Tanulmány

A KVANTUMELMÉLET ÉS A HUZAT LOGIKÁJA

Szabó Gábor

tudományos főmunkatárs,
MTA Bölcsészettudományi Kutatóközpont Filozófiai Intézet
szabo.gabor@btk.mta.hu

Andrei Khrennikov, svéd–orosz tudományfilozófus a közelmúltban egy paviai konferencián arról beszélt, hogy a kvantumelmélet nemcsak a mikrovilág folyamatait képes leírni, hanem a kognitív folyamatok ábrázolásához is nagyszerű eszközt szolgáltat. Állítását azzal igyekezett alátámasztani, hogy a kognitív folyamatokban a valószínűség klasszikus törvényei pontosan ugyanúgy sérülnek, ahogyan a kvantumelméletben. Jelen dolgozat ennek az összevetésnek csupán a második felére kíván összpontosítani, arra, hogy valóban sérülnek-e a valószínűség klasszikus törvényei a kvantumelméletben.

A teljes valószínűség tétele és a kétréses kísérlet

Khrennikov és munkatársai (2014) példaként a klasszikus, kolmogorovi valószínűség-számítás egyik tételét, az ún. teljes valószínűség tételét hozza fel. A tétel egy egyszerű példán így szemléltethető: a szemüvegesek valószínűsége (aránya) egy populációban egyenlő a szemüvegesek aránya a lányok között szorozva a lányok arányával a teljes populációban plusz a szemüvegesek aránya a fiúk között szorozva a fiúk arányával: $p(\mathrm{Sz}) = p(\mathrm{Sz}|\mathrm{L})\, p(\mathrm{L}) + p(\mathrm{Sz}|\mathrm{F})\, p(\mathrm{F})$. A tétel a valószínűségelmélet axiómáiból és a feltételes valószínűség definíciójából egyszerűen következik. Khrennikovék azt állítják, hogy ez a tétel nem áll fenn a kvantumelméletben.

Azt állítani, hogy egy matematikai tétel sérül egy fizikai elméletben, önmagában kényes kérdés; a formalizmusban szereplő fogalmak körültekintő interpretációját előfeltételezi. Khrennikov a tétel sérülését a kvantumelmélet egyik jól ismert példájával, a kétréses kísérlettel illusztrálja. A kísérlet rövid leírása a következő: egy fényforrást egy ernyőtől elválasztanak egy lemezzel, amelybe két apró rést vágnak. A rések egyenként zárhatók és nyithatók. A kísérletet három módon végzik el: az első esetben csak az egyik rést hagyják nyitva, mondjuk a jobb oldalit, a második esetben csak a bal oldali rést, a harmadik esetben pedig mindkettőt. A kísérlet során a fényforrás által a réseken keresztül az ernyőn hagyott fénymintázatot figyelik meg. A kísérlet eredménye: az ernyő egy adott helyére eső fény intenzitása a harmadik esetben, tehát mindkét rés nyitott állapota esetén *nem azonos* az első két esetben megfigyelt intenzitások összegével.

A kétréses kísérlet a 19. század egyik nevezetes kísérlete, amelynek révén bizonyítást nyert a fény interferenciája és ezzel hullámtermészete. Két nyitott rés esetén az intenzitásmintázat azért lesz különböző az egyréses esetektől, mivel a két résen át érkező hullámok interferálnak, azaz az ernyő különböző pontjain erősítések és gyengítések lépnek fel. A kvantumelmélet születésével a kétréses kísérlet ismét az érdeklődés középpontjába került, mivel értelmezése nehézséget jelentett *Albert Einsteinnek* a fény részecsketermészetére vonatkozó 1905-ös hipotézise alapján. Ha ugyanis a fény részecskékből áll, akkor ezek a részecskék, a fotonok, a forrástól az ernyőig csak a két rés valamelyikén keresztül juthatnak el. Ha a fotonok egyesével járják végig útjukat a kísérleti berendezésben – ahogyan ezt a mai technológia lehetővé teszi –, akkor az, hogy egy adott foton az egyik résen keresztül áthaladva az ernyő egy adott pontjára csapódik-e, független kell hogy legyen attól, hogy a másik rés nyitva van-e vagy sem. Ellenkező esetben nem beszélhetnénk a fény részecsketermészetéről, legalábbis a klasszikus értelemben nem. Ebből viszont az következik, hogy az az intenzitásmintázat, amelyet az egyik résen áthaladó fotonok rajzolnak ki az ernyőn, nem változhat attól függően, hogy a másik rés nyitva van-e vagy sem. Két nyitott rés esetén azonban a fotonok vagy a jobb oldali, vagy a bal oldali résen haladnak át. Tehát a két nyitott rés esetében adódó intenzitásmintázatnak meg kell egyeznie az egyréses mintázatok valamilyen súlyozott összegével, ahol a súlyokat az szabja meg, hogy a jobb, illetve bal oldali résen mennyi foton halad át. Ez tehát az elméleti jóslat, amely a fény részecsketermészetéből következik a kétréses kísérletre nézve. Ezt a következtetést azonban a tapasztalat nem erősíti meg: az elvégzett kísérlet szerint a kétréses mintázat *nem* az egyréses mintázatok ún. konvex kombinációja.

Sérül-e a teljes valószínűség tétele a kétréses kísérletben?

De hogyan viszonyul mindez a teljes valószínűség tételéhez? A valószínűség empirikus értelmezéséhez először egy statisztikus sokaságot kell választanunk. Legyen a statisztikus sokaságunk a két nyitott résen át az ernyőre érkező fotonok halmaza! Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy valamelyik foton az ernyőnek egy meghatározott, szintén A-val jelölt területére csapódik be! Jelölje $p(\mathrm{A})$ ennek az eseménynek a valószínűségét, vagyis az adott területre érkező fotonok arányát (relatív gyakoriságát) a forrás által kibocsátott összes fotonhoz képest. Jelölje J és B azt az eseményt, hogy egy adott részecske a jobb, illetve a bal oldali résen halad át. A teljes valószínűség tétele ekkor azt mondja, hogy egy elegendően nagy statisztikus sokaságot véve az A területre becsapódó fotonok $p(\mathrm{A})$ aránya egyenlő a $p(\mathrm{A}|\mathrm{J})\times p(\mathrm{J}) + p(\mathrm{A}|\mathrm{B})\times p(\mathrm{B})$ összeggel. Itt $p(\mathrm{A}|\mathrm{J})$, illetve $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ a jobb, illetve bal oldali résen áthaladó fotonok közül az A területre becsapódók arányát jelöli, $p(\mathrm{J})$, illetve $p(\mathrm{B})$ pedig a jobb, illetve bal oldali résen áthaladó fotonok arányát jelenti a teljes statisztikus sokaságon belül.

Fennáll-e a teljes valószínűség tétele a fenti értelemben? Erre a kérdésre egyszerűen nem tudunk választ adni, mivel a $p(\mathrm{A}|\mathrm{J})$, $p(\mathrm{J})$, $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ és $p(\mathrm{B})$ valószínűségek egyike sem határozható meg empirikusan. Azt, hogy hány részecske ment át a jobb oldali résen, sem kísérletileg nem tudjuk megfigyelni, sem a kvantumelmélet nem szolgáltat erre nézve információt. Játsszunk el azonban a gondolattal, hogy bár a fotonok útját nem ismerjük, azok mégiscsak léteznek, vagyis osszuk fel a fotonokat a jobb és bal oldali résen áthaladókra, valamint az A területre, illetve az A területen kívül becsapódó fotonokra. Mindaddig, amíg ezekről a felosztásokról nem tudunk semmit, nem tudhatjuk, hogy a teljes valószínűség tétele teljesül-e. Ellentmondásra csak akkor jutunk, ha feltételezzük, hogy a $p(A|J)$ feltételes valószínűség ebben a statisztikus sokaságban ugyanaz, mint a $p(A)$ valószínűség abban a *másik* statisztikus sokaságban, amelyben csak a jobb oldali rés van nyitva. Vagyis, hogy az A területre becsapódó fotonok valószínűsége ugyanakkora, ha csak a jobb oldali rés van nyitva, mint ha mindkét rés nyitva van, és a fotonok a jobb oldali résen haladnak át. Épp ez volna a foton részecsketermészetéből fakadó feltételezés, amely azonban empirikusan nem ellenőrizhető. Így a teljes valószínűség tételének esetleges sérülése nem a kvantumelméletből következik, hanem a kvantumelmélet és egy, a fotonok mozgására vonatkozó klasszikus kép amalgámjából.

De próbáljuk meg kiküszöbölni a spekulatív elemeket a gondolatmenetből, és megvizsgálni, hogy a teljes valószínűség tétele vajon sérül-e a tisztán empirikusan ellenőrizhető kvantumelméleti predikciók körében. Ennek érdekében változtassuk meg J és B jelentését úgy, hogy a fenti valószínűségek empirikusan ellenőrizhetők legyenek. J és B most tehát ne azt jelentse, hogy az illető foton a jobb, illetve a bal oldali résen haladt át, hiszen a foton pályája megfigyelhetetlen, hanem jelentse azt, hogy a jobb, illetve a bal oldali rés nyitva van. Pontosabban J jelentse azt, hogy a jobb oldali rés nyitva, és a bal oldali rés zárva van, míg B azt, hogy a bal oldali rés van nyitva és a jobb oldali rés zárva. Kérdés: a J és B ilyen interpretációja mellett sérül-e a $p(A) = p(A|J) \times p(J) + p(A|B) \times p(B)$ teljes valószínűség tétele?

Ehhez először tisztázni kell, hogy mi is az a statisztikus sokaság, amelyen a fenti formula értelmezve van. Ahhoz, hogy az egyenlet jobb oldali kifejezéseinek értelme legyen, egy olyan statisztikus sokaságot kell vennünk, amelyben $p(J){:}p(B)$ arányban keverednek azok a kísérleti futamok, amelyekben csak a jobb oldali, illetve csak a bal oldali rés van nyitva. A teljes valószínűség tétele tehát azt mondja, hogy az A területre érkező fotonok aránya *ebben a statisztikus sokaságban* a két részsokaság megfelelő valószínűségeinek súlyozott aránya lesz. Ez a jóslat azonban pontosan egybe fog vágni a kísérletekkel, a teljes valószínűség tétele teljesülni fog.

Vegyük észre, hogy a fenti összefüggés jobb oldalán álló $p(A)$ kifejezésnek ugyanarra a statisztikus sokaságra kell vonatkoznia, mint az összefüggés bal oldalának. Vagyis $p(A)$-t nem lehet úgy interpretálni, mint az A területre érkező fotonok arányát két nyitott rés esetén. E téves interpretáció mögött legtöbbször a következő gondolatmenet áll: a p(A) valószínűség nem más, mint a $p(A|J \vee B)$, vagyis a statisztikus sokaság úgy jellemezhető, mint a J és B események *diszjunkciója.* Az az esemény, hogy két rés van nyitva, ezen elképzelés szerint annak a két eseménynek a diszjunkciója tehát, hogy csak a jobb oldali, ill. csak a bal oldali rés van nyitva. Vagyis a teljes valószínűség tételének bal oldalát nyugodtan interpretálhatjuk úgy, hogy az a két nyitott réssel elvégzett kísérletet jelenti. És erre az interpretációra a tétel valóban sérülni fog.

Az az esemény azonban, hogy két rés van nyitva, *nem diszjunkciója* a J és B eseményeknek, mivel a J esemény nemcsak azt mondja, hogy a jobb oldali rés nyitva van, hanem egyúttal azt is, hogy a bal *zárva* van. Hasonlóan B esemény egyszerre állítja, hogy a bal oldali rés nyitva és hogy a jobb oldali rés *zárva* van. A két esemény diszjunkciója tehát nem lehet az az esemény, hogy a két rés nyitva van. Ez már abból a körülményből is kitűnik, hogy a *nyitott* és *zárt* teljesen szimmetrikusan szerepel a J és B eseményekben. A $(J \vee B)$ esemény éppoly kevéssé lehet a *mindkét rés nyitva van* esemény, mint a *mindkét rés zárva van* esemény. A $(J \vee B)$ esemény egyszerűen a J és B eseményeknek megfelelő statisztikus részsokaságok egyesítéséből adódik.

Összefoglalás

Khrennikov álláspontja, amely szerint a valószínűség klasszikus törvényei sérülnek a kvantumelméletben, nem egyedülálló, és nem is előzmények nélküli. Richard Feynman a kvantumelmélet pályaintegrálos megfogalmazásához a klasszikus valószínűség fogalmát az ún. valószínűségi amplitúdókkal helyettesítette (Feynman - Hibbs, 1965). Lépését éppen azzal indokolta, hogy a teljes valószínűség tétele, amelyet ő egyszerűen csak $P_{12} = P_1 + P_2$ módon jelölt, a kvantumelméletben nem teljesül. Ezt a tényt pedig Feynman éppen a kétréses kísérlettel szemléltette. Feynman valószínűségi amplitúdói visszamennek a kvantumelmélet kezdetéig, amikor is a hullámfüggvény Born-féle valószínűségi interpretációja, illetve a szuperpozíció jelensége együttesen kétségeket támasztott a klasszikus valószínűségi fogalmak kvantumelméleti használhatóságában. A klasszikus valószínűség törvényeinek sérüléséről szóló elképzelésnek tehát szép múltja van, és a kezdetektől fogva ösztönzőleg hatott a különféle matematikai elméletekre (nemkommutatív valószínűség-számítás), illetve filozófiai interpretációkra (kontextuális értelmezés).

Érdekes volna megvizsgálni, hogy melyek is voltak azok a kulturális és szociológiai hatások, amelyek a fizikusok és filozófusok első és második nemzedékének gondolkodását és kifejezésmódját mondhatni szisztematikusan egy, a hagyományokkal dacosan szakító forradalmi retorika felé terelték. A kvantumelmélet nyilván sok ponton eltért a klasszikus fizikától, de a klasszikus valószínűség, a klasszikus logika, a kauzalitás törvénye szinte magától értődő megkérdőjelezése nyilván nem indokolható pusztán az empíria nyomásával. A századelő sajátos kulturális miliője, a weimari Németország sajátos atmoszférája (vö. Cushing, 1994) is kellett hozzá, hogy a statisztikus fizikában egy évszázadig jó szolgálatot tévő klasszikus valószínűség-elmélet érvényességét hirtelen kétségbe vonják. A kétréses kísérlet önmagában azonban ugyanúgy nem szolgáltatott okot a valószínűség törvényeinek, köztük a teljes valószínűség tételének feladásához, ahogyan abból a két tényből, hogy (1.) ha a szobám mindkét ablaka nyitva van, akkor huzat van, és (2.) ha csak a jobb vagy a bal oldali, akkor nincs huzat, senki sem vonná le azt a következtetést, hogy a $(J \vee \neg H) \vee (B \vee \neg H)$ Þ $(J \vee B) \vee \neg H$ logikai törvény sérül, azaz a huzat ne követné a klasszikus logikát.

Kulcsszavak: *kvantumelmélet, valószínűség, teljes valószínűség tétele, kétréses kísérlet*

IRODALOM

Cushing, James T. (1994): *Quantum Mechanics: Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony*, Chigaco: The University of Chigaco Press

Feynman, Richard P. – Hibbs, Albert R. (1965): *Quantum Mechanics and Path Integrals.* New York: McGraw-Hill Book Company

Khrennikov, Andrei – Basieva, I. – Dzhafarov, E. N. – Busemeyer, J. R. (2014): *Quantum Models for Psychological Measurements: An Unsolved Problem. PLOS ONE*. 9(10), e110909 DOI: 10.1371/journal.pone.0110909 • http://tinyurl.com/hz7edhh