MODELLEK MATEMATIKÁN INNEN ÉS TÚL

András Ferenc

informatikai osztályvezető
The Regional Environmental Center for Central and Eastern Europe
ferenc@andrasek.hu

Mint a legtöbb köznapi beszédben használt kifejezés, a *modell* szó is a képlékeny, sokértelmű szavak közé tartozik. Különféle dolgok különféle kapcsolatát fejezzük ki a *modell* szó különféle használatával: a festő vagy szobrász és modellje közötti viszony, ami rokon a mostani vizsgálódás irányával; egy épülő városrész makettje és a majdan felépült város közötti kapcsolat, vagy egy hajómodell vagy modellvasút és a hajó vagy mozdony közötti hasonlóság az a reláció, ami kiindulópontul szolgál. A planetárium vagy a műanyag csontváz valamilyen szempontból hasonlít a Naprendszerhez, illetve az emberi testhez, és az előbbiek vizsgálata valamilyen szempontból célszerűbb, vagy az egyedüli lehetőség, szemben az utóbbi dolgokéval. Például mielőtt a hajót megépítjük, a modellje segítségével ellenőrizhetjük, hogy vajon úszni fog-e a vízen. Azonkívül megvizsgálhatjuk, hogy miképp módosítsuk kissé a hajótest formáját, hogy kisebb fogyasztással gyorsabban haladjon A terepasztal segíthet megérteni a pályaudvar forgalomirányítását, a planetárium pedig megmutathatja, hogy milyen égboltot láttak eleink kétezer évvel ezelőtt. Ezen példák esetén szemléletesen átlátható, hogy miben és miért hasonlít a modell a valóságra.

Vannak azonban egyáltalán nem szemléletes hasonlóságok is, melyek ugyanakkor mégis fontosak. Ilyen például, hogy egy adott tömegű melegedő test vagy egy rugókból, tömegekből álló rezgő rendszer viselkedése hasonlít, és ez alapján modellálható, ellenállások, kondenzátorok és induktivitások, valamint az elektromosságtan törvényei segítségével. Ennek a hasonlóságnak a belátása azon alapul, hogy a különféle fizikai jelenségeket leíró matematikai egyenletek struktúrája megegyezik. A megegyezés úgy látható be, hogy az elektromos és mechanikai vagy hőtani fizikai jellemzőket kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük egymásnak. Ilyen módon pusztán az elektromos jelenségek világán belül vizsgálódva előre láthatjuk mechanikai vagy hőtani jelenségek lefolyását. Ez sokszor jóval olcsóbb és egyszerűbb, mint az eredeti mechanikai vagy melegedő rendszer tanulmányozása. Az utóbbi modellek már nem szemléletesek és nem is érthetőek kellő matematikai műveltség nélkül.

Mindazonáltal az eddigi példáknál a modellek és azok, amit modellálnak, egyaránt élőlények vagy élettelen tárgyak voltak. A ‘modell’ szónak van azonban fontos, más értelmű használata is. Amikor arról tanulunk, hogy a klasszikus mechanika és a speciális relativitáselmélet egyaránt modellje az inerciarendszerekben történő mechanikai mozgásoknak, csak az utóbbi szélesebb sebességtartományban és pontosabban írja le az eseményeket, akkor itt fizikai elméleteket tekintenek modellnek, nem pedig kézzelfogható tárgyakat, mint a korábbi példák során. Itt a modell egy szellemi alkotás, egy matematikai struktúra fizikai értelmezéssel ellátva, mint olyan eszköz, amely adott pontossággal segít előrelátni, hogy mi fog történni a valóságban. Itt tehát a modell és a modellezett közötti viszony, egy matematikai nyelven megfogalmazott elmélet – azaz jelek struktúrája –, és a fizikai jelenségek egy köre – azaz a jeleken kívüli világ – közötti viszony.

Ennek a viszonynak a fordítottját is használjuk. A számítógépekben és háztartási gépekben használt digitális automaták olyan áramköröket és kapcsoló rendszereket tartalmaznak, melyek közül némelyeket *logikai áramkörnek* neveznek. Az elnevezés alapja szintén egy hasonlóság. Ezek az áramkörök két kitüntetett állapot alapján működnek: magas és alacsony feszültségszint, illetve folyik vagy nem folyik áram. A kitüntetett állapotokat az igaz és hamis logikai értékeknek megfeleltetve, működésük hű tükörképe a matematikai logikában használatos igazságfüggvényeknek, a bonyolultabbak pedig a matematika egyik ágának, a véges automaták elméletének.

De nemcsak a diszkrét állapotú áramkörök tekinthetők egyes matematikai struktúrák fizikai modelljeinek. Bonyolult differenciálegyenletek közelítő megoldását segítheti a matematikai egyenlet modellálása analóg számológépek segítségével. 2005 tavaszán nagy vita dúlt a HIX magyar nyelvű internetes fórumon arról, hogy az ilyen analóg eszközök számítógépeknek tekinthetők-e. A mi szempontunkból ez most mindegy, ami lényeges, hogy amikor analóg rendszereket matematikai problémák megoldásának a keresésére használunk, akkor fizikai rendszereket tekintünk úgy, mint elméleti problémák modelljeit. Ez a helyzet akkor is, ha valamely közgazdaságtani elméletet vagy tanítási módszert kipróbálnak a gyakorlatban, mielőtt széleskörűen bevezetik.

Foglaljuk össze egy táblázatban az eddigieket. A vízszintes sorban szerepel a modell anyagi (fizikai) vagy szellemi jellege, míg a függőleges oszlopokban a modellálandó objektum anyagi vagy szellemi mivolta. *(lent)*

Mint látható, három esetet vettünk sorra eddig, egy hely üresen áll. A táblázat nem tartalmazza a fejlett élőlények túlélést elősegítő idegrendszeri hálózatát, mert ezek nem tudatos emberi alkotások eredményei. Ugyanakkor ezek az idegrendszeri hálózatok is a környezet modelljeinek tekinthetők, mivel képesek a környezetben előforduló, az élőlény számára fontos tárgyak, jelenségek összefüggéseinek leképezésére.

Az élőlények, különösen az ember és az emberi gyakorlat alkotta teoretikus tudomány modellek segítségével ismeri meg a világot. Ezek a modellek a mindennapi élet és

x modellje y-nak	anyagi (élő vagy élettelen)	szellemi
anyagi (élő vagy élettelen)	1	1
szellemi	1	

1. táblázat

a tudományos gyakorlat rostáján hullanak ki vagy akadnak fenn további felhasználás végett, de soha nem azonosak a valósággal. Talán Kant volt az első filozófus, és utána sokáig senki, aki ha mégoly archaikus nyelven és csak homályosan, de megértette a modern elméleti tudományok modellalkotó gyakorlatát. Az ő *szintetikus apriori ítélet* fogalmának ez egy lehetséges értelmezése.

Végül csak egy lehetőség maradt a modellek és tárgyaik kapcsolatát tekintve az, amikor a modell is és annak tárgya is a matematika világán belül marad. Ezt néhány egyszerű példávall részletesebben is megvizsgálom.

Az egyszerűség kedvéért vegyünk egy mindössze háromelemű halmazt: H={a,b,c} Képezzük e halmaz összes részhalmazainak halmazát, melyet jelöljünk P(H)-val. P(H)= {Ø, {a}, {b}, {c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}. Mint látható, éppen 8 részhalmazunk van, ami nem meglepő, mert $2^3 = 8$. A részhalmazok halmazán meghatározunk három, a halmazelméletből ismert műveletet, nevezetesen az egyesítést: ∪, a metszetet: ∩, és a H-ra vonatkoztatott komplementer halmazt: ¬. Utóbbi úgy is tekinthető, mintha H-ból kivonnánk P(H) egy elemét. Az alábbi táblázatok mutatják az összes lehetséges esetet.

x	Ø	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
¬x	{a,b,c}	{b,c}	{a,c}	{a,b}	{c}	{b}	{a}	Ø

egyesítés

∪	Ø	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
Ø	Ø	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
{a}	{a}	{a}	{a,b}	{a,c}	{a,b}	{a,c}	{a,b,c}	{a,b,c}
{b}	{b}	{a,b}	{b}	{b,c}	{a,b}	{a,b,c}	{b,c}	{a,b,c}
{c}	{c}	{a,c}	{b,c}	{c}	{a,b,c}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b,c}	{a,b}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}
{a,c}	{a,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,c}	{a,b,c}	{a,b,c}
{b,c}	{b,c}	{a,b,c}	{b,c}	{b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{b,c}	{a,b,c}
{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}	{a,b,c}

metszet

∩	Ø	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
{a}	Ø	{a}	Ø	Ø	{a}	{a}	Ø	{a}
{b}	Ø	Ø	{b}	Ø	{b}	Ø	{b}	{b}
{c}	Ø	Ø	Ø	{c}	Ø	{c}	{c}	{c}
{a,b}	Ø	{a}	{b}	Ø	{a,b}	{a}	{b}	{a,b}
{a,c}	Ø	{a}	Ø	{c}	{a}	{a,c}	{c}	{a,c}
{b,c}	Ø	Ø	{b}	{c}	{b}	{c}	{b,c}	{b,c}
{a,b,c}	Ø	{a}	{b}	{c}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{a,b,c}

Figyeljük meg a következő érdekes összefüggéseket. Bármely x eleme P(H)-ra igazak: Ø∩x=Ø; Ø∪x=x; {a,b,c}∩x=x; {a,b,c}∪x={a,b,c}; ¬Ø={a,b,c}; Ø=¬{a,b,c} A táblázatokkal ellenőrizhető a következők igazsága is: ¬x∩x=Ø ; ¬x∪x={a,b,c}

Vessük össze az előző példát a logikából jól ismert VAGY ; ÉS valamint NEM igazságfüggvényekkel. Legyen I = igaz; H = hamis.

Nem:

x	H	I
~x	I	H

Vagy:

$\vee$	H	I
H	H	I
I	I	I

És:

&	H	I
H	H	H
I	H	I

Az előző példához hasonló összefüggéseket találunk most is: H&x=H ; H$\vee$x=x ; I&x=x ; I$\vee$x=I ; ~H =I; H = ~I

Itt is érvényes egy a korábbihoz hasonló igazság: ~x&x=H ; ~x$\vee$x=I

Könnyen belátható, hogy az előző példában szereplő Ø jelnek itt a H, a {a,b,c} halmaznak az I, a $\neg$, $\cap$, $\cup$ műveleteknek pedig rendre a ~ , & , $\vee$ műveletek felelnek meg.

Nézzünk egy ehhez hasonló érdekes kapcsolatot az aritmetika és az igazságfüggvény logika között! Legyen Z az egész számok halmaza, A pedig atomi állítások egy halmaza. Ezek olyan tovább már nem elemzett kijelentő mondatok, melyek egyértelmű igazságértékkel jellemezhetők. Feltételezésük hasonló szerepet játszik a logikában, mint a pontok a geometriában. Legyen *f* egy A értelmezési tartományú és Z értékkészletű olyan függvény, melyre három feltétel teljesül:

A1. minden atomi állításhoz egy egész számot rendel, de különböző atomi mondatokhoz különböző számokat rendel;

A2. ha egy p atomi állítás igaz, akkor és csak akkor a hozzá rendelt x szám kettőnél nagyobb prímszám;

A3. ha p atomi mondathoz x szám, a q atomi mondathoz y szám tartozik, és p-nek tagadása (negációja) q, akkor fennáll a következő egyenlőség: x=-y+1. *(lent)*

Használni fogom az egész számok halmazán értelmezett „páros" tulajdonságot, amit a „modulo" függvénnyel fejezek ki. Ez a függvény az egész számok osztási maradékának abszolút értékét adja meg. Tehát valamely x számra 1=mod(x,2), ha az x szám páratlan, és 0=mod(x,2), ha x páros. Ezek szerint a „három" szám és a „mínusz három" szám is egyformán páratlan, tehát 1=mod(3,2) és 1=mod(-3,2). Páros számok esetén a kettővel való osztási maradék nulla, tehát 0=mod (-12,2) és 0=mod(4,2). A mindennapi életben gyakran találkozunk a „modulo" függvény használatával. Ilyenek a hagyományos mutatós órák vagy a hét napjai, illetve az évek hónapjai. Az órák például az órákban mért eltelt idő tizenkettővel vagy huszonnéggyel való osztási maradékát mutatják, míg a hét napjai az időtartam napokban mért számának héttel való osztásának felelnek meg.

Az állításlogikában használatos igazságfüggvényeknek aritmetikai műveleteket feleltetek meg, és az ennek megfelelően a lefordított formulák értékelésekor nem igazságértékeket,

Példák: érték = f (állítás)

Érték	Állítás	érték	Az állítás tagadása
-12	1≠1	11	1=1
7	A hó fehér.	-8	A hó nem fehér.
-4	Szókratész nem bölcs	3	Szókratész bölcs.
5	Minden ember halandó.	-6	Valamely ember halhatatlan.

hanem egész számokat használok. Az *igaz* és *hamis* logikai értékeknek az egész számok páratlan vagy páros tulajdonsága felel meg, igaz=páratlan, hamis=páros. Az igazságfüggvények aritmetikai fordításakor csak néhány elemi aritmetikai műveletet használok: összeadást, kivonást, szorzást és a modulo függvényt. Az alábbi táblázat mutatja az igazságfüggvényeket (logikai funktorokat) egy sorban a nekik megfelelő aritmetikai kifejezéssel.

Igazságfüggvények, argumentumaik mondat paraméterekkel kitöltve	Magyarázat	Az igazságérték aritmetikai megfelelője, ahol p és q értékei egész számok lehetnek.
~p	Negáció (a tagadás jele)	mod(-1*p – 1, 2)
p & q	és Konjunkció (‘és’ kapcsolat)	mod(p*q, 2)
$p \vee q$	Alternáció (megengedő értelmű vagy)	mod(1+(p+1)*(q+1), 2)
$p \nabla q$	Kizáró értelmű vagy (vagy … vagy …)	mod(p+q, 2)
$p \supset q$	Kondicionális (ha…akkor…)	mod(1+p+p*q, 2)
$p \equiv q$	Bikondicionális (akkor és csak akkor)	mod(-1*(p+q)-1, 2)

Ha jó ez a modell, akkor annak alapján bármely igazságfüggvény formulát lefordíthatunk aritmetikai kifejezéssé, és így a logikai igazságokból aritmetikai igazság válik. Lássunk egy példát. Annak a logikai igazságnak, hogy „p v ~p" az az aritmetikai állítás felel meg, hogy bármely p egész számra $1-p^2-p$ páratlan szám. Ez átalakítva azt kapjuk, hogy 1-p*(p+1), ami mindig páratlan szám.

Láttunk három példát három hasonló struktúrára. Miben áll ez a hasonlóság? A három struktúrában három egymásnak megfelelő műveletet találunk:

Unáris műveletek:[1] $\neg$, ~, -p – 1

Bináris műveletek: $\cap$, &, *

Bináris műveletek:[2] $\cup$, $\vee$, 1+(p+1)*(q+1)

Találunk hasonló elemeket is:

Egységelemek: {a,b,c} , I, 1

Zéruselemek: Ø, H, 0

Ezzel kölcsönösen egyértelműen megfeleltettük egymásnak a példákban szereplő alaphalmazokat és műveleteket. Jelöljük az egymásnak megfelelő unáris és bináris műveleteket rendre így: ', $\wedge$, $\vee$, a zéruselemet és egységelemet pedig így: 0 , e.

Ekkor azt mondhatjuk, hogy a Boole-féle algebrára adtunk meg három példát, ahol:

Boole-algebra = $\langle \mathbf{B}, ', \wedge, \vee \rangle$

B={0,e} és bármely $x \in B$ re $x \wedge x' = 0$ és $x \vee x' = e$

továbbá $x \wedge 0 = 0$ és $x \vee e = e$

[1] Aki ismeri a lambda operátor használatát, annak az utóbbit pontosabban így is kifejezhetjük: λx (–x–1)

[2] Utóbbi műveletnél megfelelne p + q + p*q is.

$\wedge$, $\vee$ kommutatív műveletek, azaz $x \wedge y = y \wedge x$ és $x \vee y = y \vee x$

azonkívül mindkét művelet disztributív a másikra nézve:

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ illetve $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

A korábbi három példa tehát a Boole-féle algebra egy-egy esete. A három példában szereplő műveletek egyforma eredményt adnak, ha eltekintünk az alaphalmazok egyedi sajátosságaitól. Az ilyen módon szoros hasonlóságot mutató struktúrákat egymással *izomorf* struktúrának nevezik.

Mire jó mindez? A modellek lehetővé teszik, hogy különféle nyelven fogalmazzuk meg ugyanazt a gondolatot. Amit nem értünk az egyik nyelven, esetleg jobban megértjük a másikon. A bevezetésben említettem, hogy bizonyos áramkörök úgy tekinthetők, mint egyes absztrakt matematikai struktúrák modelljei. Ilyenek a digitális elektronika logikai áramkörei. A következőkben ezeket fogom fölhasználni fizikai modell gyanánt. Két logikai rejtvényt vizsgálok meg. Mindegyikhez szerkesztek egy digitális elektronikai modellt, és fölhasználom az iménti aritmetikai fordítást is.

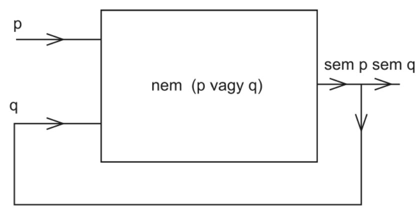
A maga korában nagy hatású középkori francia filozófustól, Jean Buridantól (1300–1358) származik a következő rejtvény, melynek lényege a következő.[3]

(p) Isten létezik.

(q) Sem (p) sem (q) mondat nem igaz.

Mit gondoljunk ennek a két mondatnak az igazságáról? Vajon melyik igaz közülük?

(q) ’vagy–nem’ kapcsolatot állít, mivel a „nem p és nem q” ekvivalens a „nem (p vagy q)” logikai struktúrával. A vagy-kapcsolat egyik összetevője egy létezési állítás, a másik összetevője pedig a vagy-kapcsolat önmaga. Különös mondat ez, mert igazságértéke – ha egyáltalán van neki – önmagától is függ. Ezért biztosan nem fordítható le a szokásos logikai keretek között. A ’vagy’ kapcsolat előbbi tagját képviselje ’p’, az utóbit pedig ’q’ formula. Tehát p=:Isten létezik, q=:Sem az első, sem a második mondat nem igaz. Tehát ’p’ igaz, ha Isten létezik, hamis más esetben, és ’q’ igaz, ha sem p, sem q nem igaz. Szemléletesen ezt úgy fejezhetjük ki, hogy |q|=|nem(p vagy q)|, ahol az azonosság két oldalán formulák igazságértékei (faktuális értékei) szerepelnek. Az alábbi elektronikai modell fejezi ki p és q mondat logikai kapcsolatát.



Visszacsatolással modelláltam q igazságértékének önmagától való függését. A p bemenet magas szintű, ha Isten létezik, a másikra pedig az automata kimeneti állapota kerül vissza. Ennek felel meg a „sem egyik, sem másik nem igaz” mondat. A vagy–nem igazságfüggvénynek a ’$(p+1)*(q+1)$’ az aritmetikai fordítása. Ekkor a visszacsatolást kifejezhetjük egy formulával. Legyen „$x \cong y$” kifejezés annak a jele, hogy $\mathrm{mod}(x,2) = \mathrm{mod}(y,2)$, azaz vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan. Ekkor az aritmetikai modell alapján lefordítva Buridan istenérvét az alábbi aritmetikai állítást kapjuk: $q \cong (p+1)*(q+1)$. Ennek csak akkor van megoldása, ha p páratlan, de q páros. Visszafordítva ezt az eredményt azt

[3] Az alábbi helyeken további részletek olvashatók: http://www.seop.leeds.ac.uk/entries/buridan/ http://www.anoca.org/he/ass/john_buridan.html

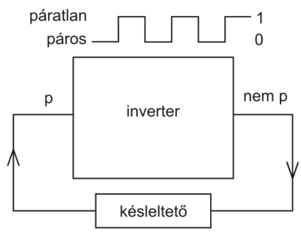
kapjuk, hogy (p) igaz, viszont (q) hamis kell hogy legyen, máskülönben ellentmondásba keveredünk. Pontosan ez derül ki az elektronikus modell kipróbálásával is. Ha p alacsony szintű, akkor nem kapunk stabil kimeneti jelet, a kimenet felváltva hol magas, hol alacsony szintű.

A közismert hazug paradoxonnak vegyük az alábbi megfogalmazását:

A bekeretezett mondat hamis.

Vajon igaz-e, amit a mondat állít? Ha igaz, akkor hamis, hisz éppen ezt állítja, ha viszont hamis, akkor az ellenkezője felel meg a tényeknek, s mégis igaz. Ezzel azonban viszszajutottunk a kiindulóponthoz, és vég nélkül körbe forgunk. A bekeretezett mondat tehát ha igaz, akkor hamis – hisz ezt állítja –, ha viszont elfogadjuk az állítását, hogy hamis, akkor az ellenkezőjét kell vennünk, tehát igaz.

Miképp modellálhatnánk ennek logikai szerkezetét? Vegyünk ismét egy fizikai modellt. A hagyományos villanycsengő a következő módon működik: ha a vezetéken átfolyik az áram, a csengő karja meghúz. Ha a csengő karja meghúz, megszakítja az áramkört, következésképpen nem folyik át áram a vezetéken. Ha nem folyik át áram a vezetéken, a csengő karja elenged, nem húz meg. Ha viszont nem húz meg, akkor záródik az áramkör, és az átfolyó áram hatására meghúz a relé. Ezek szerint ha a csengő karja meghúz, akkor nem húz meg, ám ha nem húz meg, akkor meghúz. Hasonlóan működnek az inverterből visszacsatolással fölépített generátorok is. Az inverter mindig az ellentettjét adja ki a bemenetére került jelnek. Ha magas szint kerül a bemenetére, akkor alacsony szintet ad ki, ha viszont fordítva, a bemenete alacsony szintű, akkor magas szintű a kimenete. Mindez természetesen időben lejátszódó folyamat. Mi történik, ha az inverter kimenetét visszavezetjük – egy jelkésleltető tag közbeiktatásával – a bemenetére? Ekkor felváltva hol magas, hol alacsony szintű kimenőjelet kapunk, nem jön létre állandó stabil állapot. Az alacsony szintet a páros, a magas jelszintet a páratlan értéknek megfeleltetve, az inverter páros értékre páratlant ad ki a kimenetén, és fordítva, páratlan értékre párosat.



A korábbi példához hasonlóan itt is az igazságértéket meghatározó ténynek tekintik magát az igazságértéket, egy szintre emelve azt, amiről szól a mondat és a mondat értékelését. Úgy is szokták ezt mondani, hogy nincs elválasztva ezeknél a példáknál (paradoxonoknál) a tárgynyelvi és a metanyelvi szint. Visszacsatoljuk a kimeneten lévő jelet a bemenetre, modellálva azt, hogy a bekeretezett mondat igazságértéke önmagától függ. Ezt az aritmetikai modellre fordítva láthatjuk, a ‚hazug'-nak megfelelő automatának akkor lenne időben konstans kimeneti állapota, ha találnánk olyan egész számot, amelyik páros és páratlan is. Csak ebben az esetben tudnánk megmondani, hogy a bekeretezett mondat igaz vagy hamis.

Kulcsszavak: *modellelmélet, paradoxon*