



RADNÓTI KATALIN – NAGY MÁRIA

## A matematika szerepe a természettudományos képzésben

### ÉRTELMEZÉSEK, VITÁK

Az utóbbi évtizedekben a felsőoktatás szélesre nyitotta kapuit a tanulni vágyó fiatalok előtt. Ennek következtében sok olyan hallgató is bekerült a rendszerbe, akiknek korábban erre nem lett volna lehetőségük tanulmányi előmenetelük alapján. Hazánkban 2006 óta az úgynevezett bolognai rendszerű képzés folyik sok szakterületen, mely lehetőséget adott a tematikák újragondolására. A korábbi tapasztalatok alapján fogalmazódott meg az ELTE TTK vezetésében, hogy a diákok felkészületlensége miatt szükség lenne úgynevezett felzárkóztató tantárgyak bevezetésére az első évfolyamon. Ez meg is történt, elsők közt a matematika, fizika és kémia tantárgyakból. Ezen tanórák keretében az egyetemi oktatók a hallgatók középiskolai tudásának hiányosságait igyekeznek pótolni. A matematikai tudást igénylő képzési területek nemcsak a műszaki és a matematikus, fizikus szakokat jelentik. Minden természettudományos szak (földtudományi, környezettudományi) is komoly matematikai alapot tesz szükségessé. Az ilyen szakokra jelentkező diákok azonban fakultációs tantárgyként nem a matematikát választják a középiskolában, hanem természettudományos tantárgyakat, főként biológiát és földrajzot. Ez viszont az a következménnyel jár, hogy matemati-

kai alapozásuk nagyon hiányos. Írásunkban ezt a problémát járjuk körül, majd javaslatokat fogalmazunk meg.<sup>1</sup>

### AZ ISKOLAI TANÍTÁS, A KÖZOKTATÁSI GYAKORLAT

#### Melyek lehetnek az iskolai tanítási célok?

Így tehetjük fel a kérdést, hogy témánkat beágyazzuk az oktatási környezet egészébe. A válaszok a következők lehetnek: a műveltség, a kultúra átadása a következő nemzedéknek; érték közvetítés; szemléletformálás; kognitív folyamatok segítése; absztrakciós készség kialakításában való közreműködés; annak elősegítése, hogy a gyermekek képesek legyenek több aspektusból is vizsgálni az eseményeket; különbséget tudjanak tenni az egymástól elvben eltérő dolgok között; bele tudjanak helyezkedni az egyes témakörök problémacentrumába; általános érdeklődés felkeltése a világ irányában; tartós koncentrációra és figyelemre va-

<sup>1</sup> A felsőoktatásba érkező hallgatók tudásával korábban is foglalkoztunk már (*Radnóti, 2007; Pálfainé, 2009*).



ló készség kifejlődésének támogatása; saját koncepciókra való igény, és azok megalkotására való affinitás kiépítésében való szerepvállalás; alkalmazható tudás, élethosszig tartó tanulás képességének kialakítása; a kulcskompetenciák fejlesztése; a gondolkodás fejlesztése; az életre való felkészítés; tudatos állampolgárrá (közösségi emberré) nevelés; és még sorolhatnánk.

### Mik lehetnek az egyes tantárgyak tanítási céljai?

Az iskolában különböző tantárgyakat tanítunk, melyek hazánkban a felső tagozattól kezdődően hagyományosan az egyes tudományok leképeződései, annak legfontosabb fejezetei, egyszerűsített formában. Az egyes tantárgyak tanulási céljai a tartalmi vonatkozásban kettősek:

- az adott tudományba, annak logikájába, kérdésfeltevéseinek jellegzetességeibe, problémamegoldási módszereibe, jelölési rendszerébe való bevezetés,
- más tudományok tanulásának/tanításának elősegítése.

Minden esetben fontos a kulcskompetenciák fejlesztése a fontosnak ítélt tantanyagtartalmakon keresztül, továbbá **eszköztudás** biztosítása a későbbi tanulmányokhoz, más tantárgyak tanulásához, melyek igen jelentős célok a magyar nyelv és irodalom és a matematika tantárgyak esetében. **Ezért magas az óraszámuk a többi tantárgyhoz képest a fenti tantárgyaknak!**

### Mik lehetnek a matematikatanítás célkitűzései?

Az előbbiek értelmében a matematikatanítás célrendszere is kettős. A kérdés ezek aránya.

Jelen írásunkban arra szeretnénk rámutatni, hogy az egyik nagyon fontos cél a többi tudomány (iskolai tantárgy) számára megteremteni a szükséges matematikai alapokat. Véleményünk szerint ezen eszköztudás kialakítása fontosabb célkitűzés kell legyen a matematika mint szaktudomány világába való bevezetésnél. Ugyanis jóval kevesebb matematikusra van szükség, mint amennyi – a matematikát magas szinten alkalmazni tudó – mérnökre, gazdasági- és természettudományos területen dolgozó szakemberre. Ezen kívül kevesebb a kifejezetten a matematika felé orientálódó emberek száma, mint azoké, akiket olyan szakterületek érdekelnek, amelyek igénylik a matematikát mint eszközt a problémák megoldásához, világunk működésének leírásához.

### Mi szerepeljen a tananyagban?

Mi a meghatározó cél? Célkitűzés-e a felsőoktatásra való felkészítés a közoktatás során, vagy csak az érettségi vizsgára kell koncentrálni? Míg a korábbi időkben a középiskolát végzett diákoknak körülbelül 10%-a tanult csak tovább, ez az arány napjainkban már 40% körül mozog. Régebben a középiskolák megítélése szempontjából fontos mutató volt az, hogy az érettségizettek hány százalékát veszik fel a felsőoktatásba. Ez napjainkban igazából már nem mond sokat, hiszen például a gimnáziumba járó tanulók jelentős része felvételt nyer valamilyen felsőoktatási intézménybe. Ennek alapján azt gondoljuk, hogy a közoktatás éveiben nemcsak az érettségi vizsgára kell koncentrálni, már a tananyag meghatározásánál sem, hanem tekintettel kell lenni a felsőoktatás igényeire is. És természetesen ennek a szemléletnek az érettségi követelmények meghatározására, annak értékelési rendszerére is hatással kell lennie.

Milyen felsőoktatásra készítsen fel a középiskola, például esetünkben matematikából? Folytathatjuk a kérdések sorát. Hiszen a fentiekben leírt, az adott évfolyam közel 40%-át kitevő fiatal sokféle felsőoktatási lehetőség közül tud választani, melyeknek csak egy része igényli jelentősebben a tanulmányok során a matematikát. Ám kismértékben gyakorlatilag minden területen jelen van a matematika a felsőoktatási törzsanyagban. Például jogi, társadalomtudományi karon folytatott tanulmányok esetében valószínűség-számításhoz és statisztikához kapcsolódó matematikai elemek szerepelnek a tantervben. A nyelvtanulás esetében a mondatelemzés során logikai kapcsolatokat használnak, amelyek hasonlóságot mutatnak a matematikai logikával. Zeneművészet esetében a hangközök, az ütembeosztás hordoz matematikai tartalmat; utóbbit a zenemű elején törtszámmal jelöljük, és a számláló azt mutatja meg, hogy egy ütemben hány alapütketés van, a nevező pedig az alapütketés ritmusértékére utal. Irodalomban és az idegen nyelvek fonetikájában is nagymértékben jelen van a zenéhez hasonlóan az időmérték, a ritmizálás, és a hanglejtés, ami matematikai tartalmat hordoz. Tovább is fejtegethetnénk azt a tényt, hogy a matematikára legalább kismértékben minden területen szükség van a továbbtanulási lehetőségek tárházában, attól függetlenül, hogy mely tudomány mellett kötelezi el magát valaki.

A tanulók közül viszonylag kevesen határozzák el évekkal az érettségi előtt, hogy milyen irányban akarnak továbbtanulni. Sokan csak szinte az utolsó hónapokban döntenek. Többen meglehetősen változatos helyekre jelentkeznek egyszerre, annyira bizonytalanok. Például megjelölnek jogi

pályát, valamilyen műszaki, vagy természettudományos szakot és gazdasági szakot is. Szándékosan próbáltunk meg nagyon különböző felsőoktatási lehetőségeket írni,

mivel azt gondoljuk, hogy nem elhanyagolható az ilyen jellegű jelentkezések aránya. Például fizika alapszakon előfordul olyan csillagász szakirányos hallga-

tó, aki mellette diplomáciát tanul, s van olyan is, aki a fizika szak előtt első szakként politológiát választott.

Tehát a kérdés az, hogy akkor miként határozzuk meg a tananyagot, kiknek az igényeit tartjuk szem előtt? Azon tanulók érdekei legyenek-e a meghatározóak, akik biztosan nem matematikai irányba tanulnak tovább, vagy valamilyen szinten mégis figyelembe kellene venni azokat a tanulókat is, akik csak később döntenek, illetve akiknek a matematika nem önmagában lesz fontos, hanem segédtudományként?

Azt lehet mondani, hogy akik biztosan matematikai jellegű továbbtanulásra gondolnak, azok válasszák a fakultációt, és ott felkészítést kapnak az emelt szintű érettségéhez. Itt biztosan megkaphatják azt a tudást, mely elegendő lehet a műszaki és természettudományi alapozó matematika kurzusok sikeres teljesítéséhez, majd a későbbiekben ezen ismeretek felhasználásához a szakmai tantárgyakban. Megjegyzendő, hogy a szomorú helyzet az, ha az általános, nem speciális matematika tanterv alapján tanulók sem feltétlenül részesülnek a kellő plusz szaktárgyi ismeretekben a matematika fakultáció keretében. A Matematika BSc képzésben tanulók egy része is a normál, haladó és intenzív kurzusok közül csak a leggyengébb, normál szintet választja, mert önértékelése és kritériumdolgozata alapján is hiányosságok lelhetőek fel előzetes ismereteiben. Ezen hallgatók a későbbi

gyakorlatilag minden területen jelen van a matematika a felsőoktatási törzsanyagban

szakirányválasztás folyamatában az elemző vagy a tanári szakirány mellett döntenek. Utóbbit gyakorta nem azért választják, mert ezt éreznék hivatásuknak, hanem mert jobb elhelyezkedési lehetőséget látnak benne, illetve, mert az elemző szakirányhoz nem tartozik felsőfokú mesterképzés (Msc), további ös-

vény a tudás fénylő elemeinek felderítéséhez. Az elemző szakirány elvégzése után lehetőség van például alkalmazott matematikus MSc-re jelentkezni, de ekkor az alapképzésen meg nem szerzett előismeretek hiánya miatt adódik problémája a hallgatóknak; ezért kevesen választják ezt az utat. Az előbbieken kívül az még problematikusabb a matematika alapképzést folytatók körében, hogy nemcsak a magasabb szintű kurzusok jelentenek sokaknak nehézséget, hanem a normál szintű tárgyakat sem tudják sikeresen, vagy a minimális szintnél jobban teljesíteni, és ez nagy kudarcélményt jelent számukra. Továbbá a leendő tanárok, matematika majorosok (első tanári szak), fizika minorosok (második tanári szak) esetében gyakran megfigyelhető, hogy bár a matematika törzsanyag keretében nem jelent problémát tárgyaik teljesítése, de fizikás tárgyaik kevésbé sikeresek. Ennek oka az, hogy hiányzik a megszerzett tudás alkalmazásának készsége. Annak **eszközként** való kezeléséhez elmélyült tudásrendszer lenne szükséges, s ez nehézkesen megy, nemcsak a fizika minorosoknak, hanem a fizika majorosoknak, illetve a nem tanár szakirányos fizika alapszakos hallgatóknak is. Ez szintén arra vezethető vissza, hogy bár ezek a hallgatók többnyire matematika fakultációra jártak középiskolás tanulmányaik során, mégsem részesül-

tek a megfelelő szemléletformálásban, ismeretszerzésben. Mi is többször tapasztaljuk, hogy az ismeretek szintjén is hiányosságai vannak, nemcsak az alkalmazás területén. Tehát elmondható, hogy akkor sem feltétlenül kapja meg a felsőoktatáshoz szükséges előzetes tudás elsajátításának le-

hetőségét egy középiskolás, ha már idejekorán határozott, konkrét elképzelései és célkitűzései vannak továbbtanulására vonatkozóan. És ők még az

akkor sem feltétlenül kapja meg a felsőoktatáshoz szükséges előzetes tudás elsajátításának lehetőségét egy középiskolás, ha már idejekorán határozott, konkrét elképzelései és célkitűzései vannak továbbtanulására vonatkozóan

a réteg, akikre jobb lehetőségek várnak.

De mi lesz azokkal, akik a középiskola utolsó évében tudnak csak dönteni? És mi lesz azokkal, akik olyan természettudományi jellegű felsőoktatásba készülnek, ahol elvárt, hogy természettudományos tantárgyakat válasszanak fakultációként? Például a biológusnak készülő diák biológiát és kémiát, a környezettan szakra készülő biológiát és földrajzot fog választani. Tehát a matematikát csak a „normál” középszinten tudja tanulni, majd középszinten érettségizik. Ezek után az első félévben szembesül azzal, hogy a matematikai tudása nagyon hiányos. Ezt a problémát aztán az ideálisnál gyorsabban, és hirtelen módon próbálja orvosolni a tanuló és a felsőoktatási intézmény együttes erőfeszítéssel, ám pszichikailag gátolja ezt a folyamatot, hogy a frissen felsőoktatásba csöppent hallgatót sokként éri az a felismerés, miszerint rendkívül hiányos az előzetes tudása, és külön trauma a hatalmas mennyiségű új ismerettel való szembetalálkozás – mely ismeretek nagy részének nem kellene újnak lennie. Az is nagymértékben hátráltatja a felzárkózást, hogy a hallgató – teljesen érthető okokból – megijed

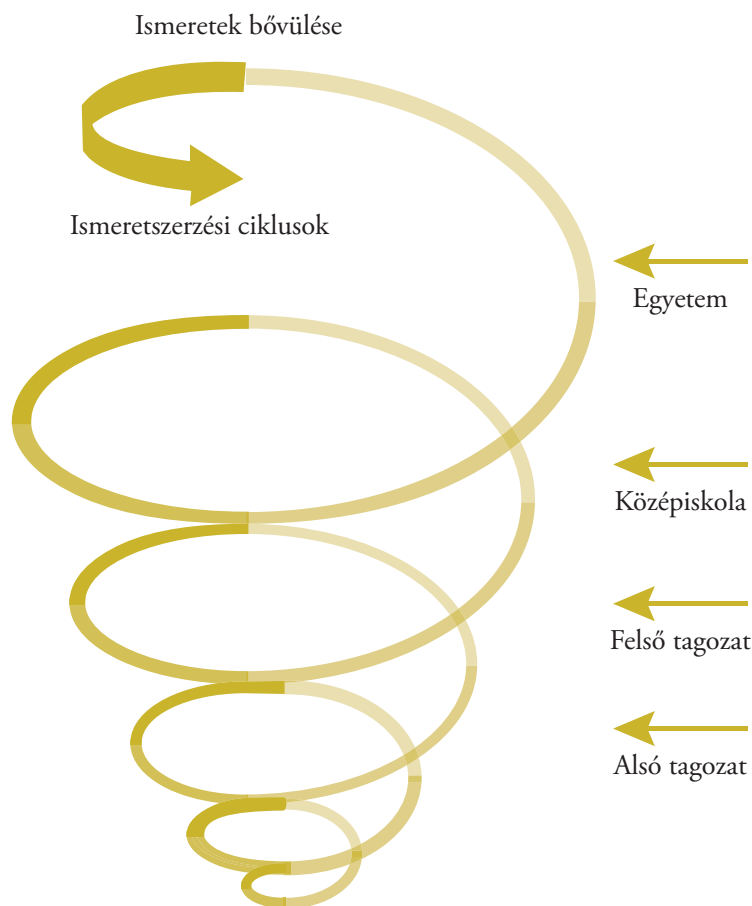
az újtól, hiszen az ember számára az ismeretlen leggyakrabban rémisztő dolog, főleg ha éppen ekkor változott meg a környezete is (előtte legalább négy évet töltött a megszokott középiskolájának falai és ismerős diáktársai között), s az új dolgok hirtelen és nagy mennyiségben szakadnak a nyakába.

Mi jelenti a középiskolai matematika tananyag legnagyobb hiányosságát? – tehetjük fel a következő kérdést. A válasz

a matematika tananyagból több mint harminc éve „száműzött” differenciál- és integrálszámítás. Pedig ez már a legegyszerűbb fizikai fogalom, a sebesség definiálásához is alapvető eszköz, továbbá nélkülözhetetlen a természeti jelenségek és folyamatok leírásához. Emellett a vektorszámítás elemei is nagyon hiányosak a középiskolai tananyagban.

## 1. ÁBRA

### A fogalmi fejlődés csigaház-modellje



A matematika tanítására kifejezetten jellemző a fogalmak lassú érlelése, többszöri visszatérés az egyes témakörökre, minden esetben csak kicsit bővítve azokat, mely folyamatot csigaházazs ábrákkal szemléltetünk.

Általánosságban elmondható, hogy a matematika a túl lassú haladási üteme miatt szinte minden esetben később tanítja a

más tantárgyak tanításához eszközként szükséges tartalmakat! Ez pedig nagyon megnehezíti azok tanítását! Sok egyéb mellett ez is oka lehet annak,

hogy a több matematikát igénylő, sőt a matematikát mint leírási nyelvet alkalmazó fizika tantárgy annyira népszerűtlen a diákok körében. A diákok nagyon nagy részének szemében a reáliák megfoghatatlanok, érthetetlenek, azt nyilatkozzák rólok, hogy gyengén megy nekik, és hogy ez nem az ő világuk. Ennek egyik oka, hogy ezeken az órákon nagyrészt a nem értésből eredő kudarcélményekkel szembesülnek a sikerek helyett. Pedig a természettudományok által magyarázhatók a mindennapok történései, jelenségei, az események kapcsolata, maga a természet és az élet. A tanulókhöz például úgy vihető közelebb e tudományok **szemléletmódja**, ha megfelelő **eszközök** állnak a rendelkezésre, ezáltal **érthetőbbé lehet tenni** a nehéznek és absztraktnak tartott tárgyakat. A középiskolai tankönyvek és a jelenleg leggyakrabban használt tanítási módszerek is meglehetősen szárazon, képletorientáltan, a mélyebb, érdekes részeket kihagyva ismergetik a fizikát. Például a feladatmegoldások teljes algoritmusát irányító munkafüzetek, az értés nélküli betanulást jelentő tanulási technikát pártolják, **leszoktatják a tanulókat a gondolkodásról**. Ettől ugyan ké-

a matematika a túl lassú haladási üteme miatt szinte minden esetben később tanítja a más tantárgyak tanításához eszközként szükséges tartalmakat

nyelmesebbé válik a tanulás, ám mindez a tudományos szemléletformálás teljes gátját jelenti, mely a való életben és a felsőoktatás színterén bosszulja meg magát. A kizárólag algoritmikus tudás, illetve a képletbetanulás e cikk szerzői szerint rendkívül **negatív hatással van a gondolkodási attitűdök fejlődésére és alakulására, valamint az önálló koncepcióformálás ké-**

**pességének kialakulására nézve.**

Így ugyanis a diákok nem értik meg a fizikai fogalmak valódi jelentését, nem a fizikai je-

lenségeket látják, hanem csupán a matematikai reprezentációt és a megoldási műveletet – minden mögöttes tartalom nélkül –, ami ugyan nagyon fontos, de nem önmagában, hanem a fizikai fogalmak kialakításához vezető eszközként, a jelrendszer által hordozott információ-tartalom miatt.

A matematikai eszközök használata pedig segíti a mélyebb megértést, a fizikai fogalmak kialakítását. A matematikának a fizikai fogalmak kialakításában való szerepvállalásával az is együtt jár, hogy egy adott elvonatkoztatott matematikai apparátus megfoghatóbbá válik. Tehát ekkor **a matematika mint eszköz** segíti a fizika szakmódszertant, és visszahatva, az így kialakított fizikai fogalmak is segítik a matematikai módszertant azzal, hogy valóságos, megfogható jelentést adnak az eszközként használt matematikai formuláknak, elveknak. Ez a módszer azonban csak akkor működik, ha az adott hallgatóságnak megfelelő szinten, ideális matematikai mélységekig tekintve alkalmazzuk. A jelen helyzetben szinte csupán a speciális matematika tagozatosok előképzettsége elegendő még a legalapvetőbb fizikai problémák

ilyen jellegű tárgyalásához is. Holott nem túl nehezen elsajátítható szemlélet ez egy középiskolás számára, szó sincs arról, hogy nem elég érettek a gyerekek hozzá. A korábbi középiskolai matematika-tankönyveknek ezek a fejezetek részei voltak. A fizikatankönyvekben pedig evidens volt ezeknek a matematikai eszközöknek a használata.

Érdekes, hasznos, és érthetőbbé teszi a tanulmányokat az egyes tudományok közti kapcsolat megteremtése. Többek között ezért lenne fontos, hogy megvalósuljon a fizika és a matematikai eszközök együttes, egymással koordinációban történő tanítása (Nagy, 2013).

A matematikai tudás alkalmazásával kapcsolatban általában a következő nehézségek szoktak felmerülni:

- Hiába tanulta már matematika órán a gyerek az adott téma feldolgozásához szükséges ismeretet, a **transzfer** nehéz, az új helyzetben való alkalmazás nem könnyű.
- Sokszor **más betűket** is használnak az egyes természettudományos témakörök matematikai leírásánál, mint a matematikaórán. Ez természetes, hiszen a betűjelek rövidítések. De a diákok a matematikaórákon az ismeretlen mennyiség, illetve a koordináták jelölésére szinte mindig csak az  $x$  és  $y$  betűket használják, így az összefüggéseket is már csak ezekkel felírva ismerik fel, mely utal arra, hogy tudásuk csak mechanikus, a betanulás, nem pedig az értelmezés technikáját jelentő tanulási folyamat eredménye.
- A természet jellemzéséhez bevezetett mennyiségeknek többnyire **mértékegysége** is van, amivel szintén matematikai műveleteket kell végezni. Ezt dimenzióanalízisnek nevezik, mely sokszor hatalmas segítője a természettudományoknak. Hiszen egy kapott mennyiség helyességét

nem az tükrözi, hogy arra próbálunk rájönni, hogy jó képletet használtunk-e, hanem az, hogy megnézzük, milyen más mennyiségekből származtattuk az eredményt, s az ezek mértékegységeivel végzett megfelelő műveletek eredménye ugyanaz-e, mint a kapott eredmény mértékegysége.

A továbbiakban áttekintjük a matematika és a természettudományos tantárgyak kapcsolódási pontjait a 2012-ben megjelent új Nemzeti alaptantervet és az annak alapján készült kerettanterveket tekintve alapként.

## A MATEMATIKA ÉS A TERMÉSZETTUDOMÁNYOS TANTÁRGYAK KAPCSOLATA

### Földrajz

A *térképi méretarány* földrajzórái használatának nehézségei alapvetően arra vezethetők vissza, hogy a hozzá szükséges matematikai tudással még nem rendelkeznek a gyerekek.

A másik problémát a **gömbfelszín és a sík közötti projekció** jelenti. Hogyan lesz a gömbfelszínből sík térképlap? A szemléltetéshez az úgynevezett narancsmoddell lehet használni. Ugyan a gömbi koordináták használata sokkal magasabb matematikai ismeretszintet követelne meg, de helyette **modellalkotás** segítségével a probléma orvosolható.

Ezen kívül a földrajztanítás fontos elemeit képezi a különböző statisztikai jellegű adatok kezelése, mint például időjárás, éghajlati és gazdasági statisztikák. A gyerekeknek feladatuk is a különböző statisztikai

adatok gyűjtése, elemzése és ábrázolása. Ehhez kapcsolódóan adatok rendezése, osztályokba sorolása, táblázatba rendezése, ábrázolása, és ezekből következtetések levonása.

### Biológia-egészségtan

Elsősorban a genetika témakörénél fontosak a kombinatorikai ismeretek. A genetikánál a matematika a valószínűségekben is megjelenik, a valószínűségi értékek pedig a kombinatorikából eredeztethetők, továbbá a matematikai logika képében is helyet kap a matematika, igazságtáblázat-szerűen a domináns-recesszív öröklődésnél. Az exponenciális függvény ismerete elsősorban a vírusok és a baktériumok szaporodásának, a betegségek kialakulásának értelmezéséhez szükséges, a biokémia témakörében a kémiai egyenletrendezések is igényelnek matematikai ismereteket.

### Kémia

A kémia oktatása során alkalmazott számítások alaptörvényei a következőképp foglalkozhatók össze:

- *Az állandó tömegviszonyok törvénye* (Proust, 1799). Az elemek meghatározott tömegarányban egyesülnek egymással. Bármely vegyületben az alkotóelemek tömegaránya állandó érték. Például a vízben a hidrogén és az oxigén tömegaránya 1:8.
- *A többszörös tömegviszonyok törvénye* (Dalton, 1804). Ha két elem többféle tömegviszony szerint egyesül egymással, akkor az egyik elem meghatározott mennyiségével a másik elem olyan mennyiségei vegyülnek, amelyek úgy viszonyulnak egymáshoz, mint az egyszerű

egész számok. Például a hidrogén és az oxigén vízzé és hidrogén-peroxiddá is egyesülhet. A hidrogén és az oxigén tömegaránya a  $H_2O$ -ban 1:8. A hidrogén és az oxigén tömegaránya a  $H_2O_2$ -ben 0,5:8, vagyis 1:16. Az oxigén azonos mennyiségével vegyülő hidrogén tömegaránya a két vegyületben 1:0,5 vagyis 2:1.

Az anyag részecskékből áll (ezek tömege egymástól különböző), melyek egymással kölcsönhatásba lépnek a kémiai folyamatok során. Mérleggel sok részecske együttes tömegét, vagy mérőhengerrel azok együttes térfogatát tudjuk megmérni. A reakciók esetében azonban a részecskék száma a döntő. Ezért kell sokszor kiszámítani a kémiai számítások során a reakcióban részt vevő anyagok tömegéből, illetve a térfogatából a részecskék darabszámát, vagy a mólok számát.

A kémiai számítások során fellépő *matematikai nehézségek*: a leggyakrabban alkalmazott matematikai eljárás az *egyes arányosság* használata. Hiába tanulják meg matematikaórán a használatát, de mint minden esetben, úgy itt is nehéz a transzfer a gyerekek számára. Vagyis az egyfajta kontextusban megtanult eljárásokat csak nehezen tudják új szituációban, egy teljesen másfajta kontextusban eredményesen alkalmazni. Ennek áthidalása véleményünk szerint a kétféle tantárgyat tanító kolléga komoly együttműködését igényli. Célszerű a matematikaórákon kémiai jellegű példákat is megbeszélni, míg kémiaórákon a többi egyenes arányosság feladattal való hasonlatosságot kiemelni. Ekkor a korábbiakban a fizikánál írtakhoz hasonlóan **a matematika segítően eszközként a kémia szakmódszertant** és visszahatva, az így kialakított kémiai fogalmak is segítenék a matematika szakmódszertant: a valószínűségi, megfogható, materiális mivoltukkal jelentést adnának az eszközként használt matematikai formuláknak, elveknek. S az



is kifejezetten előnyös volna, hogy így a matematikaórán kívül a fizika, a kémia, és az összes egyéb természettudományi tárgy keretében hallanák az oda tartozó matematikai ismereteket. Ezt a módszert alkalmazva

- egyrészt megtörténik a tananyag átismétlése,
- másrészt megkezdődik a betanult, leginkább algoritmi-kus szintű tudás absztrakt szintre emelése,
- harmadrészt a természettudományok számára legfontosabb eredményként ez megteremtené a valódi problémák vizsgálatának és elemzésének megfelelő szemléletben történő tárgyalásához szükséges szférát.

Tehát rendkívül előnyös lenne a **természettudományok integrált szemléletben történő tanulása/tanítása**.

A kémia esetében nemcsak az egyenes arányosság tartozik ebbe a problémakörbe. Az egyenes arányosságon kívül fontos még a tíz hatványaival való számolás a részecskék nagy száma miatt, továbbá a logaritmus: középiskolában a tízes alapú logaritmus-sal való számítások ismerete a pH fogalom miatt.

### A matematika és a fizika kapcsolata

A fizika tanításában, ha lehet ilyet mondani, még nagyobb mértékben támaszkodunk a matematikai ismeretekre, a matematika és a fizika kapcsolatának bemutatását ebben az esetben is rövid tudománytörténeti kontextusban tesszük meg a téma fontossága miatt.

### Tudománytörténeti háttér

A matematika történetének tanulmányozása során megállapíthatjuk, hogy sok kiváló matematikus volt egyben fizikus is. Korábban a polihisztorok voltak jellemzőek a tudományok világára, tehát a tudósok, a természettudományok képviselői nem kizárólag egy tudományban, illetőleg annak egy diszciplínájában jártas szakemberek voltak.

A fizika sok esetben a felismert matematikai módszerek alkalmazási területeként jelent meg. De nem

egy olyan esetet ismerünk, amikor a fizikai jelenség leírásához dolgoztak ki új matematikai módszert (*Sain*, 1978). Írásunkban csak néhányukat említjük meg.

*Galileo Galilei* az első volt, aki következetesen alkalmazta az általa vizsgált természettörvények matematikai leírását, elsősorban kvantitatív eszközöket használva. Ókori elődje *Arkhimédész*, akit a mechanika atyjának kell tekintenünk. Ő volt az, aki először összekapcsolta a fizikai kísérleteket és a matematikai összefüggések megfogalmazását. *René Descartes* (1596–1650) szerepe is kiemelkedő a matematika és a fizika kapcsolatát illetően. Az igazságok kutatására legalkalmasabbnak a deduktív matematikai módszert tekintette. Jelentős eredménye az analitikus geometria létrehozása és fejlesztése. *Christiaan Huygens* (1629–1695) az ingaóra tökéletesítése közben egész sor síkgörbét tanulmányozott. Az arkhimédészi módszer következetes alkalmazásával a differenciál- és integrálszámítás jelentős előkészítője volt.

A differenciál- és integrálszámítás módszerének kifejlesztése *Isaac Newton* és vele párhuzamosan *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716) érdeme, e matemati-

az egyfajta kontextusban megtanult eljárásokat csak nehezen tudják új szituációban, egy teljesen másfajta kontextusban eredményesen alkalmazni

kai eszközöknek döntő jelentősége volt a mechanika kialakulásában. Ezzel párhuzamosan alakult ki a differenciálegyenletek elmélete és a fizikát is szorosan érintő megoldása, az ezzel foglalkozó tudósok többnyire egyszerre voltak fizikusok és matematikusok.

### A matematika és a fizika kapcsolata az oktatásban

A matematikát a fizika tanulása közben *eszköztudásként* használjuk, a fizika leíró nyelveként alkalmazzuk. E cikk írói szerint hibás az olyan eljárás, mikor az összefüggések egyszerűen csak felkerülnek

a tanórákon a táblára – szinte magyarázat nélkül –, hogy aztán abba behelyettesítve számoljanak a középiskolások, mely a tanulók elmondása szerint sokszor megtörténik. Ugyanis

ekkor a diákoknak fogalmuk sincs arról, hogy mit is számolnak valójában, még ha meg is kapják a helyes végeredményt. Ám, ha részletesen megtárgyaljuk a matematikai formula formai jelentését, és annak valóságos effektusként való megnyilvánulását (például a derivált valaminek a sebességét jelenti, a teljesítmény a munkavégzés „sebessége”), akkor ez segít a fizikai jelenségek értelmezésének megkonstruálásában, a természettudományos szemlélet fejlődésében, a jelenségek megértésében (Nagy, 2013). Az új ismeretek rögzülését is elősegíti a többféle nézőpont, miközben fejlesztjük a tanulók absztrakciós képességét.

Kísérletet értelmezésénél felírhatunk matematikai formulákat a fizikai mennyiségek megfigyelt összefüggéseire. Jelenleg a kapcsolat felismerése sem szokott sok esetben megvalósulni, egymástól függetlenül látják a diákok

- a számításos feladatok számszerű végeredményeit,
- a törvényeket megadó képleteket,
- és a valódi jelenségeket.

Pedig célszerűen a jelenséget szavakban, a fizika szókincsének felhasználásával, és matematikai alakokkal is leírhatjuk. Fontos, hogy a diákok érezzék és értsék a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést, a szoros kapcsolatot a leíró matematika és a jelenség között, de a különbséget is lássák a formális leírás és a valódi, megfogható jelenség között!

Ahogy már a korábbiakban is leírtuk, **a fizika és a természettudományok**

### jelrendszere a matematika.

Ugyanúgy írunk le jelenségeket matematikai képletekkel, ahogyan a zenében ritmikus hangsorokat kottával, a verstanban rövid és hosszú szótagok válta-

kozását például daktilusokkal és spondeusokkal, vagy önmagában bármely nyelvben a szótagokat betűkkel. A fizikában a hangok, a mondanivaló szerepét a jelenség, a fizikai törvények, míg az írott alak szerepét a képlet tölti be.

Arányosságokat írunk fel, egyenleteket oldunk meg, függvényeket, grafikonokat rajzolunk. *A két tudomány tanulmányozásának összehangolása előfeltétele az eredményes fizikatanulásnak.* Az egyértelmű, hogyha a diákok nem ismerik a leíró nyelvet, akkor nem értik az ezen a nyelven történő leírást sem, akkor nem tudnak önálló jelenségleírásokat konstruálni. Mivel már a jelenség leírása sem történhet így meg, ezért a mély megértés esélytelen.

A mai fizikatanítás során gyakran válik egyoldalúvá a fizikai jelenségek matematikai leírása, és elsikkad a kvalitatív elemzés, a fizikai lényeg megértése. Úgy véljük, hogy a fizikatanítás során növelni kell a kvalitatív

a diákoknak fogalmuk sincs arról, hogy mit is számolnak valójában, még ha meg is kapják a helyes végeredményt

elemzés szerepét. Ez azonban nem vezethet – ellentétes hibaként – a matematikai leírás elhanyagolásához. A gyerekek már a fizika-tanulás elejétől meg kell értetni, hogy a teljesebb fizikai leírás igényli a matematikai eszközök használatát. Korábban a fizika-tankönyvekben a matematikai eszközök használata középiskolai szinten is nagyobb szerepet kapott (Radnóti, 1995). Több olyan fogalmi váltás van a fizika tanulása során, amelyet lényegesen segíthet a matematikai formalizálás. Különösen fontosak a különböző becslések, egyes fizikai mennyiségek nagyságrendjeinek megállapítása. De még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a fizikai jelenségek megértése szempontjából a kvalitatív elemzésnek van döntő jelentősége.

A matematikai leírás bevezetésének fokozatosan kell megtörténnie. Hiába

tanulta már matematikaórán a gyerek a fizikához szükséges ismereteket (ha tanulta), mint azt fentebb írtuk, a transzfer nehéz, az új helyzetben való alkalmazás nem könnyű. Sokszor más betűket is használunk, mint a matematikaórán, továbbá a fizikai mennyiségeknek többnyire mértékegysége is van, amivel szintén matematikai műveleteket végzünk.

A leírt ajánlott módszer szerint a természettudományok integrált szemléletben történő tanítását részben kipróbáltuk. A fizika, a matematika és a kémia között igyekeztünk szoros kapcsolatot teremteni fizika fakultációs tanórák keretében. Az oktatási kísérlet alapján elmondható, hogy eleinte nagyon mehökkentő volt a diákok számára, hogy a tanóra menete igényli a pedagógiai transzfert, és ekkor nem igazán tudnak mit kezdeni a tanulók a számukra teljesen új módszerrel. Valószínűleg nagymértékben közrejátszik ebben, hogy szo-

katlan, teljesen idegen számukra az efféle stílusú tanóra. De amint a transzfer igényének tényével megbarátkoznak a diákok, és megszokják, a fizikatanulás segítségére tud lenni **eszközként** a matematika. A diákok képesek követni az efféle feldolgozási módot, aktív részesei tudnak lenni az ilyen szemléletű tanóráknak. A tapasztalat alapján elmondható, hogy ezúton a tanulók képesek a témakörhöz tartozó fogalmak megkonstruálására. A tanulók ekkor bevezetést kapnak egy, a megszokott középiskolai szemlélettől eltérő felfogás elsajátításához, a **valódi tudományos szemlélet** kialakításához. Közben olyan ismeretekre tesznek

szert fakultáció keretében, amelyet az egyetemen teljesen újként kellene önállóan megszerezniük. Azaz ez az órati-

a mai fizikatanítás során gyakran válik egyoldalúvá a fizikai jelenségek matematikai leírása, és elsikkad a kvalitatív elemzés, a fizikai lényeg megértése

pus egyféle ösvény lehetne a középiskola és az egyetem közötti hatalmas szintkülönbség áthidalásának megkezdésére, ugyanis orvosolni igyekeznek a szükséges szakmai alapok és szemlélet hiányának problémáját. Hiszen a hallgatóknak nem lehet esélytelen elsajátítani olyan kurzusok tananyagát, melyről valamilyen mélységben a **tudományos szemléletnek megfelelően** tanultak. Ekkor nem lép fel pszichikai gát sem az új-tól való megrettenés miatt. Olyan eset sem állhat fenn, hogy nem sikerül kialakítani a szükséges megközelítést, hisz ennek kialakítása már korábban megtörtént (alacsonyabb szinten). **Ám ehhez nem elegendőek a fizikatanárok, és a fizika fakultáció hagyományos keretei!** S még egyszer hangsúlyozva, nagyon lényeges, hogy a **matematika eszközként való használata megfelelő módon** történjen.

Az egyenes, illetve a fordított arányosság fogalmakörét felhasználó fizikai felada-

tokat először célszerű következtetéssel megoldani, mielőtt a képletszerű formát használnánk. Napjainkban már sok fizika-tankönyv, példatár mutatja be mindkét módszerrel a megoldást.

Nem tartjuk követendő példának a szintén elterjedt, úgynevezett segítő háromszögek használatát, mivel ebben az esetben csak mechanikus képletbe való behelyettesítést látnak a gyerekek a fizikai jellegű problémák megoldása során. És nem tartjuk helyesnek az olyan feladatok megoldását sem, amikor pl. egy táblázat hiányzó adatait kell mindössze kiszámítani egy algoritmus segítségével. Ez csak a képletek memorizálásához vezet, de nem lesz mögötte fizikai tartalom.

**Fontos, hogy a gyerekek igazából ne képleteket, hanem összefüggéseket, függvényszerű kapcsolatokat lássanak**

**a fizikai törvények matematikai megfogalmazásai mögött** (Radnóti, 2002).

Kiemelten fontos a függvények szerepe a fizikai leírásmód során, és a jelenségek leírásában, a problémák, feladatok megoldásában, mint például: függvények ábrázolása, függvények menetének, meredekségének, szélsőértékeinek (minimum, maximum) vizsgálata, függvénygörbe alatti terület kiszámítása.

A matematika és a fizikai jelenségek összekapcsolása Galilei nevéhez fűződik, aki elsőként használt függvénykapcsolatot két változó között, mely konkrétan az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás jelenségéhez kapcsolódik. A pillanatnyi sebességet ábrázolta az idő függvényében, és próbálta adott időtartam alatt a megtett utat meghatározni, mely ténylegesen integrálásnak tekinthető (Galilei, 1638/1986; Vekerdí, 1997). Az általa bevezetett módszer vált a

későbbiekben a fizika, majd gyakorlatilag az összes természettudomány alapjává.

## KÉRÉS A MATEMATIKAOKTATÁS FELÉ

A korábbi 3. évfolyamon (ma 11. évfolyam) a differenciálszámítás alapjai, a 4. évfolyamon az integrálszámítás alapjai szerepeltek a tananyagban. Legalább a hatványfüggvények és a sinus-cosinus függvények esetében erre napjainkban is szükség lenne! Továbbá a deriválás és az integrálás

**elvi** alapjainak, szemléletes lényegének ismeretére, hogy miért jó eszköz, és hogyan alkalmazható. E két anyagrész ismereteit már a középiskolás évfolyamokon példaként

lehetne alkalmazni fizikai jelenségekre, mely utólagos rendezőelv lehetne. Azért is fontos lenne az alapvető differenciálszámítási és integrálszámítási ismeretek elsajátítása, mert ezek használatát a felsőfokú alapozó kurzusok nem nélkülözhetik. Ha ezeket a középiskolában elsajátítanák a diákok, nem kéne nagyon rövid idő alatt a matematikai kurzusok során pótolni!

A differenciál- és integrálszámítás elemei a 17. század terméke. Hogyan lehetséges az, hogy a közoktatásban, a 21. században ez kimarad a kötelező tananyagból? Ráadásul óriási szükség van rá világunk működésének leírásához. A diákoknak azonban nincsenek meg a szükséges előzetes tudáselemeik, amelyek hiányában nem tud kialakulni a tárgyalt tudományelemeket illetően megfelelő prekoncepciójuk sem. Ezt a jelenséget értelmezik félre sokan úgy, hogy a tanulók nem elég érettek

a témakörhöz. A 20. század elején írt gimnáziumi matematika-tankönyveknek ezek a fejezetek részei voltak. A fizikatankönyvekben pedig ezeknek a **matematikai eszközöknek a használatával** találkozhatunk (*Radnóti*, 1995).

Az sem indok, hogy akkor kevesebben jártak középiskolába. Hiszen napjainkban jóval többen mennek a felsőoktatásba. Tehát a tananyagnak ezt követnie kell. Továbbá napjainkban a mindennapi élethez is jóval több ismeretre van szüksége az állampolgároknak, mint korábban. Többek között ezért is járnak a diákok tovább iskolába. A középkorban például csak az egyetemen tanították az osztást, mivel az nehéz műveletnek számított, és valóban nem is volt rá szüksége mindenkinek. Sokan nem tudtak írni, olvasni, számolni. De ma már más a helyzet, más jellegű alkalmazható tudásra van szükség, mint akkor. Ezek annyira alapvető ismeretek lettek, hogy az alsó tagozaton szerepelnek tananyagként. Tehát igenis bővíteni is kell a tananyagot, nem pedig csak csökkenteni. A mindennapi életre való felkészítésnél figyelembe kell venni, hogy a technika mindennaposan használt vívmányai a fizika összetett törvényei szerint működnek, sokkal bonyolultabbak, mint a korábbi időkben. Ahhoz, hogy használni tudjuk ezeket, ismernünk kell a működésüket, mert probléma léphet fel, meghibásodhat, nem ideális feltételek közti használatuk akár életveszélyes is lehet. Tehát a mindennapi élethez napjainkban több természettudományos ismeretre van szükség. Ma a gyerekek máshonnan, nem az iskolai oktatásból szerzett ismeretei is sokkal nagyobbak, melyeket az oktatás fel tud, és fel is kell használni; mivel ezek a témák érdeklik is a diákokat.

igenis bővíteni is kell  
a tananyagot, nem pedig  
csak csökkenteni

## ÖSSZEFOGLALÁS

A jelenlegi helyzet tehát a következő: a diákokat a közoktatás évfolyamain nagyon lassan avatjuk be a matematika rejtelmibe, a fogalomépítkezés nagyon fokozatosan, kis lépésekben történik meg. Ebből adódóan sok fogalom később kerül elő abban a formájában, ahogyan arra más tantárgyak esetében szükség lenne. A tananyagcsökkentésnek is köszönhetően a normál középfokú tanulmányok végéről kimaradnak lényeges részek, melyek a diákok nem elhanyagolható részénél komoly problémák

forrása a felsőfokú tanulmányaik kezdetén. Azaz nemcsak az a probléma, hogy sok szükséges fogalom a kelletnél később kerül elő, hanem az is, hogy néhány nem

is kerül tárgyalásra. A lassú fogalomépítés esetében emellett az is előfordulhat, hogy a diákok figyelmét nem sikerül tartósan lekötni, így nem tudnak aktív részesei lenni a tanulási folyamatnak.

Kérdezzük, hogy ez pedagógiailag megengedhető-e? Helyesen cselekszik-e az iskola, ha a közoktatás éve alatt túlzottan lassan halad a tananyag-feldolgozással, mintegy kímélve a diákokat, ami azt vonja maga után, hogy bekerülve a felsőoktatásba, előkészítetlenül „rázúdulnak” a kihagyott részek? A differenciál- és integrálszámítás hiányos tanítása gyakran a leendő fizika szakosokat is érinti, ők sem kapják meg a kellő alapokat. A kevésbé felkészült, matematikát felvételi tantárgyként nem előíró szakokra jelentkező hallgatókra pedig még nagyobb csapást ró a probléma. A szakadék a köz- és felsőoktatás között egyre nő! Ez hatalmas stresszt idéz elő sok diákban, mely meghatározza további tanulmányaik alakulását is, melynek eredménye

az, hogy nem tudják teljesíteni az előírt idő alatt a képzésüket, illetve rosszabb esetben nagyon sokan elhagyják a választott szakot a hozott tudásban való hiányosságaik miatti, nem önhibájukból származó sok-sok átélt kudarcélmény következtében. Egyszerűen fogalmazva: kibuknak az egyetemről. De a közoktatás már nem vállalja a kudarcokért a felelősséget, mondván: nem nálunk

történt a lemorzsolódás, mi leérettségiztetünk, és részünkről az „ügy” be van fejezve. A téma gazdasági elemzését csak érintőlegesen említve, mibe kerül ez a családoknak és az országnak? Ez már nem egy szűk „elit” problémája, hanem széles tömegeket érint, mert évente kb. 70-80 ezer hallgató kezd meg az érettségi után felsőoktatásban a tanulmányait.

## IRODALOM

- Balázs Lóránt, Hronszky Imre és Sain Márton (1981): *Kémia történeti ABC*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Galileo Galilei (1638/1986): *Matematikai érvelések és bizonyítások két új tudományág, a mechanika és a mozgások köréből*. Európa Könyvkiadó, Budapest. (Fordította: Dávid Gábor; Jegyzetek: Gazda István; Utószó: Vekkerdi László.)
- Nagy Mária (2013): *A fizikatanítás pedagógiája: Matematikai eszközök alkalmazása a fizika tanításában*. TDK-dolgozat. Témavezető: Radnóti Katalin.
- Nemzeti alaptanterv 2012. Letöltés: [http://www.ofi.hu/sites/default/files/attachments/mk\\_nat\\_20121.pdf](http://www.ofi.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf) (2014.07.31.)
- Kerettantervek 2012. Letöltés: <http://kerettanterv.ofi.hu/> (2013.07.07.)
- Pálfalvi Józsefné (2009): Szintfelmérő dolgozatok az ELTE TTK-n 2006-2008. *A matematika tanítása*. 17. 5. sz.
- Radnóti Katalin (1995): Komplex természettudomány a magyar fizikatanácskönyvek tükrében régen és ma. *Iskolakultúra*, 5. 8-9. sz. 79-94.
- Radnóti Katalin (2007): Miért buknak meg jelentős számban az elsőéves egyetemisták? *Új Pedagógiai Szemle*, 57. 11. sz. 42-49.
- Radnóti Katalin (2002): Különböző tudományterületek kapcsolatai a fizikával. In: Radnóti Katalin és Nahalka István (szerk.): *A fizikatanítás pedagógiája*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 62-108.
- Sain Márton (1978): *Matematika-történeti ABC*. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Vekkerdi László (1997): *Így él Galilei*. Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest.



**BALOGH KATALIN** – *Titokzatos utak kanyarognak ide-oda. A nap megcsillan a víz tükreben, s a növények zizegése egyszerűen gyönyörűséges. Ezek mind a japán kert titkai.*