

Nagyon jó dolgunk volt mellette. Naprakész volt a fizika legújabb eredményeivel. Elvárta, hogy kikérjük véleményét szakmai kérdésekben, hogy kérdezzük a fizika legfrissebb eredményeiről, tanácsot kérjünk kirándulásaink, utazásaink megszervezéséhez. Nem tudtunk olyat kérni, amiben ne segített volna.

Mellette tanultam meg kirándulást, túrát szervezni. Ez többnyire abból állt, hogy mindent elintézt, nekem csak alá kellett írnom a papírokat. Mindig vonattal utaztunk, nem szeretett buszozni. Miután felszálltunk a vonatra, mindenkinek a helyén kellett ülni a vonat indulásáig. Azoknak is, akik nem tartoztak hozzánk. Emiatt szóltam neki, de azt mondta, abból nem lehet baj, ha nyugton maradnak.

A túrákon ragaszkodott ahhoz, hogy ő menjen elől, ő diktálja a tempót. Senkinek nem volt szabad megelőznie. Én voltam a sorban az utolsó. Feltűnő színű pulóverben vagy dzsekiben kellett túráznom, hogy messziről is tudja ellenőrizni, senki nem maradt le, nem került

mögém. Nagyon féltette a gyerekeket. Mindig arra gondolt, mit mondunk a szülőknek, ha valami baj történik.

Volt egy ötnapos hátizsákos túránk a Zemplénben, Sárospataktól Füzéren és Telkibányán keresztül Regécig. Laktunk árvízvédelmi szükségesszállón, turistaházban és pajtában, széna közt. Utaztunk teherautón, de legtöbbit gyalog, végig a gerincen. Mikor már senkinek nem volt innivalója, hátizsákjából elővarázsolt pár doboz konzerv-üdítőt, összeadta térfogatukat, elosztotta az osztálylétszámmal, majd egy mérőhenger segítségével igazságosan szétosztotta a gyerekek között. Volt, amikor szendvicset kaptunk tőle, volt úgy, hogy mi láttuk el édességgel. Nagyon édesszájú volt.

Tanítás vagy túrázás közben sokszor gondolok arra, vajon meg lenne-e elégedve velem. Hálás vagyok a sorsnak, hogy tőle tanulhattam, mellette válhattam tanárrá.

Sebestyén Zoltánné

Jedlik Ányos Gimnázium, Budapest

A FIZIKA TANÍTÁSA

FIZIKAI KETTŐSINGA VIZSGÁLATA

Kaotikussá váló mechanikai síkmozgás egy példája

Békéssy László István, Bustya Áron

Szent László Általános Művelődési Központ, Baja

*A fizikusok valahogy így szeretnek gondolkodni:
„Ezek és ezek a feltételek: mi fog most történni?”*

Richard P. Feynman

A fizikai törvények jellege (Magvető, 1983)

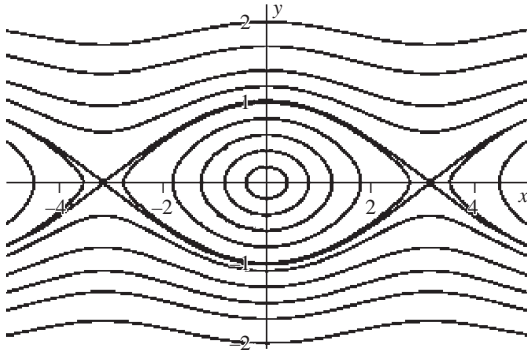
Nagyon sok természettudományos törvény differenciálegyenletek segítségével van leírva. Ha ezeket meg tudnánk oldani, akkor lehetőségünk lenne arra, hogy a kapott függvény segítségével megmondjuk, hogy egy adott tetszőleges időpillanatban a jövőben mi lesz a rendszer állapota. Am nagyon sok esetben ez lehetetlen, és ezért vagyunk képtelenek megjósolni a jövőt. Megadható egy egyszerű feltétel, mely a bonyolult mozgás létrejöttéhez szükséges. Ez a rendszer *nemlinearitása*. Lineáris rendszerben a következmények egyenesen arányosak a kiváltó okkal. Általában azonban a *következmény nem egyenesen arányos a kiváltó okával*, hanem annak bonyolultabb függvénye. A rugóban ébredő erő például arányos a megnyúlással, ha az kicsi, de nagyobb megnyúlás esetén az egyenes arányosságnál gyorsabban nő. *A káosz tehát a nemlineáris rendszerek időbeli viselkedése*. Mivel szinte minden rendszer ilyen, a káosz megjelenése *tipikus*. Ezen azt értjük, hogy a káosz lehetősége szinte minden nemlineáris rendszerben megvan. Az azonban, hogy ténylegesen megvalósul-e, a rendszer konkrét tulajdonságaitól és kezdeti helyzetétől is függ. A számítógépek elterjedésével az utóbbi két évtizedben

hirtelen megfoghatóvá és könnyen szimulálhatóvá váltak a kaotikus mozgás szokatlan sajátosságai.

Egyszerű mechanikai rendszer például egy inga (főnalinga, fizikai inga), melynek egyszerű az időbeli viselkedése: ha meglökjük, egy idő után nyilván megáll. Továbbra is egyszerű marad, ha az ingát játszótéri hinta módjára megfelelő időközönként gyengén lökdössük. Az inga valamely állapotának megadása mindössze két változó – a hely és a hozzá tartozó sebesség – ismeretét igényli. Márpedig, ha mindössze két állapotjellemzőre van szükségünk, akkor ezek értékeit egy síkbeli koordináta-rendszer tengelyeire felmérve az inga bármely állapotát egy *(fázis)síkbeli* ponttal, az inga mozgása során befutott állapotok összességét pedig valamilyen síkbeli alakzattal, görbével (*trajektória*) azonosíthatjuk.

A súrlódás következtében fokozatosan megálló ingának ekkor egy origóba tartó spirál, a hinta mozgásának pedig egy önmagába visszatérő – a periodicitást szemléletesen is megjelenítő – zárt görbe felel meg.

A fázistérbeli pályák a súrlódó inga esetében előbb-utóbb egy *(fix)pontban* kötnek ki, míg az ingaóra (hinta)



1. ábra. A súrlódásmentes fonálinga mozgásának fázissíkbeli képe

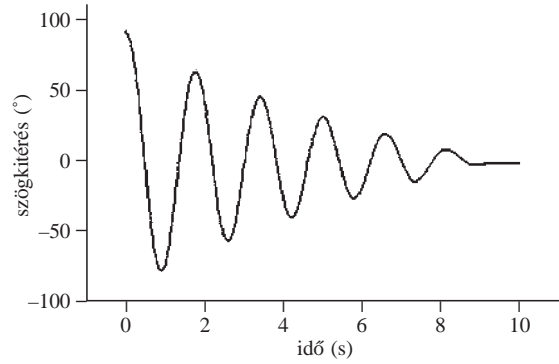
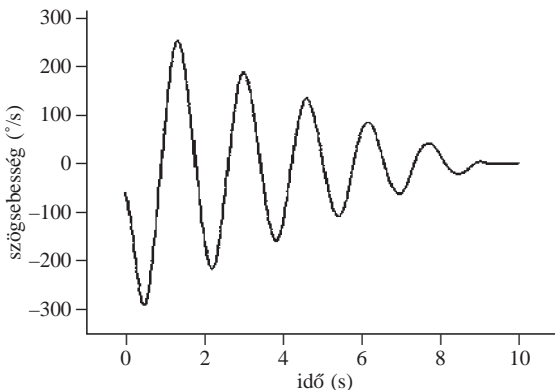
esetében lassan ráhúzódnak egy zárt görbére. Igazán egyszerű alakzatok – egy pont és egy zárt görbe – szemléltetik azokat az állapotokat, amelyek mintegy magukhoz vonzzák a különféle (lehetőleg közeli) kiinduló állapotokból elindított pályákat. A rendszer időbeli viselkedését ezért a továbbiakban éppen ezek az alakzatok, az úgynevezett *attraktorok* szerint osztályozhatjuk. Ha az attraktor egyetlen (fix)pontból áll, akkor a rendszer előbb-utóbb állandósult egyensúlyi állapotban, zárt görbe esetén pedig valamilyen periodikus mozgásnál köt ki. Az inga tehát kettős értelemben is egyszerűnek tekinthető. Egyrészt mert állapotát kevés, mindössze két változó jellemzi, másrészt mert időbeli viselkedése is egyszerű. Itt egyszerű szerkezetű attraktorokkal van dolgunk.

Valamely rendszer időbeli viselkedését attraktorának geometriai tulajdonságaival jellemezzük. Egyszerű attraktor egyszerű, bonyolult attraktor bonyolult dinamikát képvisel. Ha az ingát nem egy rúdra, hanem rugóra erősítjük, vagy másik ingára függesztjük föl, vagy gyengén lökdössük, esetleg magát a felfüggesztési pontot kezdjük vízszintesen rezgetetni, a rendszer továbbra is egyszerű marad, állapotát kevés változó írja le. A rendszer hosszú távú viselkedését meghatározó attraktorok azonban látványosan eltérnek az eddigi megszokottaktól.

Egyszerű fizikai inga mozgásáról

Egy fizikai inga kiterjedt méretű, és a fonálinga általánosításaként fogható föl. Példa lehet rá egy rúd, amely rögzített tengely körül forog súrlódásmentesen. Az egyszerű inga felfogható a fizikai inga speciális eseteként $I = ml^2$

3. ábra. A fizikai inga szögsebessége az idő függvényében



2. ábra. A 90 cm hosszú fizikai inga mozgásának szögkitérés–idő függvénye

tehetetlenségi nyomatékkal, ahol m a nehezék tömege, l a fonál hossza. A fizikai inga mozgásegyenlete a rá ható forgatónyomaték alapján (a súrlódást elhanyagolva):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \sin\theta = 0,$$

ahol I a tehetetlenségi nyomaték, θ a szögkitérés. Definiálva az inga

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

rezonanciafrekvenciáját, a mozgásegyenlet

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

egyszerűbb alakot ölt, melyet két elsőrendű differenciálegyenlettel írhatunk át:

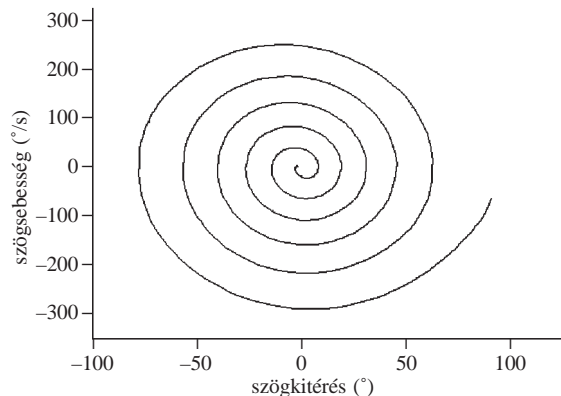
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 \sin x + f(y), \end{aligned}$$

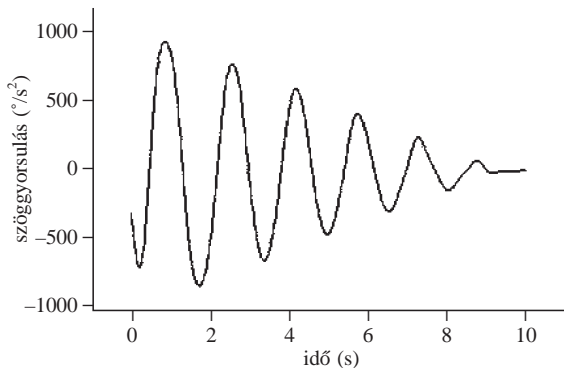
ahol $f(y)$ a súrlódásra jellemző tag, ennek alakját mérésünkénél a 7. ábrán láthatjuk. Ezek alapján megrajzolhatjuk a fázissíkbeli ábrát $f(y) = 0$ esetre (1. ábra).

Kis lengésekre használhatjuk a

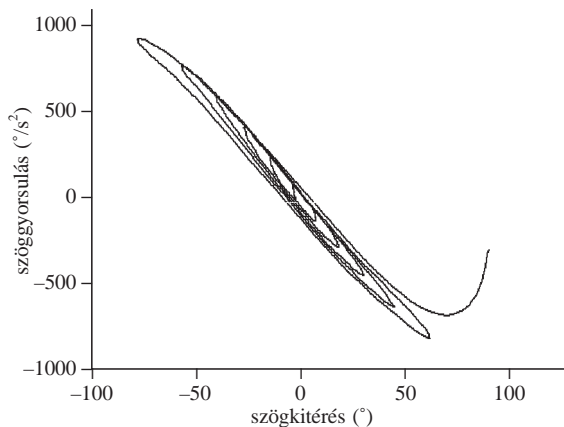
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \approx \theta$$

4. ábra. A súrlódásos fizikai inga fázissíkbeli ábrája. Jól látszik a (0;0) fixpont





5. ábra. A fizikai inga szöggyorsulása jelzi az ingára ható forgatónyomaték változását



6. ábra. Az egyszerű fizikai inga szöggyorsulása a szögkitérés szerint ábrázolva

és a mozgásegyenletre ilyenformán a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta \approx 0$$

közelítést. Ennek az egyenletnek van megoldása:

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega_0 t + \delta), \quad \text{ahol } \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}.$$

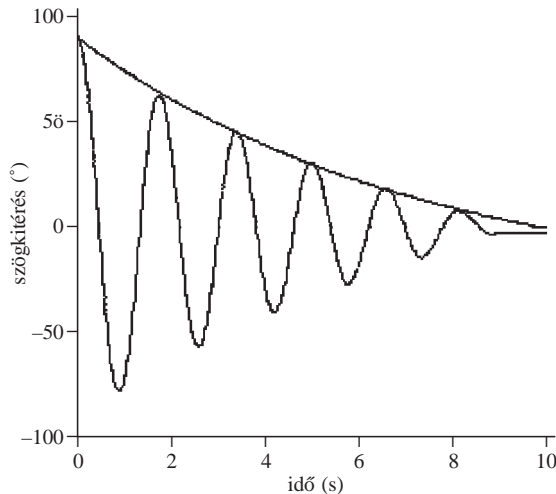
Ily módon a periódusidőre a szokásos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

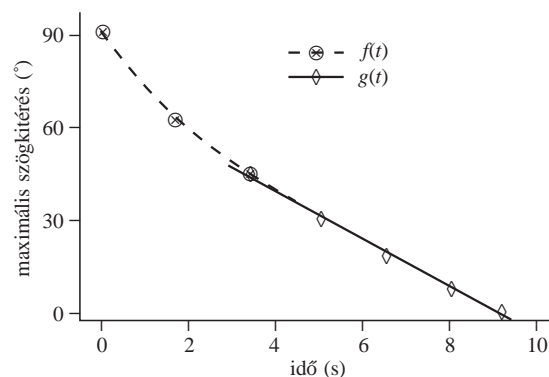
formula adódik.

A fizikai ingánk 90 cm hosszú rúd volt (a 30 és 60 cm-es karokból álló kettősingánknál átmenetileg egymáshoz erősítettük a két tengelyezett részt). Vizsgálataink a szögkitérés-idő (2. ábra), szögsebesség-idő (3. ábra) és a forgatónyomatékról is tájékoztatást adó szöggyorsulás-idő (5. ábra) összefüggésekre koncentráltak. Természetesen a közegellenállást és tengelysúrlódást nem tudtuk kiküszöbölni. A 4. ábra mutatja a fizikai inga mozgását a fázisikonon. A 6. ábrán a szöggyorsulást a szögkitérés szerint ábrázoltuk. Itt jól látszik a súrlódás hatása, mivel ugyanahhoz a szöghöz nem csak egy szöggyorsulás tartozik.

A 8. ábrán a maximális szögkitérés időbeli változása mutatja az ingára ható fékező erők alakulását. A mozgás



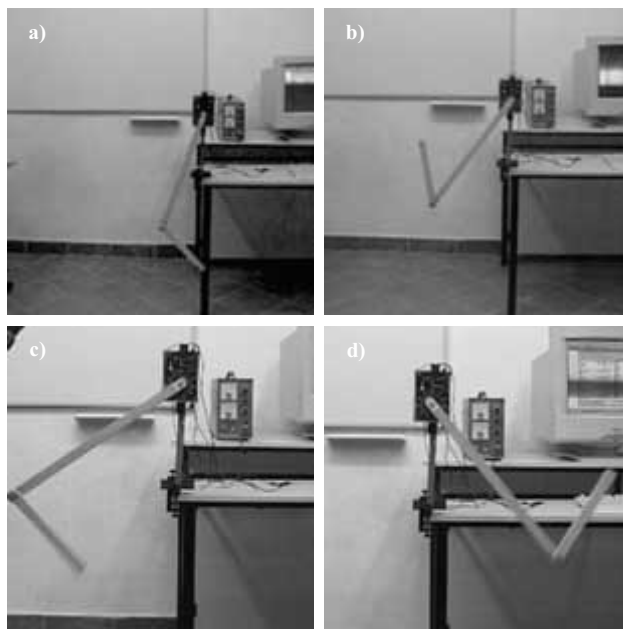
7. ábra. A szögkitérés csillapodása a mérés időtartama alatt (0–8 s) $y = 1,35 \exp(-0,14t + 4,5) - 31$ függvény szerint történt.

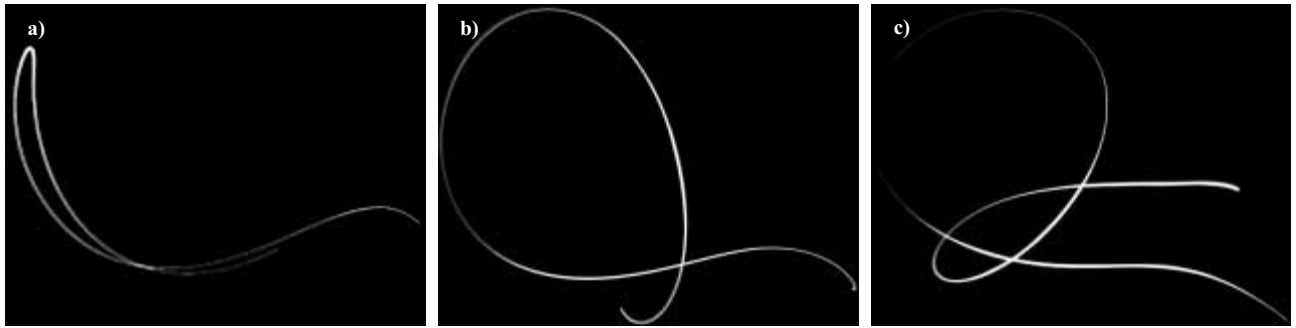


8. ábra. Az inga csillapodásának mérése. Jól látható, hogy a mozgás kezdeti szakaszán a közegellenállás a sebességgel arányos, míg a kisebb sebességeknél a tengelynél és a csuklónál fellépő súrlódás dominál

elején az inga sebessége még elég nagy ahhoz, hogy a sebességgel arányos közegellenállási erő fölülmúlja a tenger-

9. ábra. Az eszköz és a mérési elrendezés, valamint az elengedett inga mozgásának egy-egy fázisa





10. ábra. A mozgás valós térbeli pályái

lyeknél jelentkező sűrűlódást. Itt exponenciálisan csillapodik. A csillapodást az $f(t)$ függvény kitevőjében szereplő tényező jellemzi. A mozgás második szakaszán már a tengelysűrűlódás a nagyobb. Ennek értéke nem változik az idővel, ezért lineáris csillapodást jelent. A sűrűlódást jellemző tényező a $g(t)$ függvény meredeksége.

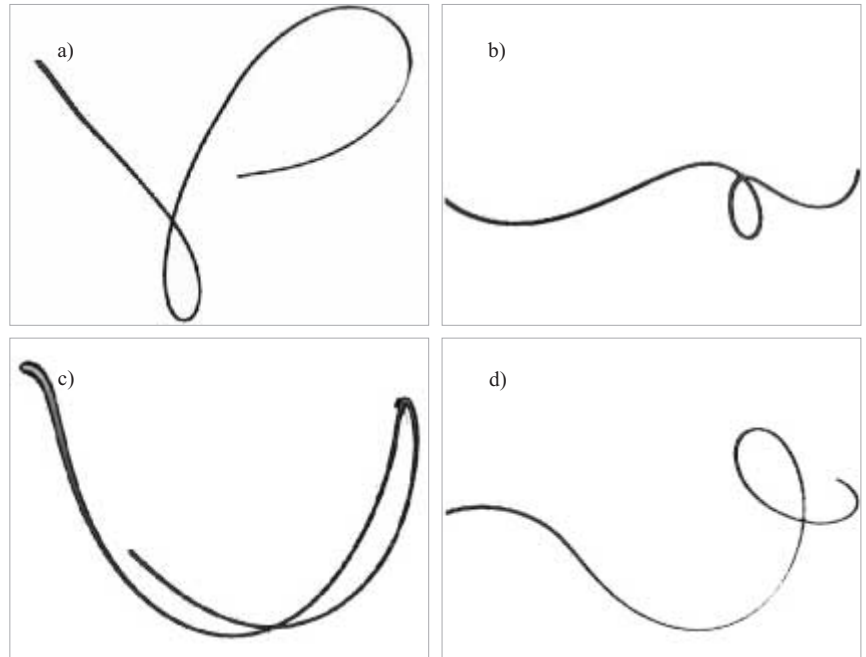
A 8. ábrán látható, hogy a mozgás kezdeti szakaszán (0–3 s) az $f(t)$, a második szakaszban (3–9 s) a $g(t)$ függvény írja le a szögkitérés csökkenését.

$$f(t) = 74,55 \exp\left(-\frac{t}{3,59}\right) + 16,41,$$

$$g(t) = 70,36 - 7,74 t.$$

A $g(t)$ függvény $t > 9$ s időtartamokra már nem értelmezhető, mert az inga megállt.

11. ábra. A mozgás valós térbeli pályái világos háttérrel



12. ábra. A csukló és az alsó kar végpontjának valós térbeli pályái

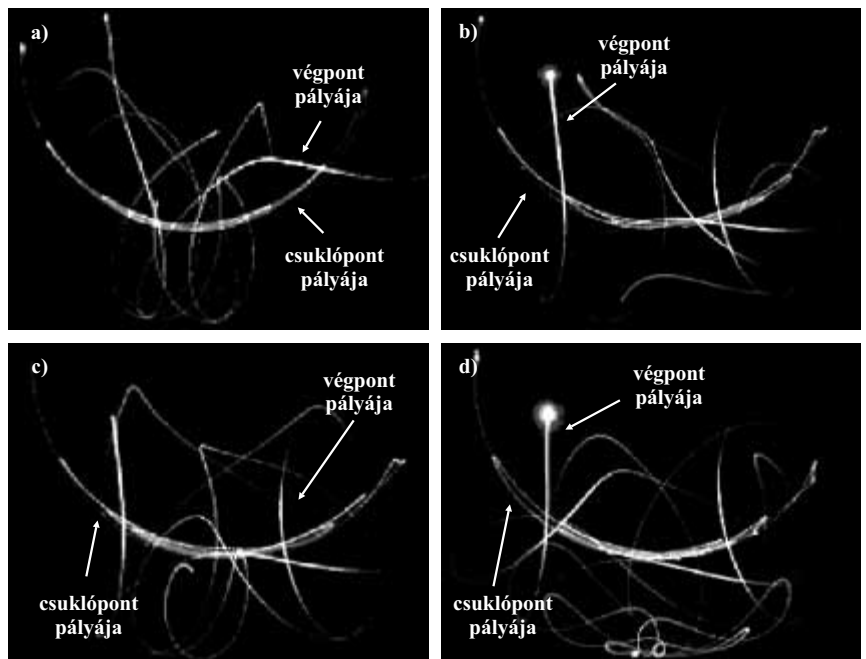
Kettős fizikai inga

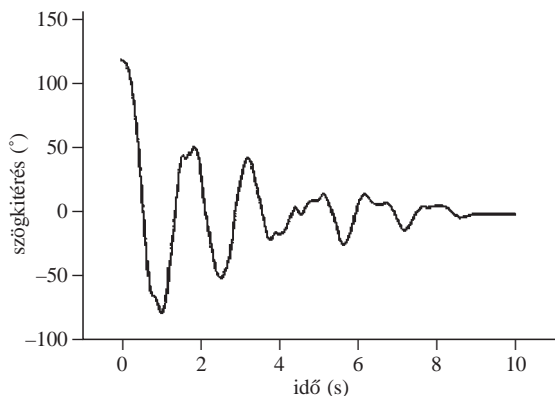
Az eszköz

Az ingát puhafából készítettük, felső része 60 cm, alsó része 30 cm hosszú. A felső végét egy potenciométer tengelyéhez csavaroztuk, így a kilengéseknél a csúszó érintkezőt mozgatta (9.a–d ábra). Sajnos éppen emiatt lép fel itt jelentős sűrűlódás. A két darabot fémcuklóval összeerősítettük. Itt olajozással csökkentettük a sűrűlódást.

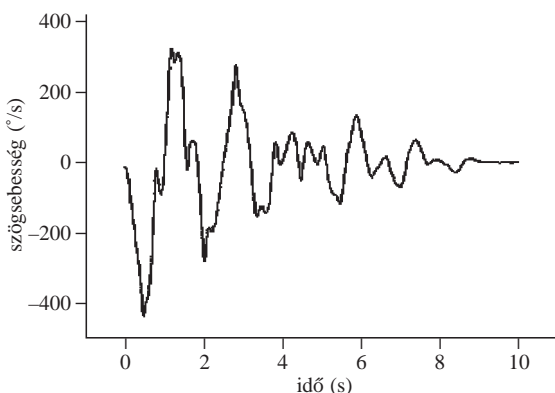
A megfigyelési, mérési folyamat

A méréshez szükséges feszültséget (kb. 5 V) egy stabilizált egyenáramú tápegység szolgáltatta. A potenciométer tengelyéhez rögzített kettős fizikai inga felső karjának szögelfordulásával arányos feszültséget (kalibrálásakor beállítottuk a 0 és a 90 fokok

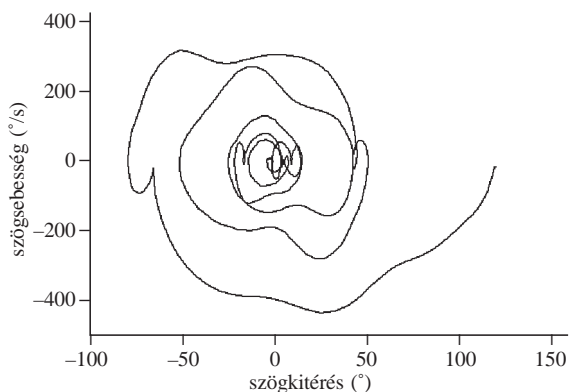




13. ábra. Az egyik mérés szögkitérés–idő grafikonja. Kezddőfeltételek: felső kar kitérése 120°, a két kar által bezárt szög 20°



14. ábra. A szögsebesség–idő grafikon, amit a szögkitérés–idő grafikon numerikus deriváltjaként kapunk



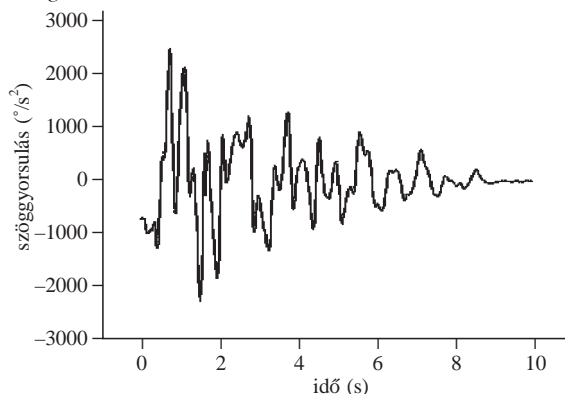
15. ábra. A felső kar mozgásának fázissíkbeli ábrája

szögkitérést) szolgáltatott az interfész (analóg input) egy-
 ségen keresztül a számítógépnek. A *Data Monitor for Windows* (Vernier) szoftver rögzítette a beállított idő-
 tartamon keresztül kapott jeleket. Az inga mozgásáról
 fényképeket és videofelvételt készítettünk. Az inga alsó
 végére világító LED-et szereltünk és a sötétben filmez-
 tük, illetve hosszú expozíciós idejű (3–5 s) felvételeket
 készítettünk. Ezekon kirajzolódott a mozgás valós tér-
 beli pályája. A 10.a–c ábrán ilyen felvételek láthatók az
 eredeti háttérrel, a 11.a–d ábrán az eredeti sötét hát-
 tere fehérre cseréltük. A mozgás valós térbeli pályáját
 még jobban szemlélteti a 12.a–d ábra. Ezekon a köríves
 vonal a két kar csuklójánál lévő vörös LED, a másik von-
 al az alsó kar végén lévő kék LED képe. A felvételek
 expozíciós ideje 6–10 s volt.

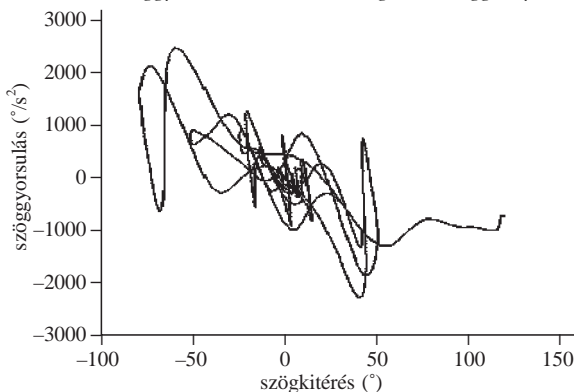
A mért adatok feldolgozása, elemzések

A mérések során kapott φ szögkitérés, t idő adatpárokat
 átmásoltuk egy matematikai programba (*Origin*), mely-
 nek segítségével grafikonon ábrázoltuk (13. ábra). Mivel
 az ábrázolt adatokra függvény nem illeszthető, így a vál-
 tozások jobb követésére elvégeztettük az adatokon a
 numerikus deriválást. Ily módon a ($\dot{\varphi} = \omega$) szögsebes-
 ség–idő grafikonhoz jutottunk (14. ábra). Újbóli numeri-
 kus deriválással kaptuk a forgatónyomatékra utaló ($M = I\beta$) β szöggyorsulás időbeli változását (16. ábra). A fellé-
 pő sűrűlódásra utal, hogy ugyanahhoz a kitéréshez más
 szöggyorsulások is tartoznak (17. ábra). Ábrázoltuk a
 felső kar mozgásának fázissíkbeli trajektóriáját, vagyis a
 szögsebesség (ω) – szögkitérés (φ) grafikont (15. ábra).

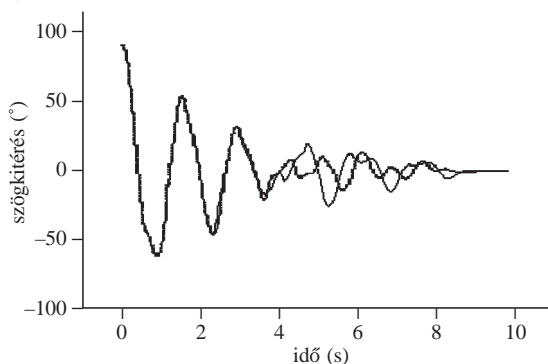
16. ábra. A szögkitérés–idő grafikon második deriváltja, a szöggyorsulás–idő grafikon

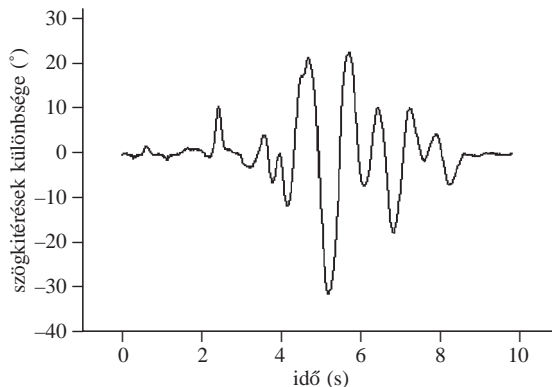


17. ábra. A szöggyorsulás ábrázolva a szögkitérés függvényében



18. ábra. Két közel azonos kezdőfeltételű mozgás szögkitérés–idő gra-
 fikonja

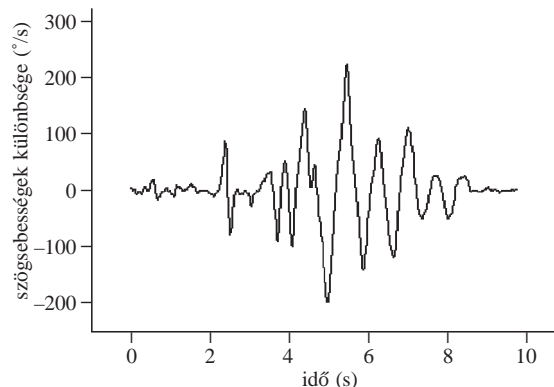




19. ábra. A két mozgás szögkitérés-különbségének változása

A megfigyelés célja az volt, hogy megvizsgáljuk a kezdeti feltételekre való érzékenységet, amely a kaotikus mozgások fő jellemzője. Ezért sok olyan mérést végeztünk, ahol megpróbáltuk reprodukálni az előzőleg beállított felső és alsó kar induló helyzetét. A kezdőfeltételekre való érzékenységet akartuk szemléltetni a két – ugyanolyan helyzetből indított – lengés szögkitérés grafikonjának egymásra másolásával is (18. ábra). Kiszámoltuk és ábrázoltuk a két mérés szögkitérés-különbségeit (19. ábra). Ha a két mozgás ugyanúgy játszódná le azonos (?) kezdőfeltételeknél, akkor minden érték nulla lenne, ahogyan az ábra elején és végén ez látszik is.

A hasonló kezdőfeltételű méréseket párosával összehasonlítottuk. Kiszámítottuk a két mozgás fázissíkbeli távolságának változását. Kezdetben a kaotikus jelleg miatt mozgások távolodnak egymástól, később a súrlódás miatt ugyanahhoz a fixpont attraktorhoz tartanak, ezért közelednek egymáshoz. A két fázissíkbeli pont közti távolságot a szögkitérések és a szögsebességek különbségéből (19. és 20. ábra) számoltuk ki Pitagorasz tételével. Az 1. táblázat második oszlopában az indítástól a két mozgás jelentős eltávolodásáig eltelt időt tüntettük fel. Itt a mozgás még előre jelezhető. A harmadik oszlopban ettől a pillanattól a két mozgás találkozásáig eltelt időt láthatjuk. Ez az idő több mint háromszorosa az előtte eltelt időnek. A fizikai kettősinga mozgását ezért tranziensen kaotikusnak mondhatjuk. Az inga összes energiája a súrlódás és közegellenállás miatt csökken. Ha pótolnánk az energiavesztéseket (külső gerjesztéssel), akkor a kialakuló mozgás állandósult, vagyis permanensen kaotikus lenne. A negyedik oszlop az eltávolodás mértékét jelző Ljapunov-exponensre tett becslésünket tartalmazza. Ezt úgy kaptuk, hogy a fázis-



20. ábra. A szögsebességek közti különbség változása

síkbeli távolság–idő grafikonok növekvő részére exponenciális függvényt illesztettünk (21. ábra). Ennek alakja: $Ae^{-\lambda t}$, ahol λ a Ljapunov-exponens.

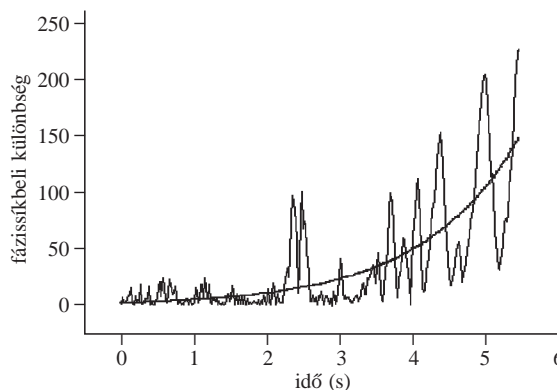
Továbbfejlesztési lehetőségek

Szeretnénk az inga alsó karjának mozgását is elemezni. Ehhez azonban új technikára van szükség (pl. vektorszópra). További feladat az inga súrlódásának csökkentése, esetlegesen különböző méretű karokkal való vizsgálódás. Megoldható az is, hogy az inga felfüggesztését periodikus gerjesztéssel mozgassuk. Szeretnénk az inga szimulációs programját is megírni, annak futtatási eredményeit összevetni a méréskor tapasztaltakkal. Ezek a feladatok új kihívásokat jelentenek a diákköri kutatómunkában.

Zárógondolatok

Vizsgálataink azt mutatják, hogy a káosz számtalan jelenségben megmutatkozik körülöttünk. Olyan közismert esetekben is, mint egy inga mozgása. Fontos lenne az ilyen jelenségek feltételeinek tanulmányozása, a folyamat leírása és dinamikájának megismerése. Amennyiben nem kívánatos a kaotikus viselkedés megjelenése egy rendszerben, meg kell találni a módját, hogy külső beavatkozásokkal a rendszert előre jelezhető mozgás felé tereljük, vagy legalább meg tudjuk mondani, hogy egy adott rendszer viselkedése milyen körülmények között válik kaoti-

21. ábra. A fázissíkbeli távolság exponenciálisan növekszik, ez kaotikus jellegre utal



1. táblázat			
Sorszám	Káosz előtti időtartam (s)	Káosz élettartama (s)	Exponens (λ)
1.	2,75	6,50	0,84
2.	1,50	7,50	1,49
3.	1,75	6,50	0,48
4.	2,00	6,50	0,38
5.	2,00	6,50	0,75
átlag	2,00	6,70	0,79

kussá. Úgy érezzük, hogy megfigyeléseinkkel megtettük az első lépéseket ebben az irányban. További feladatnak tekintjük a módszer tökéletesítését és a vizsgálati jelenségkör kiszélesítését.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetünket fejezzük ki a bajai Szent László Általános Művelődési Központ vezetésének, hogy munkánkhoz biztosították a szükséges eszközöket. Hálával tartozunk mentorunknak, *Tél Tamás*nak (ELTE, Elméleti Fizika Tanszék), aki a munkánk során sok hasznos tanácsot

és ötletet adott. Köszönjük a Mandelbrot Diákkör vezetőjének, *Jaloveczki* tanár úrnak a cikk megírásához és a mérés elvégzéséhez adott instrukcióit.

Irodalom

- FOKASZ NIKOSZ: *Káosz és fraktálok* – Új Mandátum, 2000
 HATVANI LÁSZLÓ, PINTÉR LAJOS: *Differenciálegyenletes modellek a középiskolában* – Polygon
 JAMES GLEICK: *Káosz – Egy új tudomány születése* – Göncöl, 1999
 TÉL TAMÁS, GRUIZ MÁRTON: *Kaotikus dinamika* – Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., 2002
 TÉL TAMÁS: *A káosz természetrajza* – Természet Világa 129/9 (1998)

MINDENTUDÁS AZ ISKOLÁBAN

A KÁOSZ

Vannak közöttünk, akik gyakran hallják a kérdést: mi ez a káosz a szobádban? A hétköznapi szóhasználatban a káosz térbeli, statikus rendezetlenséget jelent. A modern tudomány szóhasználatban viszont a káosz a *mozgás* egy fajtája, mely az iskolában tanult mozgásokhoz képest szokatlan tulajdonságokkal rendelkezik. Meglepő módon ez a mozgásfajta mégis igen gyakori.

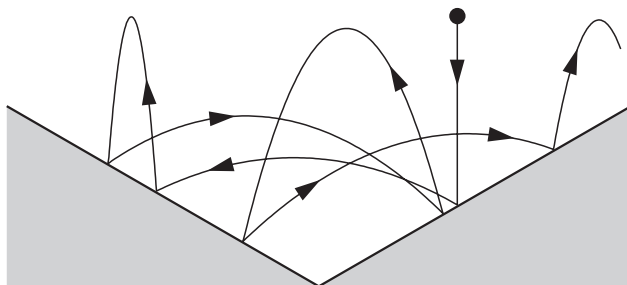
Az alábbi – az egyszerűség kedvéért a mechanika területéről vett – példák segítenek megérteni a jelenséget.

Egyszerű példák

Kettős lejtőn pattogó golyó

A kaotikus mozgást mutató rendszerek közül talán a legkézenfekvőbb a két szemben álló lejtő és a rajtuk pattogó rugalmas labda által alkotott rendszer (*1. ábra*). A mozgást tetszőleges hosszú ideig követve (a légellenállást elhanyagoljuk) sem találunk semmilyen szabályosságot, ismétlődést. A kaotikus viselkedés abból adódik, hogy a másik lejtőre való átugrás után a labda rendszerint nem pattan vissza oda, ahonnan jött. Így állandóan új helyzetek állnak elő, az azonos oldalon történő, egymás utáni ütközések száma pedig olyan típusú véletlen számsorozatot ad, mintha dobókockákkal állítottuk volna elő!

1. ábra. Két azonos dőlésszögű, szemben álló lejtőn tökéletesen rugalmasan pattogó golyó, légtüres térben.



Golyó mozgása szabálytalan edényben

Amikor egy golyót szabálytalan alakú tálba helyezünk, akkor mozgása meglehetősen szabálytalan lesz, mielőtt az edény aljának valamely pontjában megnyugodna (*2. ábra*). A golyó megállása a súrlódás és a légellenállás következménye. Ha állandó energiabetáplálást biztosítunk, s a disszipálódott energiát pótoljuk (pl. az edényt vízszintes síkban lassan mozgó felületre helyezük), akkor ismét (tetszőlegesen) hosszú ideig tartó szabálytalan, kaotikus mozgást kapunk. A súrlódásmentes esetben a mozgást az edény falának alakja (mint potenciálgödör) határozza meg. Jól tudjuk, hogy szabályos, forgásszimmetrikus edényben (mely centrális potenciálnak felel meg) nem alakulhat ki szabálytalan mozgás, hiszen az impulzusnyomaték megmaradása miatt a pályák egyszerűek. A szabálytalan esettel kapcsolatos tapasztalatunk viszont azt mutatja: nem gömb alakú napok körül a bolygópályák kaotikusak is lehetnének!

Lengő ejtőgép

Tekintsünk egy kicsiny csigán átvetett fonállal összekötött két tömegpontot (*3. ábra*). A jól ismert középiskolai feladatban mindkét pont csak függőlegesen mozog-

2. ábra. Szabálytalan alakú tál és a benne mozgó golyó.

