Farkas 1831 júniusában írt Gaussnak, mellékelve az *Appendix* egy példányát, de a címzetthez csak a levél érkezett meg. Farkas értesülvén erről, 1832 elején másodszor is elküldte fia értekezését Gaussnak, aki március 6-án kelt levelében válaszolt is.

Ez az azóta rengeteget kommentált levél, amelynek a másolatát egy hónappal később kapta meg apjától, óriási csalódást okozott Bolyai Jánosnak. Művének korszakos jelentőségével évek óta teljesen tisztában volt, de ennek elismerésére is vágyott. Gausstól viszont – Bolyai Farkasnak szóló levelében – csak azt a kétes értékű elismerést kapta, hogy „ha dicsérném, akkor magamat dicsérném, mivel a mű egész tartalma, az út, melyet Fiad követ és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30-35 év óta folytatott elmélkedéseimmel" (idézi Dávid 1979, 156. o.). Egyéb levelezését ismerve az utókor elfogadhatja, amit levelében Gauss leírt, hogy ti. valóban voltak eredményei a nemeuklideszi geometria terén (amelyekből azonban – mint maga is említette – „csak keveset tett papirosra"). Elfogadható az is, hogy a biztosra vehető értetlenség miatt semmit nem szándékozott életében nyilvánosságra hozni ez irányú eredményeiből, és így Bolyai művéhez való hozzáállása tulajdonképpen következetességet is jelezhet. Mégsem lehet könnyen megcáfolni azt az értelmezést sem, hogy itt Gaussnak, az etalonként tisztelt szellemóriásnak az emberi gyengesége mutatkozott meg. Igaz, hogy dicsérte az *Appendix*et, és tudjuk, hogy olvasva a művet, már februárban azt írta egy matematikustársának: „[e]zt a fiatal geometert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom" (idézi Dávid 1979, 155. o.). Azzal az érzéketlenségével azonban, hogy nem adta meg a nyilvános elismerést egy nyomtatásban megjelent mű szerzőjének, amire pedig a Göttingeni Tudományos Értesítőben *(Göttinger Gelehrte Anzeigen),* amelyben kisebb jelentőségű eredményekről is rendszeresen megemlékezett, könnyen módot találhatott volna, ráadásul az elsőséget is magának tartotta fenn, méltán rendítette meg Bolyait.

Bár itt nincs lehetőség a témát teljes részletességében tárgyalni, Bolyai életrajzához tartozik Gauss „ítéletének" összefüggésében az is, hogy amikor kilenc évvel később megismerte a professzori és államtanácsosi címmel rendelkező orosz matematikus, Lobacsevszkij hasonló témában írt német nyelvű rövid könyvét, azt már egészen másképp fogadta és kezelte. Viszont sem Lobacsevszkij figyelmét nem hívta fel Bolyai munkájára, sem Bolyaiét Lobacsevszkijére.[6]

---

[5] Teljes címe a különlenyomatban: *Appendix prima. Scientia Spatii, a veritate aut falsitate axiomatis XI-mi Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independens: atque ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica* [Első függelék. A tér tudománya, a XI. euklideszi axióma (a priori soha el nem dönthető) igaz vagy hamis voltától függetlenül: és ennek hamis volta esetén a kör geometriai négyszögesítése]. A *Tentamen* első kötetében megjelent, azóta gyakrabban hivatkozott cím némileg eltér ettől. A leglényegesebb eltérés, hogy a cím elején az *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* [Függelék, mely a tér abszolút igaz tudományát mutatja be] kifejezés szerepel.

[6] A felfedezés elsőségének kérdését sok könyv és cikk részletesen tárgyalja, és ez a magyar Bolyai-kultusznak, de az orosz Lobacsevszkij-tiszteletnek is sarkalatos kérdése. Kétségtelen, hogy a 20. század második felében is jelentek meg olyan jelentős szakkönyvek a világban, amelyek Gausst tekintik a nemeuklideszi geometria felfedezőjének (vö. Kiss 1999, 41. o.), és ma az interneten keresve is találhat ilyen forrásokat az ember. Gyakori eset az is, hogy Lobacsevszkijt említik a nemeuklideszi geometria kapcsán, Bolyai nevét nem. Nehéz megítélni, de talán annyi kijelenthető, hogy a fentiek ellenére a hivatkozások többsége összhangban van a Matematikai

Visszatérve az 1832-es esztendőhöz: a katonai szolgálata körül kialakult problémák ellenére nem sokkal korábban úgynevezett másodosztályú kapitánnyá előléptetett Bolyait április végén Olmützbe vezényelték, de utazás közben balesetet szenvedett. Részben ez az oka, hogy csak augusztusban nyújtotta be Habsburg János főherceghez azt a hároméves szabadságolási kérelmét, amelyben indokként – Gauss levelére való hangsúlyos hivatkozással – az szerepelt, hogy matematikai munkáját szeretné folytatni. Ezt a kérelmét ugyan elutasították, de végül 1833. június 16-án a sokféle betegsége miatt félrokkantnak nyilvánított Bolyait nyugállományba helyezték. Ezek után hazatért Marosvásárhelyre, ahol egy évig a másodszor is özvegyen maradt apjánál lakott. Időközben megjelent a *Tentamen* mindkét kötete, de sem az apa jelentős, sem a fiú korszakalkotó műve nem kapta meg a megérdemelt elismerést.[7]

Közös fedél alatt lakásuk nehézségei miatt 1834-ben megegyeztek, hogy János kiköltözik arra a domáldi birtokra, ahol életének első éveit is töltötte. Nagybátyja, Bolyai Antal ajánlására kibédi Orbán Rozália lett a házvezetőnője (egyes életrajzírói szerint Bolyai megszöktette Orbán Rozáliát), akivel két gyermekük született: Dénes (1837–1913) és Amália (1840–1893). Mai kifejezéssel szólva élettársi kapcsolatban éltek, mert a császári és királyi tiszt házasságkötésének engedélyezéséhez szükséges kauciót nem tudták kifizetni, és Bolyai Farkas az ehhez szükséges anyagi támogatást – egyéb kifogásai mellett – a második házasságból született fiára, Gergelyre, illetve a saját öregkorának bizonytalanságára gondolva nem adta meg.

Bolyai Jánosnak a „domáldi remeteségként" emlegetett korszaka kis megszakítással 1846 elejéig tartott. A világtól meglehetősen elzártan élve is foglalkozott matematikai kérdésekkel, és ekkor készült el az *Appendix* mellett másik olyan matematikai műve, amelyet apján kívül az akkori tudományos világ is megismerhetett volna. *Responsio* címet viselő értekezése a képzetes mennyiségek (a negatív számok négyzetgyökének segítségével értelmezett úgynevezett komplex számok) akkor még nem kellően ismert elméletével, illetve ennek geometriai összefüggéseivel foglalkozott. A dolgozatot – apjával ebben a témában fennálló matematikai vitáinak remélt lezárásaként – a lipcsei Jablonowski Társaság pályázatára készítette el, és 1837 novemberében helyenként gyerekesnek minősíthető személyeskedések között nyújtotta be. A dolgozatot apja pályamunkájához hasonlóan nem díjazta a bíráló bizottság, ami a mű vázlatos volta és a lényegében csak Bolyai által ismert abszolút geometriára való hivatkozásai miatt nem meglepő. Mivel Bolyai a kéziratot néhány évvel később visszakérte, csak a századfordulón – vagyis a matematikai gondolkodás fejlődése szempontjából csupán utólagos érdekességként – derült ki, hogy Bolyai ezen a területen is lényegében ugyanazokra a gondolatokra és eredményekre jutott, amelyekre a komplex számok elméletének a tudománytörténetben számon tartott kidolgozói.

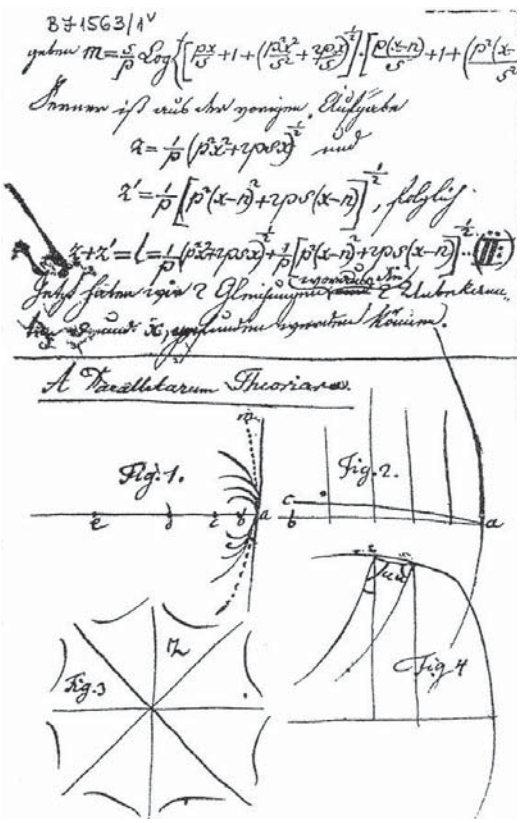
Különböző betegségek és problémák után, a közjóért való korábbi elmélkedéseit folytatva 1841 elején jutott arra az elhatározásra, hogy az emberiség boldogulását elősegítő összefoglaló munkát írjon *Üdvtan* címen. Hitt abban, hogy a tudomány oldja meg az emberiség problémáit, és az emberi tudás egészét felölelő enciklopédikus művet akart összeállítani. Hagyatékában további matematikai töredékek mellett, amelyekben geometriától távolabbi területek, az algebra és a számelmélet problémáival is foglalkozik, ennek a soha el nem készült műnek többféle tervezete megtalálható. Olyan feljegyzést is készített, amely szerint az *Üdvtan* egy *Tan* című, még nagyobb műnek a részlete lenne. Az áttekintő tervezetek mellett sok részlet kidolgozását is megkezdte. Ezek a megvalósíthatóság szempontjából széles

Tudományok Nemzetközi Bibliográfiai Kongresszusának 1894-ben hozott döntésével, amely szerint Bolyai és Lobacsevszkij neve fémjelzi az elsőként megalkotott nemeuklideszi geometriát, az úgynevezett hiperbolikus geometriát.

[7] Bolyai Farkast ugyan még a *Tentamen* megjelenése előtt,1832-ben levelező tagsággal tisztelte meg az Akadémia (akkori nevén Magyar Tudós Társaság), de nem a matematikai, hanem a természettudományi osztályba választották tagnak. Külön érdekesség, hogy bemutatkozó tanulmányát néprajzi témából írta. Bolyai János életében semmiféle tudományos elismerést nem kapott. Ennek nyilván formális okai közé tartozott, hogy egyetlen nyomtatásban megjelent műve latin nyelven íródott, míg az Akadémia elsősorban a magyar nyelven végzett tudományos munkát kívánta támogatni, de a valódi ok nyilvánvalóan az akkori matematikai-természettudományi közélet alacsony színvonala volt.

skálán helyezkednek el: a reális elképzelésektől a nyilvánvalóan irreális, esetenként bizarr ötletekig. Különösen sokat foglalkozott nyelvi, nyelvészeti kérdésekkel. Azonban tökéletességre irányuló állandó törekvése is gátjává vált annak, hogy számtalan fogalmazványa, cikktervezete ellenére bármiféle gondolatát a szélesebb nyilvánosság elé tárja.

Nagybátyja halála után felerősödtek apjával folytatott vitái, s ez oda vezetett, hogy apja megvonta tőle a domáldi birtok használati jogát. Így 1846 elején Bolyai János a gyermekei anyjának nevére megvásárolt marosvásárhelyi házba költözött. A reformkor pezsdülésétől nem igazán megérintett „nyugalmazott ingenieur kapitány" lényegében az 1848–49-es eseményektől is távol maradt. Bár feljegyzéseiben a korábbiaknál többet foglalkozott a napi politikai, közéleti kérdésekkel, feladatot nem vállalt. Valószínűsíthetően nem hiteles az a történet sem, amely szerint 1848 őszén egy titkos megbeszélésen katonaként javaslatot tett a császáraikkal szembeni erdélyi hadműveletekkel kapcsolatban. Viszont a Habsburg-ház trónfosztása után azonnal kihasználva, hogy Marosvásárhely kívül került a császári csapatok ellenőrzési körén, így a házasságkötésére vonatkozó kauciós előírások is hatályukat vesztették, 1849. május 18-án feleségül vette Orbán Rozáliát. S bár a katonai hatóságok a házasságot utólag érvénytelennek nyilvánították, jogi és egyházi értelemben érvényes maradt. E házasságkötés azonban sokkal inkább Bolyai korrektségének a bizonyítéka, mint a boldog családi életüké, hiszen a különböző feljegyzésekből kiderül, mennyi probléma terhelte furcsa kapcsolatukat. Ezek végül oda vezettek, hogy 1852 novemberében írásos szerződés született elválásukról, és Bolyai vállalta, hogy külön költözik. Mindeközben Bolyai folytatta munkálkodását az *Üdvtan*on, és 1849 júniusában egy Kossuthnak címzett fogalmazványtervezetet készített, amelyben kérte, hogy az ország haladása érdekében segítse elő eszméinek valóra váltását, 1852 nyarán viszont a Marosvásárhelyre látogató Ferenc Józsefnek szánt beadványt állított össze, amelyben javaslatot tett, hogy miképpen biztosítsa a közjó előremozdítását.



3. kép. Füzetlap 1820-ból, amelynek ábrái bizonyítják, hogy Bolyai János már ekkor eljutott a nemeuklideszi geometria alapgondolataihoz.

A matematikai kérdésekkel való foglalkozásának új korszakát jelentette, amikor 1848 októberében apjától megkapta Lobacsevszkij már említett 1840-es kiadású német nyelvű könyvét a nemeuklideszi geometriáról. E könyvről egyébként már egy 1844-es kolozsvári hírlapi cikk alapján tudomást szereztek Bolyaiék, a félreérthető megfogalmazást azonban valószínűleg úgy értették, hogy a cikkírónak egy Bolyaiéhoz hasonló, de orosz nyelvű könyvet említett Gauss. Más magyarázatot nem találtak a tudománytörténészek arra, hogy miért csak három és fél évvel később kérte Bolyai Farkas Gauss segítségét a könyv beszerzésénél. Mindenesetre Bolyai Jánosban nagy érzelmeket váltott ki ez a mű. Mielőtt olvasni kezdte, az is felmerült benne, hogy az ő gondolatait elorozva álnéven – az általa egyébként tudósi nagysága miatt minden személyes fenntartása ellenére tisztelt és elismert – Gauss írta. Ahogy előrehaladt azonban az olvasásban, meggyőződött arról, hogy gyanúja hamis, és a plágium nyomai helyett egyre inkább csak a hibákat, kritizálható részeket kereste benne. Talált is ilyeneket, de feljegyzéseiben ezek ellenére elismerte a szerző nagyságát, és a művet mesteri alkotásnak tekintette.

A Bolyai-hagyatékban található egy *Raumlehre* (A tér tudománya) címet viselő német nyelvű, rendezett, feltehetőleg nyomtatásra szánt, de befejezetlen kézirat, amely az 1850-es évek első felében keletkezhetett. Valószínűleg betegségei és a kiadás reménytelensége is akadályozta Bolyait abban, hogy művét befejezze. A mű elemzői szerint alkotóereje

ekkorra már valamelyest hanyatlott, ugyanakkor ebben is találhatók újszerű, értékes részletek. Legjelentősebbnek azt tartják, hogy olyan összefüggéseket is megfogalmazott, amelyeket később a nyújtással és hajlítással szemben invariáns tulajdonságokra fókuszáló, topológia néven ismertté vált matematikai diszciplína tételeiként bizonyították.

Feleségétől való elválása után idős apjával való kapcsolata normalizálódott. Egy városban lakva is sokat leveleztek matematikai kérdésekről, de – annak ellenére, hogy egyes korábbi feltételezések szerint a levelezés is kapcsolatuk további zavartságát bizonyítja – ez nem azt jelenti, hogy személyesen ne találkoztak volna viszonylag rendszeresen. Apja 1856-ban bekövetkezett halála után azonban Bolyai János végképp egyedül maradt. Bár a féltestvéréhez, Gergelyhez írt levelei bizonyítják vágyódását a békés, nyugodt életre, ez nem adatott meg neki. Utolsó éveiben, ha lehet, még gyakoribbá váltak és súlyosbodtak egész életét végigkísérő betegeskedései, amelyeket a sok személyes és hivatalos feljegyzés adatai alapján azóta orvostörténészek is többször elemeztek. 1860 elején előbb tüdőgyulladást, majd agyhártyagyulladást kapott, és január 27-én meghalt. Utolsó földi útjára – a kötelező katonai kíséreten kívül, Mozart temetésére emlékezető módon – szolgálója és három marosvásárhelyi polgár kísérte ki a református temetőbe. Jeltelen sírját 33 évvel később ez a szolgáló, Szőts Júlia tudta megmutatni a Bolyai János emlékének megőrzésén munkálkodó temesvári építésznek, Schmidt Ferencnek. Sírjára 1894-ben emeltek sírkövet, majd hamvait 1911-ben helyezték apjával közös sírba.

## Hagyatékának utóélete

Bolyai János iratait halála után a marosvásárhelyi várkapitány parancsára ládákba rakták és a várba szállították. Katonai titkokat kerestek bennük, de ilyeneket nem találtak. Sokféle hányattatás után a Marosvásárhelyi Református Kollégiumba kerültek az iratok. Ide, majd a válasz elmaradása miatt Pestre, az Akadémiához érkeztek az 1860-as évek vége felé Bordeaux-ból, Párizsból és Rómából azok a levelek, amelyek először mutattak érdeklődést Bolyai hagyatéka után. Gauss halála után ugyanis elkezdték feldolgozni és kiadni az ő levelezését, és a tudományos világ ezen keresztül figyelt fel a Bolyaiakra és az *Appendix*re.[8]

A külföldi érdeklődés hatására 1869 végén Pestre, az Akadémiára került a Bolyaiak hagyatékának egy része, ahol bizottságot állítottak fel az anyag átvizsgálására. A kézírásos hagyaték azonban nagyon töredékes, nehezen adja meg magát a kutatóknak. Ennek megfelelően a feldolgozás nagyon vontatottan haladt, és a bizottság nem is tudott úgy elmélyedni az anyagban, hogy kiadható részleteket talált volna benne. A század végén, amikor már egyre elismertebb lett Bolyai János felfedezése, már a kolozsvári egyetemen is kurzust tartottak az *Appendix*ről, és már elhatározás született a *Tentamen* új és az *Appendix* magyar nyelvű kiadására, a marosvásárhelyi kollégiumba került vissza a tulajdonképpen értéktelennek ítélt Bolyai-hagyaték. Részben itt tanulmányozta azt Schmidt Ferenc ösztönzésére – magyar segítők közreműködésével, de állítólag magyarul is megtanulva – Paul Stäckel német egyetemi tanár. Ő volt az, aki Bolyai Jánosnak az *Appendix*en kívüli, az életpálya kapcsán részben már említett matematikai munkáit publikálta, és ő írta meg az először németül, majd 1914-ben magyarul is megjelent, talán máig legtöbbet idézett Bolyai-monográfiát. A Bolyai-hagyaték később átkerült a Teleki-Bolyai Könyvtárba. A három nyelven (magyarul, németül, latinul) íródott anyag óriási: csak Bolyai Jánostól 14000 oldal, amelyből 3000 oldal matematikai feljegyzés, de sokszor a legkülönfélébb alkalmi papírdarabokra írva.

[8] A mű francia fordítása 1867-ben, olasz fordítása pedig 1868-ban jelent meg. Több nyelven ismertté vált Schmidt Ferencnek a Bolyaiak életéről összeállított cikke is. A következő évtizedben az *Appendix*re épülő német nyelvű geometriakönyv is megjelent, és az *Appendix* angol fordítása is előbb jelent meg az Egyesült Államokban, mint a magyar, amelynek kiadása egészen 1897-ig húzódott.

Itt említhetjük meg, hogy túl azon, hogy saját betűket is alkotott, és feljegyzéseinek egy részét ezekkel írta, Bolyai magyar nyelvét sem könnyű megérteni. Ő maga is panaszkodott, hogy milyen nehéz a gondolatainak formába öntése. Túlzott igényességével főleg nem matematikai szövegeiben sokszor írta egy szó után zárójelben a rokon értelmű szavakat, keresve a legegyértelműbb kifejezését mondanivalójának. *Üdvtan*ának elkészítéséhez egy – a magyarra épülő, de nagyon leegyszerűsített – tökéletes nyelvet akart megalkotni. Hagyatékában ezzel kapcsolatban is rengeteg feljegyzés, szólista, tervezet található. Matematikai nyelvezetének megértése sem könnyű, még a szakemberek számára sem. A nyelvújítás eszméjétől megérintve apjával együtt számos matematikai kifejezést magyarítottak vagy alkottak (például nyi = mennyiség, nyi-tan = matematika, nyiász = matematikus, sima-nyi = valós szám, ösöny = integrál, terj = terület stb.).

A kéziratos hagyaték jelentős része az 1950-es évek óta folyó, a korábbinál sokkal intenzívebb kutatómunka ellenére ma sincs feldolgozva. Több más kutató közül ki kell emelni Benkő Samut, aki óriási érdemeket szerzett a hagyaték rendezésével, illetve azzal, hogy Bolyai János levelezésének, hivatalos iratainak és sok nem matematikai tárgyú írásának feldolgozásával jóval reálisabb képet alakított ki a korábbi romantikus, sok tekintetben azonban dehonesztáló Bolyai-imázsnál. Megállapította azt is, hogy a feljegyzések jelentős részét a magányos gondolkodó beszélgetést pótló, tulajdonképpen saját maga számára írt feljegyzéseinek tekinthetjük, más részüket azonban közvetve vagy közvetlenül a publikálás szándékával vetette papírra (vö. Benkő 1978, 100–104. o.). Ezzel kapcsolatos tervei azonban mindig csak tervek maradtak.

Hogy az egész emberi társadalom megváltoztatásának – nyilvánvalóan utópista – szándékával írni kezdett *Üdvtan* tervét nem tudta megvalósítani, az utókor számára érthető. De Bolyai rejtett, ezért kora tudományát sajnos nem előrevivő, mégis valóságos matematikai teljesítménye sincs még teljesen feldolgozva. Az 1894-ben megfogalmazott akadémiai jelentés, miszerint nincs kiadásra alkalmas anyag a kéziratokban, Stäckel munkássága nyomán már néhány évtizeddel később megcáfolódott, de sokaknak meglepetés volt, hogy még több mint száz évvel később is jelentős eredményekre bukkannak a kutatók. Másokat sem jelentéktelennek tartva két erdélyi matematikus nevét kell még feltétlenül megemlíteni Bolyai János matematikai hagyatékának kapcsán. Weszely Tibor Bolyai összefüggő matematikai munkáit adta ki, részben Stäckel után másodszor, de a 20. század második felében érthető modern jelölésekkel és a szükséges részletes magyarázatokkal (Weszely 1981). Kiss Elemér pedig hatalmas munkával megvizsgálta Bolyainak az algebra és a számelmélet területére eső nagyon töredékes feljegyzéseit, és az ezredforduló környékén megjelent publikációiban[9] kimutatta, hogy Bolyainak ezen a területen is több jelentős eredménye született. Ha ezeket annak idején közzétette volna, esetenként évtizedekkel előzte volna meg azokat a matematikusokat, akiknek nevét, mint első ismert felfedezőjükét, ma bizonyos számelméleti tételek azonosítására használjuk.

## A nemeuklideszi geometria és hatásai

Hogy Bolyai János geometriai munkásságának jelentőségébe egy kicsit bepillanthassunk, induljunk ki abból, hogy egy tudományos rendszer, de legalábbis egy matematikai elmélet klasszikusan úgy épül fel, hogy bizonyos alapfogalmak rögzítése után kimondunk néhány axiómát, vagyis közmegegyezéssel elfogadott, bizonyítás nélküli állítást, majd ezekből újabb fogalmakat definiálunk, és a logika szabályainak felhasználásával további állításokat, tételeket vezetünk le. Ha a felhasználói gyakorlatban nem is így „működik” a matematika, tulajdonképpen ez az a „séma”, amelynek alapján egy elmélet felépíthető. Fontos kérdés természetesen, hogy egy ilyen elmélet ellentmondásmentes-e, mint ahogy az is, hogy teljes-e, azaz minden benne megfogalmazott állításról eldönthető-e, hogy igaz vagy hamis. Az külön probléma, hogy egy ilyen elméletnek mi

[9] Különféle cikkek mellett leginkább összefoglaló könyvében (Kiss 1999), amelynek 2005-ben bővített kiadása is megjelent.

a kapcsolata a fizikai valósággal. Mindenesetre egy matematikai rendszer felépítésének axiomatikus-deduktív módszere éppen az alexandriai Euklidész összefoglaló geometriai munkássága nyomán már legkésőbb a Kr. e. 3. században ismert volt.

A történeti hűség kedvéért meg kell jegyezni, hogy Euklidész az *Elemek* című művében megkülönböztette az axiómákat és az úgynevezett posztulátumokat (követelményeket), amelyeket azonban a későbbi matematikusok már összevontan kezeltek. Az első csoportban például olyan állítások szerepeltek nála, mint hogy ugyanazon dologgal egyenlő dolgok egymással is egyenlők, míg a másodikban például annak megkövetelése, hogy bármely pontból bármely pontba lehessen egyenes vonalat húzni. Ez utóbbi egyébként egy Euklidész által – a felépítendő rendszer szempontjából – nem is pontosan megfogalmazott állítás, amelyet már az ókorban úgy helyesbítettek, hogy „követeljük meg, hogy két pont között egy és csak egy egyenes legyen húzható". Más, kisebb jelentőségű elvi problémák is voltak Euklidész axiómáival, amelyeket csak a 19. század végén, elsősorban Hilbert munkássága révén sikerült teljesen kiküszöbölni, de a lényeges kérdés évezredeken keresztül az volt, hogy az V. posztulátum levezethető-e a többiből. Ez a posztulátum, vagyis a már említett párhuzamossági axióma mai megfogalmazásban úgy szól, hogy ha adott a síkban egy pont és egy rajta át nem menő egyenes, akkor a ponton át egyetlen olyan egyenes húzható, amelyik párhuzamos az eredetileg megadott egyenessel. (Precíz matematikai tárgyalás során természetesen rengeteg részletet kellene még tisztázni, például azt, hogy az egy síkban levő, de egymást nem metsző egyeneseket nevezzük párhuzamosoknak, illetve hogy ilyen egyáltalán létezik-e. Most azonban ezektől a részletektől eltekintünk.)[10]

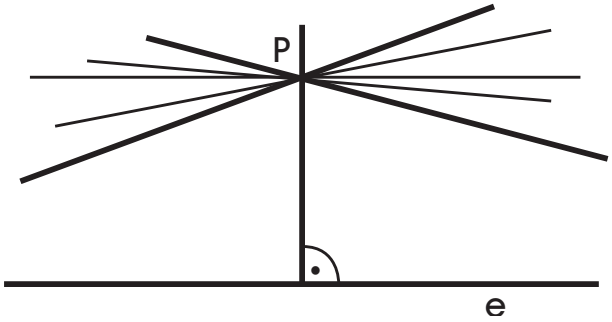
A fenti állítás az átlagember mindennapi szemléletének ugyanolyan nyilvánvalóan megfelel, mint az, hogy két ponton át egy és csak egy egyenes húzható. Talán mondhatjuk, hogy „annyira nyilvánvalónak" tűnt az állítás, vagyis bonyolultabb volta ellenére biztosan igaznak, hogy sok matematikus azt feltételezte: nem független a többi axiómától, hanem belőlük levezethető. S mivel egy axiómarendszertől elvárható az is, hogy ne legyen redundáns, vagyis fölösleges, másból is levezethető feltételeket ne tartalmazzon, ez az axióma a bizonyíthatósága esetén egyszerűen elhagyható lett volna. A párhuzamossági axióma már említett sikertelen bizonyítási kísérletei során tulajdonképpen már több korábbi matematikus közelébe került a nemeuklideszi geometria felfedezésének, de annak lehetetlenségét nyilvánvalónak tartva megállt és visszafordult.[11] Bolyai és Lobacsevszkij voltak az elsők, akik vették a bátorságot, hogy nyilvános publikációban is gyökeresen másképp álljanak a kérdéshez, és a párhuzamossági axiómát ne bizonyítani akarják, hanem mással helyettesítsék. Nevezetesen azt feltételezték, hogy egy ponton át legalább két párhuzamos húzható egy adott egyeneshez *(1. ábra)*.

Csodálatos módon – a többi axióma változatlanul hagyása mellett – így is felépíthető egy geometriai rendszer, amely ugyanúgy „megállja a helyét", mint az euklideszi.[12] Ebben az úgynevezett hiperbolikus geometriában persze – sok

[10] A „párhuzamos" (parallela) fogalmának értelmezése önmagában is érdekes kérdés, mert az euklideszi geometriából ismert párhuzamos egyeneseket úgy is jellemezhetjük, hogy távolságuk állandó, vagyis „ekvidisztáns" (Bolyai által is használt kifejezéssel: „egyközű") vonalakról van szó. Ez azonban csak az euklideszi geometriában van így. A Bolyai által használt „parallela" szó értelmezésének filológiai és szemantikai szempontú rekonstrukciójával foglalkozik Tanács (2008), többek között a tanulmányunkban is hivatkozott több szerző megfogalmazásainak kritikai rendszerezését is elvégezve.

[11] Ez akkor is igaz, ha újabb matematikai-filozófiai kutatások rámutattak, hogy a nemeuklideszi geometria lehetőségének gondolata már Arisztotelész szövegeiben is megjelent (vö. Tóth 2000). A kanti filozófia által meghatározott légkörben, miszerint a térről alkotott fogalom az emberben *a priori* benne van, a sok „visszarettenő" matematikus után a nemeuklideszi geometria létjogosultságát felismerő Gauss sem vállalta a téma nyilvános felvetését és tárgyalását (vö. 6. jegyzet és az életrajzi részben leírt vonatkozó rész).

[12] A „megállja a helyét" kifejezés itt azt kívánja jelenteni, hogy ellentmondásmentes. Ezzel a kérdéssel ugyan Bolyai és Lobacsevszkij is foglalkozott, de teljesen precízen csak későbbi matematikusok tudták megadni a választ. Megjegyezzük még, hogy igazából csak az úgynevezett „relatív ellentmondás-mentesség" bizonyítható, vagyis az, hogy ha az euklideszi geometria ellentmondásmentes, akkor a Bolyai és Lobacsevszkij által felfedezett úgynevezett hiperbolikus geometria is az.




1. ábra

ismerős jelenség mellett – a szemléletünk számára furcsának tűnő összefüggések is fennállnak. A háromszög szögeinek összege például kevesebb, mint 180 fok. Nem létezik az euklideszi geometriából ismert hasonlóság (ha itt két alakzat hasonló, akkor biztosan egybevágó is!), de még csak az sem igaz, hogy ha két egyenes mindegyike párhuzamos egy harmadikkal, akkor egymással is biztosan párhuzamosak.

Mindezekkel együtt az elmélet összeállt, és Bolyai Jánosnak az *Appendix*ben leírt – és nagyon tömören megfogalmazott – eredményeiből az is kiderült, hogy az euklideszi rendszer a hiperbolikus geometria határhelyzetének tekinthető. Az általa levezetett képletekben ugyanis szerepel egy univerzális állandó (Bolyai *i*-vel jelölte), amelyet a későbbi matematikusok a tér görbületét leíró szám reciprokaként azonosítottak (és ma többnyire *k*-val jelölnek), és ha ezt az *i* (vagy *k*) értéket minden határon túl növeljük, matematikai nyelven „a végtelenhez tartunk vele", egyre jobban közelítünk az euklideszi térhez. Érdemes hangsúlyozni, hogy Bolyai – Lobacsevszkijtől eltérően, az általa tárgyalt módnál általánosabban – valójában az úgynevezett abszolút geometriát állította a középpontba, amely a párhuzamossági axióma bármely formájának mellőzésével, tehát az Euklidész által bevezetettnél kevesebb előfeltevésből építhető fel. Meghatározott olyan összefüggéseket, amelyek a párhuzamossági axióma felhasználása nélkül bizonyíthatóak, vagyis amelyek az ő szóhasználatával abszolút igaznak tekinthetők, illetve olyanokat is, amelyek csak az euklideszi vagy csak a hiperbolikus geometriában érvényesek. Az előbbit ő Σ-rendszernek, az utóbbit S-rendszernek nevezte.

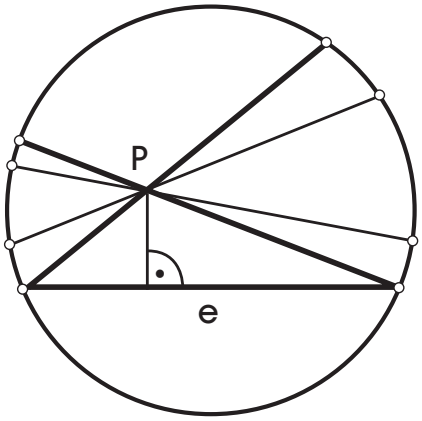
Mivel nem a várt módon járt el, és nem a mások által várt eredményre jutott, kortársai csak évtizedekkel később ismerték fel, hogy munkájával – és Lobacsevszkij valamivel hamarabb közismertté vált munkáival – végérvényesen megoldódott a „parallelák problémája" is: mivel az euklideszi párhuzamossági axióma tagadása is összeegyeztethető a többi axiómával, hiábavaló fáradság a párhuzamossági axiómának a többi axiómából való levezetésével próbálkozni. Találó Weszely Tibor paradox megfogalmazása: „az akkori tudományos világ már megérett a nem euklideszi geometria kidolgozására, de befogadására még nem" (Weszely 1981, 58. o.). A 19. századi matematikusok és a mai érdeklődők meggyőzésében is jelentős szerepe volt és van annak, hogy találtak számos olyan modellt, amelyben a hiperbolikus geometria axiómái érvényesek.

Egy ilyen modell megértéséhez tisztázni kell, hogy bár Euklidésznek, Bolyainak és e sorok olvasójának is volt, illetve van elképzelése arról, hogy mi a pont, az egyenes, a sík vagy egy pontnak egy egyenesre való illeszkedése és hasonlók, ezeket a matematikában nem definiált alapfogalmaknak, illetve közöttük fennálló relációknak tekintjük. Ha ezt elfogadjuk, vagyis lemondunk arról, hogy ezen fogalmak csak olyan módon lennének értelmezhetőek, ami megfelel a mindennapos szemléletünknek és szóhasználatunknak, akkor nem csak értelmetlen formalizmus a következő: tekintsük „sík"-nak az euklideszi sík egy körét a határvonal nélkül, „pont"-nak a kör hagyományos értelemben vett pontjait, „egyenes"-nek pedig a „hagyományos egyenesek" körön belüli darabjait (vagyis a kör húrjait, értelemszerűen a végpontjaik nélkül) *(2. ábra)*.

Világos, hogy ebben a rendszerben teljesülnek olyan alapállítások, mint például hogy két ponton át egy és csak egy „egyenes" húzható, de az is könnyen belátható, hogy ha adott egy „egyenes" és egy rajta kívüli pont, akkor azon át végtelen sok olyan „egyenes" húzható, amelyik nem metszi az eredetit. Ebben a rendszerben tehát nem érvényes az euklideszi párhuzamossági axióma, és ezzel a rendszerrel a hiperbolikus geometria úgynevezett Cayley–Klein-féle modellje definiálható. Ebben természetesen a megszokottól eltérő módon kell értelmezni két pont távolságát és ebből következően a szögeket is. Ezek megfelelő definiálásával azonban a témában elmélyedők számára a hiperbolikus geometria furcsaságait mégiscsak szemléletessé tevő rendszer adható meg.

A nemeuklideszi geometriákról szólva a teljesség kedvéért ki kell térnünk még egy kérdésre, nevezetesen arra, hogy az euklideszi párhuzamossági axiómának lehetséges-e olyan helyettesítése, miszerint egy egyenesen kívüli ponton át egyetlen olyan egyenes sem húzható, amelyik párhuzamos lenne az eredetivel. Természetesen meg lehet fogalmazni ezt az esetet is, amelyben tehát bármelyik két egyenes metszi egymást, de kimutatható, hogy így más problémába ütközünk, mint a hiperbolikus geometriánál: ez a fajta „tagadott" párhuzamossági axióma ugyanis ellentmondásban van a többi euklideszi axiómával. Ezen az úton, mint azt az 1850-es években Riemann megmutatta, úgy lehet továbblépni, ha a többi euklideszi axiómán is módosítunk valamit. Így építhető fel egy másik fajta nemeuklideszi rendszer, az úgynevezett elliptikus geometria, amelynek legismertebb modellje a szférikus (gömbi) geometria.

Ha megértjük, hogy létezik többféle geometria, természetesen rögtön felmerül a kérdés, hogy a fizikai valóságként létező térben melyik az igaz közülük. Annak, hogy ez a kérdés valóságos kérdéssé vált, önmagában óriási természettudományi, filozófiai és talán mondhatjuk, hogy teológiai jelentősége van. Az utóbbi kapcsán nemcsak arra lehet utalni, hogy a skolasztikusok érveléseiben hangsúlyos szerepe van az euklideszi geometriának (Aquinói Szent Tamás szövegeiben több ilyen utalást, hivatkozást találhatunk, például amikor kijelenti, hogy Isten nem teheti meg, „hogy az egyenes vonalú háromszögnek nem két derékszöggel egyenlő a három szöge"),[13] hanem arra is, hogy a nemeuklideszi geometriára építő 20. századi fizikának a tér szerkezetéről és az idő anyaghoz kötöttségéről megfogalmazott állításai milyen összefüggésben lehetnek a keresztény világképpel (vö. Vankó 1987). Bár Bolyai az *Appendix* végén bizonyítás nélkül jelenti csak ki, hogy egyéb feltevés nélkül nem lehet eldönteni, hogy a Σ- vagy az S-rendszer az igaz, eredményei egyértelműen megváltoztatták a tér geometriai szerkezetéről való gondolkodás lehetőségét. Sőt, a hagyatékában megtalált egyik feljegyzése szerint megsejtette a gravitáció és a tér szerkezete közötti kapcsolatot, így tulajdonképpen a fizika geometrizálásának egyik előfutáraként is tekinthetünk rá. Végül a 20. századi fizika, leginkább Einstein relativitáselmélete tette a nemeuklideszi geometriákat, elsősorban a Riemann-féle differenciálgeometriát a formális elméleti rendszereknél többé, a fizikai valóság leírásának eszközévé. A modern fizika álláspontja szerint ugyanis a gravitáció révén fizikai terünk kozmikus méretekben görbült, aminek leírása éppen a nemeuklideszi geometriával valósítható meg.



2. ábra

Bolyai és Lobacsevszkij munkásságának a geometriára és a fizikára való közvetlen és közvetett hatása mellett ki kell emelni az axiomatikus gondolkodás fejlődésére vonatkozó jelentős hatását is. Azzal, hogy a geometriát is az absztrakt elméletek világába helyezték, lökést adtak olyan későbbi kutatásoknak is, amelyek a matematika különböző területeinek axiomatizálására, illetve az axiomatizálás metaszintű megközelítésére irányultak. Az axiomatikus gondolkodás lehetőségeinek korlátaira mutatott azonban rá a 20. századi matematika egyik híres tétele, amely szerint minden „valamirevaló", vagyis viszonylag általános feltételeknek eleget tevő axiómarendszeren belül megadható olyan probléma, ami ebben az axiómarendszerben eldönthetetlen. Ezt az episztemológiai összefüggései miatt is különösen jelentős tételt első változatában Gödel osztrák matematikus bizonyította. Bár ő általánosan adott példát ilyen eldönthetetlen problémára, konkrét példaként a híres euklideszi V. posztulátum is felhozható a Bolyai-féle abszolút geometriát meghatározó szűkített axiómarendszerben.

Befejezésként a félreértések elkerülése érdekében néhány gondolat arról, hogy mennyiben tekinthető relevánsnak Bolyai Jánosra nézve tanulmányunk – Babits *Bolyai* című szonettjéből kölcsönzött – címe: *Istennel osztozó.* Bolyai

[13] „[...] sequitur quod contraria horum principiorum Deus facere non possit: sicut [...] quod triangulus rectilineus non habeat tres angulos aequales duobus rectis." (*Summa contra gentiles,* lib. 2, cap. 25, n. 14)

világképét alapvetően apja tanítása határozta meg. A református Bolyai Farkas gondolkodását döntően befolyásolták a francia enciklopédisták, és ezt adta tovább fiának is. Bolyai János kimondottan racionális elme volt, a tudás nagy tisztelője, akinek gondolkodásában az igazság keresése és kimondása mindig a középpontban állt. Benkő Samu megfogalmazása szerint „[r]omantikus zaklatottság és sztoikus megnyugvás ellentétének egységéből rajzolódik ki Bolyai János szellemi arca" (Benkő 1978, 370. o.). Kortársai állítólag ateistának tartották, amit azonban még a Bolyai életét és gondolatait kimondottan osztályharcos szellemben tárgyaló Alexits György is cáfolt (vö. Alexits 1977, 120. o.). Személyes istenhitére való utalásokkal nem találkozunk a hagyatékából már megismert anyagokban, de az *Üdvtan*ban az Istenről szóló tant is ki akarta dolgozni, feljegyzései szerint leginkább valamiféle panteista változatban. Az apjának írt, már idézett híres kifejezését („semmiből egy új, más világot teremtettem") sem szabad blaszfémiának tekinteni, sem pedig egy huszonegy éves ifjú zseni túltengő önbizalmának, hanem az alkotó ember igazi örömének. Ez pedig az ő istenképe mellett és egy sokkal személyesebb Istenben hívő tudós számára is az Isten teremtő, alkotó munkájában való részesedés érzéseként értelmezhető. Ezt a boldog részesedést azonban nemcsak tudósok, hanem művészek is sajátjuknak érezhetik, sőt kitüntetett pillanatokban talán bárki.

## Hivatkozott művek


Alexits György 1977. *Bolyai János világa.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Benkő Samu (vál.) 1975. *Bolyai-levelek*. A német nyelvű leveleket ford. B. Fejér Gabriella. Kriterion Kiadó, Bukarest.

Benkő Samu 1978. *Apa és fiú. Bolyai-tanulmányok*. Magvető Könyvkiadó, Budapest.

Dávid Lajos 1979. *A két Bolyai élete és munkássága*. 2., bőv. kiad. Gondolat Kiadó, Budapest.

Kiss Elemér 1999. *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából*. Akadémiai Kiadó – Typotex Kiadó, Budapest.

*Korunk* 2002. november. (Bolyai-kultusz 2002 – Kultuszok)

Prékopa András – Kiss Elemér – Staar Gyula – Szenthe János (szerk.) 2004. *Bolyai-emlékkönyv. Bolyai János születésének 200. évfordulójára.* Vince Kiadó, Budapest.

Tanács János 2008. *Ami hiányzik Bolyai János Appendixéből – és ami nem. A Bolyai-féle „parallela" rekonstrukciója*. L'Harmattan Kiadó, Budapest.

*Természet Világa* 2003. I. különszám.

Tóth Imre 2000. Geometria more ethico. Az euklideszi és a nem-euklideszi geometria alternatívája Arisztotelésznél és az euklideszi geometria axiomatizálása. Ford. Flaskó János. In uő: *Isten és geometria*. Osiris Kiadó, Budapest, 39–135. o.

Vankó Péter 1987. A teológia és a XX. századi fizika kapcsolata. *Diakonia,* 2. 52–61. o.

Weszely Tibor 1981. *Bolyai János matematikai munkássága*. Kriterion Könyvkiadó, Bukarest.

Weszely Tibor 2002. *Bolyai János. Az első 200 év.* Vince Kiadó, Budapest.

Ittzés András az ELTE matematikus szakán 1990-ben, a KGRE mentálhigiéné szakirányú továbbképzési szakán 2007-ben végzett. Doktori fokozatot 1999-ben a Kertészeti és Élelmiszeripari Egyetemen szerzett. Egyetemi docens, alkalmazott matematikusként statisztikai elemzésekkel foglalkozik. 2006 óta a kelenföldi evangélikus gyülekezet felügyelője.