

tosan megszűnt. Ez alapján közelítőleg egy évben kimondottan csak a tavaszi óráátállításnak köszönhetően átlagosan 43 GWh értékkel csökken az országos villamosenergia-fogyasztás.

Hasonlóképpen számoltunk mind az 5 évben az őszi óráátállításnál mindegyik napra, majd a kapott értékek átlagát vettük. A számítások alapján az őszi óráátállítás utáni héten 2,14 GWh/nap átlagos fogyasztáscsökkenés adódott, ami körülbelül 5-6 hét alatt fokozatosan megszűnt. Ez alapján közelítőleg egy évben kimondottan csak az őszi óráátállításnak köszönhetően átlagosan körülbelül 41 GWh értékkel csökken a hazai villamosenergia-fogyasztás.

### Konklúzió

Kerekítve 100 GWh lehet országosan az óráátállítások miatt megtakarított villamos energia éves szinten. Viszonylag egyszerű becslésekkel sikerült tehát nagyságrendileg meghatározni az óráátállítások következtében jelentkező villamosenergia-megtakarítást. A becsléseink pontosságát fokozni lehetne, ha például

még hosszabb időszakot vizsgálnánk; az időjárási statisztikai adatok és a napi világos órák tényleges számának hatásával történő korrekciós módszert alkalmaznánk, illetve figyelembe vennénk, hogy mikor esnek ünnepnapok hétköznapra, vagy mikor vannak szombati munkanapok stb. Ez azonban már nagyon komplikált lenne.

### Összegzés

Az óráátállítások legfőbb indoka, hogy ezzel villamos energiát lehet megtakarítani. A hazai villamosenergia-fogyasztási adatok elemzése alapján a tanulókkal arra a megállapításra jutottunk, hogy statisztikailag tényleg van csökkenés az országos villamosenergia-fogyasztásban az óráátállítások miatt.

### Irodalom

MAVIR ZRt. honlapja: <https://www.mavir.hu/web/mavir/home>  
Központi Statisztikai Hivatal energiagazdálkodás: <https://www.ksh.hu/energiagazdalkodas>

## XVII. SZILÁRD LEÓ NUKLEÁRIS TANULMÁNYI VERSENY

### Beszámoló, II. rész

Sükösd Csaba  
BME Nukleáris Technika Tanszék

#### 6. feladat

kitűzte: Sükösd Csaba

Egy programozó egy számítógépes szimulációban a radioaktív izotóp bomlását nem a viszonylag hosszú számítási időt igénylő exponenciális függvénnyel szeretné kiszámítani. Mivel a szorzás sokkal gyorsabb számítógépes művelet, ezért arra gondol, hogy a szimulációban az aktivitás csökkenését úgy fogja figyelembe venni, hogy az éppen aktuális aktivitás értékét minden másodpercben egyszerűen megszorozza 0,98-dal.

a) Bizonyítsuk be, hogy ez is exponenciális bomlást modellez!

b) Hány másodperc lesz ezen izotóp felezési ideje?

c) Mennyivel kellene megszorozni másodpercenként (0,98 helyett) a mindenkorai aktivitást, hogy 10 perces felezési időt kapjunk?

#### Megoldás

a) Legyen az  $i$ -edik másodpercben az aktivitás  $a_i$ , és szorozzuk meg minden másodpercben  $k$ -val. (A konkrét példában  $k = 0,98$ ). Ekkor nyilván  $a_{i+1} = k a_i$ , vagy másképpen

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = k.$$

Az aktivitás egymás utáni értékei tehát mértani sorozatot alkotnak, mivel az egymást követő tagok hányadosa állandó. Ebből következően az  $n$ -edik időpillanatban meglévő aktivitás:  $a_n = a_0 k^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Ha az idő „egységét”  $\tau$ -val jelöljük (a példánkban 1 s, mert másodpercenként frissítünk), akkor az eltelt idő:

$$t = n\tau, \text{ azaz } n = \frac{t}{\tau}.$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk:

$$a(t) = a_0 k^{\frac{t}{\tau}}.$$

Innen már látszik, hogy az aktivitás valóban a  $t$  idő exponenciális függvénye.

b) Ahhoz, hogy a felezési időt is meg tudjuk mondani, a  $k$  „alapról” át kell térjünk  $\frac{1}{2}$  alapra. Azaz, úgy kell meghatározzuk a  $T$  felezési időt, hogy

$$a_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = a_0 k^{\frac{t}{\tau}}.$$

$a_0$ -val egyszerűsítve és mindkét oldalt logaritmálva:

$$\frac{t}{T} \lg\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{t}{\tau} \lg k.$$

Ebből  $T$  kifejezhető:

$$T = \tau \frac{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}{\lg k} = -\tau \frac{\lg 2}{\lg k}.$$

Az adatokat behelyettesítve adódik:

$$T = -1 \text{ [s]} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 0,98} = -1 \text{ [s]} \cdot \frac{0,301}{-0,00877} = 34,31 \text{ s.}$$

c) A 10 perces felezési idő 600 s. Ezért

$$600 \text{ [s]} = -1 \text{ [s]} \cdot \frac{\lg 2}{\lg k},$$

amiből

$$\lg k = -\frac{\lg 2}{600} = -0,00050172.$$

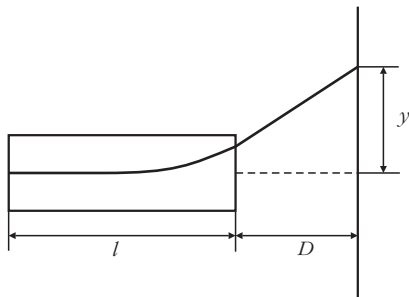
Ebből pedig kapjuk, hogy  $k = 0,998845$ .

7. feladat kitűzte: Ujvári Sándor

Amikor a radioaktivitást felfedezték, meg akarták határozni a sugárzást alkotó részecskék tulajdonságait. Marie Curie írja le azt a módszert, hogy kétféle, elektromos és mágneses térben térítették el a sugarakat, és a kétféle eltérítés adataiból ki tudták számítani az akkor még ismeretlen részecskék sebességét és a töltés/tömeg arányt. A rádium  $\alpha$ -sugárzásának tulajdonságait Des Coudres mérte meg.

Az alábbi mérési adatok felhasználásával határozzuk meg az alfa-részecske kiinduló sebességét és fajlagos töltését! (Az  $\alpha$ -részecske tömegét és töltését adatként nem lehet felhasználni, mert akkor még nem ismerték.)

Adatok: az elektromos eltérítés kísérleti elrendezése: légüres térben elhelyezett kondenzátorlemezek között, a lemezekkel párhuzamosan haladó sugárzást a kondenzátortól  $D = 0,5 \text{ m}$  távolságban a lemezekre merőlegesen elhelyezett fotólemezen detektálták.



A kondenzátorlemezek  $l = 10 \text{ cm}$  hosszúságúak voltak, a térerősség a lemezek között  $E = 10^6 \text{ N/C}$ , az eltérítés nagysága  $y = 9,7 \text{ mm}$ . A mágneses eltérítésnél a  $B = 0,2 \text{ T}$  mágneses indukciójú mezőben az  $\alpha$ -részecske pályájának sugara  $r = 1,7 \text{ m}$  volt.

Megoldás

Először határozzuk meg az elektromos eltérítés mértékét! A részecskére ható erő  $F = qE$ , az  $y$  irányú gyorsulás

$$a_y = \frac{qE}{m},$$

a részecske a lemezek között

$$t_1 = \frac{l}{v_0}$$

ideig repül, az  $y$  irányú eltolódás lemezek közötti része:

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{qE}{2m} \left( \frac{l}{v_0} \right)^2,$$

sebessége  $y$  irányban:

$$v_y = a_y t_1 = \frac{qEl}{m v_0}.$$

Innen egyenletesen, egyenes vonalban halad a részecske, mert nincs rá ható erő.

Határozzuk meg ezen repülés idejét!

$$t_2 = \frac{D}{v_0},$$

innen az ez idő alatti további eltolódás:

$$y_2 = v_y t_2 = \frac{qElD}{m v_0^2}.$$

Az elektromos tér által okozott összes eltolódás:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = \frac{qE}{2m} \left( \frac{l}{v_0} \right)^2 + \frac{qElD}{m v_0^2} = \\ &= \frac{qEl}{m v_0^2} \left( \frac{l}{2} + D \right). \end{aligned} \quad (1)$$

A mágneses tér által eltérített részecske pályasugara kiszámításához használjuk a

$$q v_0 B = \frac{m v_0^2}{r},$$

összefüggést, amiből

$$r = \frac{m v_0}{B q}. \quad (2)$$

Fejezzük ki a fajlagos töltést (1)-ből:

$$\frac{q}{m} = \frac{y v_0^2}{El \left( \frac{l}{2} + D \right)}$$

és (2)-ből is:

$$\frac{q}{m} = \frac{v_0}{B r}.$$

A kettőt egyenlővé téve az  $\alpha$ -részecske kezdeti sebessége:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{El \left( \frac{l}{2} + D \right)}{B r y} = \frac{10^6 \cdot 0,1 \cdot \left( \frac{0,1}{2} + 0,5 \right)}{0,2 \cdot 1,7 \cdot 9,7 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 1,67 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

A fajlagos töltés:

$$\frac{q}{m} = \frac{v_0}{B r} = \frac{1,67 \cdot 10^7}{0,2 \cdot 1,7} = 4,91 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

## I. kategóriájú feladatok

**8. feladat** kitűzte: Sükösd Csaba  
Tekintsük a párkeltés jelenségét, amikor egy gamma-foton elektron-pozitron párt kelt, miközben önmaga megszűnik. Bizonyítsuk be, hogy ha csak ezt a három részecskét (foton, elektron, pozitron) tekintjük, akkor nem teljesíthető egyszerre az energia- és lendületmegmaradás!

*Megoldás*

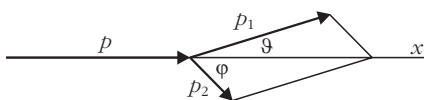
Első pillanatban úgy látszik, hogy a megmaradási tételek kielégíthetők, mivel a végállapotban két részecske (elektron és pozitron) keletkezik, és ezek keletkezési szöge(i) újabb paraméter(ek), ami miatt az egyenletrendszer „elvileg” megoldható. Nézzük azonban meg közelebbről! A lendületmegmaradás miatt a  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  vektoregyenletnek teljesülnie kell, azaz a három részecske lendületvektorai vektorháromszöget alkotnak. Ez azt jelenti, hogy egy síkba is esnek. Koordináta-rendszerünket válasszuk úgy, hogy a  $z$ -tengely merőleges legyen erre a síkra, ekkor valamennyi vektor  $z$ -koordinátája nulla, azaz csak  $x$ - és  $y$ -koordinátájuk lesz. A foton lendületének abszolút értéke legyen

$$p = \frac{h f}{c},$$

és ez a lendületvektor mutasson az  $x$ -tengely irányába. A keletkezett elektron-pozitron pár eredő lendületének is ekkorának kell lennie, emiatt az eredő lendület  $y$ -tengely irányú vetülete nulla kell legyen.

A lehető legáltalánosabb esetben nem használjuk ki a két keletkező részecske szimmetriáját, azaz nem tételezzük fel, hogy a bejövő irányhoz képest szimmetrikusan keletkeznek.

Legyen az egyik részecske lendületének abszolút értéke  $p_1$ , a lendületvektor  $x$ -tengellyel bezárt szöge  $\vartheta$ . A másik részecskéé  $p_2$ , az  $x$ -iránnyal bezárt szöge pedig  $\varphi$  (lásd *ábra*).



A lendületmegmaradás egyenletei tehát: az  $y$ -irányú vetületekre

$$p_1 \sin \vartheta = p_2 \sin \varphi,$$

az  $x$ -irányú vetületekre pedig

$$p = p_1 \cos \vartheta + p_2 \cos \varphi. \quad (1)$$

Az energiamegmaradás (relativisztikus képletekkel számolunk):

$$p c = \sqrt{(p_1 c)^2 + (m c^2)^2} + \sqrt{(p_2 c)^2 + (m c^2)^2}.$$

Szorozzuk be az (1) egyenletet  $c$ -vel, és  $pc$ -t helyettesítsük be az energiamegmaradás egyenletének bal oldalába:

$$\begin{aligned} p_1 c \cos \vartheta + p_2 c \cos \varphi &= \\ &= \sqrt{(p_1 c)^2 + (m c^2)^2} + \sqrt{(p_2 c)^2 + (m c^2)^2}. \end{aligned}$$

Látható, hogy ez az egyenlet semmilyen feltételek mellett sem teljesíthető, hiszen  $m > 0$  miatt az egyenlet jobb oldala mindenképpen nagyobb, mint  $p_1 c + p_2 c$ , az egyenlet bal oldala pedig bármely szögek esetén kisebb vagy egyenlő, mint  $p_1 c + p_2 c$ .

Ezzel bebizonyítottuk, hogy semmilyen módon sem lehetséges az energia- és lendületmegmaradást egyszerre teljesíteni. A valóságban csak úgy mehet végbe párkeltés, ha egy „negyedik” partner – az atommag is jelen van, és átvesz lendületet (valamint elhanyagolható nagyságú energiát).

**9. feladat** kitűzték: Radnóti Katalin, Kis Dániel Péter  
A béta-bomlás során elektronok lépnek ki az atommagból. Régen azt gondolták, hogy ezek az elektronok teljesen benne voltak korábban is az atommagban.

a) Mutassuk meg a dobozbazárt-elektron modell alapján, hogy ez nem lehetséges! Adjunk becslést egy, az atommag mérettartományába eső dobozba ( $a \approx 10^{-14}$  m) zárt elektron mozgási energiájára!

b) Legfeljebb mekkora lehet  $a$ , hogy a bezárt elektron mozgási energiája egy pozitron-elektron párt tudjon keltetni? Lehetne-e ennél kisebb tartományba lokalizálni az elektront?

*Megoldás*

Az  $a$  oldalhosszúságú dobozba zárt elektron helykoordinátáinak bizonytalansága  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = a/2$ . A Heisenberg-féle határozatlansági reláció alapján a lendületbizonytalanság:

$$(\Delta p)^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2 \geq 3 \frac{\hbar^2}{a^2}.$$

a) A kapott képlet alapján az atommag-tartományú dobozban lévő elektron bezártságából eredő mozgási energia:

$$E_{kin} = \sqrt{(c \Delta p)^2 + m^2 c^4} - m c^2 = 34,68 \text{ MeV}.$$

Az elektron nem vesz részt az erős kölcsönhatásban. A Coulomb-kölcsönhatás erősségére pedig a következő egyszerű meggondolást tehetjük: atomi méretekben ( $10^{-10}$  m) a Coulomb potenciális energiák nagyságrendje abszolút értékben  $10 \cdot Z$  [eV]. Mivel  $Z < 100$ , ez azt jelenti, hogy még a legnagyobb rendszámú atomban is az elektronok kötési energiája keV nagyságrendű. A Coulomb potenciális energia  $1/r$ -rel arányos, ezért az atommag méretében ( $10^{-14}$  m) nagyságrendben ez (abszolút értékben) tízezerszeresére növekszik. Azaz  $\sim 10$



A hasadási termékek radioaktivitása miatt az aktuális maghasadás után, valamikor később  $8+7 = 15$  MeV energia szabadul fel. Ez a teljes energia  $15/195 = 7,7\%$ -a. Miután a reaktor már „elég hosszú ideje” működik, ezért feltehetjük, hogy a hasadási termékek aktiválásában már beállt a radioaktív egyensúly (azaz ugyanannyi keletkezik a hasadások során, mint amennyi elbomlik a radioaktivitása miatt). Ezért a 2000 MW hőteljesítményhez ezek is hozzájárulnak. Emiatt a reaktor leállítása után azonnal az ezekből származó hőteljesítmény még megmarad. Vagyis legfeljebb  $7,7\%$ -nyi, azaz  $154$  MW hőteljesítményre kell számítsunk.

### 9. feladat

kitűzte: Radnóti Katalin

a) Mekkora azon foton energiája, frekvenciája, hullámhossza, amely a H-atom harmadik gerjesztett állapotának alapállapotba történő legerjesztésekor keletkezik?

b) Mekkora sebességgel lökődik hátra a kezdetben nyugodalomban lévőnek tekintett atom a foton kibocsátásakor? Mekkora mozgási energiát kap ezáltal?

Megoldás

a) A hidrogénatomot  $n = 4$ -ről kell legerjesztetni  $m = 1$ -re, azaz az alapállapotba. A Rydberg-formula szerint

$$\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

ahol  $R_H = 1,097 \cdot 10^7$  1/m, a Rydberg-állandó. Ebből a foton frekvenciája

$$\begin{aligned} f &= c R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= 3,289 \cdot 10^{15} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 3,08 \cdot 10^{15} \text{ Hz}, \end{aligned}$$

míg hullámhossza

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3,08 \cdot 10^{14}} = 9,74 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

A foton energiája pedig

$$E = hf = 2,04 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

b) A visszalökődött atom lendülete megegyezik a fotonéval

$$p = \frac{h}{\lambda} = m_H v_H,$$

így annak sebessége

$$v_H = \frac{h}{\lambda m_H} = 4,25 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

míg mozgási energiája

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_H v_H^2 = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J}.$$

### 10. feladat

Milyen régen üzemelhetett Oklóban a természetes reaktor, ha tudjuk, hogy ma a természetes urán  $0,7202\%$ -át alkotja a  $^{235}_{92}\text{U}$ -ös izotóp, a láncreakcióhoz pedig  $3\%$ -os  $^{235}_{92}\text{U} : ^{238}_{92}\text{U}$  arány kell?

Adatok:  $T_{1/2}^{235} = 7,038 \cdot 10^8$  év,  $T_{1/2}^{238} = 4,468 \cdot 10^9$  év.

Megoldás

Az egyszerűség kedvéért 5-ös és 8-as alsó index jelöli az egyes izotópokhoz tartozó értékeket. A nukleáris bomlás egyenlete a két izotópra:

$$N_5(t) = N_5(t_0) 2^{-\frac{t}{T_5}},$$

$$N_8(t) = N_8(t_0) 2^{-\frac{t}{T_8}}.$$

A feladat szövege megadta a felezési időket és a korabeli  $N_5(t_0)/N_8(t_0) = 3\%$  arányt. Ma a természetes uránban a  $^{235}$ -ös izotóp részaránya  $0,7202\%$ , azaz  $N_5/(N_5+N_8) = 0,7202\%$ . Ebből következik, hogy  $N_5/N_8 = 0,7202/(100-0,7202) = 0,72542\%$ . Ez a lépés nem okoz komoly numerikus eltérést, de elvi jelentősége van! Ha valaki  $0,7202\%$ -kal számolt tovább, azt csak akkor fogadta el a Versenybizottság, ha megindokolta, hogy ez nem sokban tér el a tényleges értéktől.

Mivel a két időpontban vett izotóparány adott, ezért praktikus a két bomlásegyenletet elosztani egymással:

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_5(t_0)}{N_8(t_0)} 2^{t\left(\frac{1}{T_8} - \frac{1}{T_5}\right)}.$$

Itt minden mennyiség ismert, csak  $t$ -re kell megoldani az egyenletet:

$$t = \frac{\frac{\log x}{\log 2}}{\frac{1}{T_8} - \frac{1}{T_5}}, \text{ ahol } x = \frac{\frac{N_5(t)}{N_8(t)}}{\frac{N_5(t_0)}{N_8(t_0)}}.$$

Itt megjegyezzük, hogy tetszőleges alapú logaritmus használható, ami a legkényelmesebben rendelkezésre áll a számológépen.  $x$  értékében az uránizotóp-arányok hányadosa szerepel, tehát hagyhatjuk az arányokat százalékban, ezzel  $x = 0,2418$  és így  $\log x / \log 2 = -2,0481$  (bármilyen logaritmussal).

Az idő mértékegységét a felezési idő mértékegysége határozza meg – az  $(1/T)^{-1}$  miatt –, ezért legpraktikusabb milliárd évben számolni. Ezzel az idő számértéke

$$t = \frac{-2,0481}{\frac{1}{4,468} - \frac{1}{0,7038}} = 1,711.$$

Mivel a felezési idő milliárd évben volt, ezért az eredményt is abban kapjuk. Tehát az izotóparányok alapján az oklóli természetes reaktor  $\sim 1,71$  milliárd éve üzemelhetett.

Folytatjuk.