

# A fényrács vektoregyenlete

## The Vector Equation of the Diffraction Grating

### Ecuatia vectorială a rețelei optice

BÍRÓ Tibor

Sapientia Egyetem, Műszaki és Humán Tudományok Kar, Marosvásárhely  
biro17@freemail.hu

#### ABSTRACT

*Any light ray, incident on a plain diffraction grating, produces a reflected and a transmitted system of light rays. As both incident and diffracted rays can be characterized by vectors, we will assign vectors to the diffraction grating as well. We are searching a vector equation whose solutions describe the rays diffracted on the grating. The obtained equation – that will be called the vector equation of the diffraction grating – can be directly applied for any plain – both linear and crossed – grating, and for incident rays of any direction.*

#### ÖSSZEFOGLALÓ

*Egy síkrácsra eső fénysugár létrehozza a visszaverődéses, valamint az átmenő elhajlási sugarak rendszerét. Mivel, mind a beeső, mind az elhajlási sugarak irányához vektorokat használunk, vektorokat rendelünk a fényrácsra is. Keresünk egy olyan vektoregyenletet, melynek megoldásai éppen a rácson diffraktált sugarak vektorai. A kapott egyenlet – a fényrács vektoregyenlete – közvetlenül használható bármely sík vonal-, illetve keresztrácsra eső, bárhonnan érkező beeső sugár esetére.*

#### 1. BEVEZETÉS

Ismert, hogy a fényvisszaverődés és -törés jelensége egységvektorokkal egyszerűen leírható [1],[2],[3]. Célunk, hogy ehhez hasonlóan alkalmazzuk a vektoros tárgyalásmódot, a fény rácson történő elhajlásánál is!

Essen az ismert jellemzőkkel rendelkező, egyszerre áteresztő és visszaverő fényrácsra, bármely szög alatt, egy  $\lambda$  hullámhosszú, sík, koherens, fényhullám, mely ezen elhajlást szenved. A fényrács lehet sík-, vonalrács vagy keresztrács.

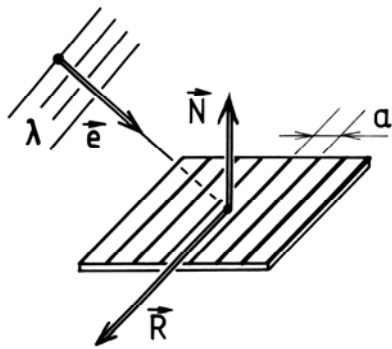
Keressünk egy olyan vektoregyenletet, amelyet az összes – átmenő és visszavert – elhajlási sugár egységvektora kielégít, tartalmazván a beeső sugár valamint a fényrács jellemzőit.

Ezt tekinthetjük a *rácson létrejövő fényelhajlás vektoregyenletének*.

A sík fényrácsok jellemzésére, és térbeli helyzetének megadására használjunk vektorokat!

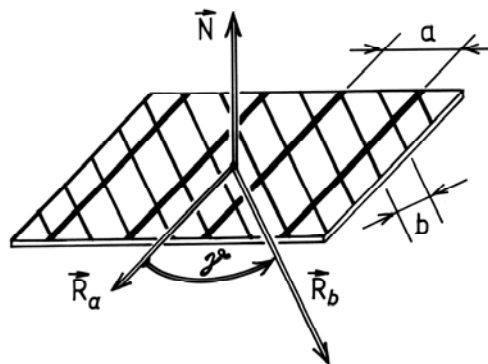
- A fényrács síkjának helyzetét a rá merőleges, (normális)  $\vec{N}$  egységvektorával adjuk meg.
- Vezessük be, a *vonlárács* sűrűsége és egyúttal a vonalak térbeli iránya megadása céljából, az  $\vec{R}$  *rácsvektort* (nevezzük így!).  $\vec{R}$  legyen párhuzamos a rácsvonalakkal és nagysága  $|\vec{R}| = R = 1/a$ , ahol  $a$  a rács vonalainak távolsága:  $[R_{s,l}] = 1/m$ , (1. ábra).
- A *keresztrácsot* pedig próbáljuk úgy elképzelni, mint két egymásra fektetett, vagyis azonos síkban fekvő,  $\mathbf{a}$  valamint  $\mathbf{b}$  állandójú „ $\mathbf{a}$ ” és „ $\mathbf{b}$ ” vonalrácsot (2. ábra). Az „ $\mathbf{a}$ ” és „ $\mathbf{b}$ ” vonalrácsokhoz viszont az  $\vec{R}_a$  és  $\vec{R}_b$  rácsvektorok tartoznak:  $R_a = 1/a$ ,  $R_b = 1/b$ . Ezért a keresztrács az  $\vec{R}_a$  és  $\vec{R}_b$  rácsvektorok együttesével jellemezhető, melyek szöge  $\gamma$ .
- A rácsra eső,  $\lambda$  hullámhosszú fénysugár irányát a ráhelyezett  $\vec{e}$  egységvektorral adjuk meg,  $|\vec{e}| = 1$

A térbeli rácsokra a diffrakciós irányok megkeresése jól kidolgozott [4], ezért ezt alkalmazni fogjuk a síkrácsok sajátos esetére.



1. ábra

A vonalrácshoz rendelt egységvektorok

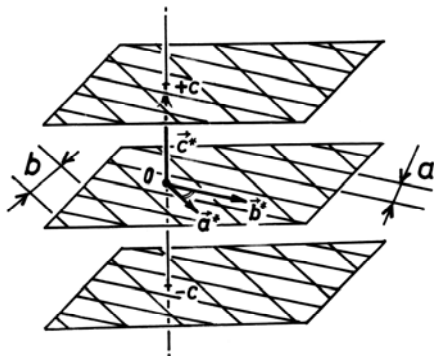


2. ábra

A kereszt rácshoz rendelt egységvektorok

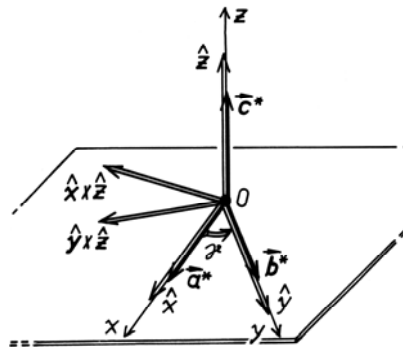
## 2. A KERESZTRÁCS VEKTOREGYENLETE

Bármely sík-keresztrácshoz, az említett szerkezetnek megfelelően, választhatunk két elemi eltolási vektort, jelölje ezeket  $\vec{a}^*$  és  $\vec{b}^*$ . Ezekkel az  $\vec{a}^*$  és  $\vec{b}^*$  eltolási vektorokkal megadott sík-keresztrács segítségével, képezzünk egy tér-rácsot, úgy, hogy ennek síkját – normálisa mentén – önmagával párhuzamosan egy  $\vec{c}^*$  vektorral rendre eltoljuk (3. ábra).



3. ábra

A kereszt rácccsal képezett térrács és eltolási vektorai



4. ábra

A térrácshoz rögzített koordinátarendszer

Tételezzük fel, hogy az így szerkesztett tér-rács minden rácspontjához a beeső fény egyformán eljut és az általuk szórt fény (melyek interferenciája révén az elhajlási sugarak létrejönnek)  $\lambda'$  hullámhossza változatlan marad:  $\lambda' = \lambda$ .

Ehhez, a sajátosan szerkesztett,  $\vec{a}^*$ ,  $\vec{b}^*$ ,  $\vec{c}^*$  elemi eltolási vektorokkal rendelkező térrácshoz, rögzítsük az  $x, y, z, O$  koordináta-rendszert, melynek egységvektorai  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , és  $\hat{z}$  (4. ábra).

$$\text{Ebben felírható, hogy: } \begin{cases} \vec{a}^* = a^* \cdot \hat{x} \\ \vec{b}^* = b^* \cdot \hat{y} \\ \vec{c}^* = c^* \cdot \hat{z} \end{cases} \text{ és még } \begin{cases} \hat{z} = \vec{N} \\ \vec{a}^* \perp \vec{N} \\ \vec{b}^* \perp \vec{N} \end{cases}$$

A térrácsra eső, valamint az ezt elhagyó elhajlási sugár egységvektorai  $\vec{e}$  és  $\vec{e}'$ , így a nekik megfelelő hullámvektorok  $\vec{K} = (2\pi/\lambda) \cdot \vec{e}$  és  $\vec{K}' = (2\pi/\lambda) \cdot \vec{e}'$

A létrehozott térrács reciprok rácsának segítségével kapcsolatot teremtünk a  $\vec{K}$  és  $\vec{K}'$  hullámvektorok között, amely elvezet az  $\vec{e}'$  meghatározásához.

A rács  $\vec{a}^*$ ,  $\vec{b}^*$ ,  $\vec{c}^*$  elemi eltolási vektoraival megszerkesztjük reciprok rácsának  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  alapvektorait; (nagyjából a [4] jelöléseit használjuk!):

$$\begin{cases} \vec{A} = 2\pi \frac{(\vec{b}^* \times \vec{c}^*)}{\vec{a}^* \cdot (\vec{b}^* \times \vec{c}^*)} = 2\pi \frac{b^* c^* (\hat{y} \times \hat{z})}{a^* b^* c^* \sin \gamma} = 2\pi \frac{(\hat{y} \times \hat{z})}{a^* \sin \gamma} \\ \vec{B} = 2\pi \frac{(\vec{a}^* \times \vec{c}^*)}{V} = 2\pi \frac{a^* c^* (\hat{x} \times \hat{z})}{a^* b^* c^* \sin \gamma} = 2\pi \frac{(\hat{x} \times \hat{z})}{b^* \sin \gamma} \\ \vec{C} = 2\pi \frac{(\vec{a}^* \times \vec{b}^*)}{V} = 2\pi \frac{a^* b^* (\hat{x} \times \hat{y})}{a^* b^* c^* \sin \gamma} = 2\pi \frac{1 \cdot 1 \cdot \hat{z} \sin \gamma}{c^* \sin \gamma} = 2\pi \frac{\hat{z}}{c^*} \end{cases}$$

V az elemi cella térfogata:

$$V = \vec{a}^* \cdot (\vec{b}^* \times \vec{c}^*) = a^* [\hat{x} \cdot (\hat{y} \times \hat{z})] b^* c^* = a^* b^* c^* \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - \gamma) = a^* b^* c^* \sin \gamma.$$

Ezekkel az alapvektorokkal megadhatók a reciprokrács  $\vec{G}$  vektorai:

$$\vec{G} = n_a \vec{A} + n_b \vec{B} + n_c \vec{C}.$$

Az  $n_a, n_b, n_c$  egész-szám értékeire, a  $\vec{G}$ , a reciprokrács csomópontjait határozza meg. Amennyiben a hullámvektor változása  $\Delta \vec{K} = \vec{K}' - \vec{K}$  éppen egybeesik valamelyik reciprokrács csomópontot megadó  $\vec{G}$  reciprokrács-vektorral, akkor a diffrakció-maximum LAUE-féle feltételei teljesülnek:  $\Delta \vec{K} = \vec{G}$ . Részletesebben:

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}' - \vec{K} = (2\pi/\lambda) \vec{e}' - (2\pi/\lambda) \vec{e},$$

és

$$\vec{G} = n_a \frac{2\pi(\hat{y} \times \hat{z})}{a^* \sin \gamma} + n_b \frac{2\pi(\hat{x} \times \hat{z})}{b^* \sin \gamma} + n_c \frac{2\pi \hat{z}}{c^*},$$

vagyis:

$$(2\pi/\lambda)(\vec{e}' - \vec{e}) = n_a \frac{2\pi(\hat{y} \times \hat{z})}{a^* \sin \gamma} + n_b \frac{2\pi(\hat{x} \times \hat{z})}{b^* \sin \gamma} + n_c \frac{2\pi \hat{z}}{c^*},$$

és mivel  $a^* \sin \gamma = a$ ,  $b^* \sin \gamma = b$ ,  $c^* = c$  (5. ábra):

$$\vec{e}' - \vec{e} = n_a \frac{\lambda(\hat{y} \times \hat{z})}{a} + n_b \frac{\lambda(\hat{x} \times \hat{z})}{b} + n_c \frac{\lambda \hat{z}}{c} \quad \left| \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \right.$$

A fenti egyenlőséget  $\hat{z}$ -ral vektorosan szorozva a tér-rácsról visszatérünk a sík-keresztrácsra:

$$(\vec{e}' - \vec{e}) \times \hat{z} = n_a \frac{\lambda(\hat{y} \times \hat{z}) \times \hat{z}}{a} + n_b \frac{\lambda(\hat{x} \times \hat{z}) \times \hat{z}}{b} + n_c \frac{\lambda(\hat{z} \times \hat{z})}{c}.$$

A 4. ábra alapján:  $(\hat{y} \times \hat{z}) \times \hat{z} = -\hat{y}$ ,  $(\hat{x} \times \hat{z}) \times \hat{z} = -\hat{x}$ ,  $(\hat{z} \times \hat{z}) = 0$ , így

$$(\vec{e}' - \vec{e}) \times \hat{z} = -n_a \frac{\lambda \hat{y}}{a} - n_b \frac{\lambda \hat{x}}{b}.$$

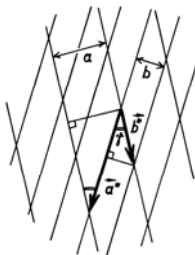
De mivel:  $\hat{z} = \vec{N}$ ,  $\hat{y}/a = \vec{R}_a$ ,  $\hat{x}/b = \vec{R}_b$ , kapjuk, hogy:

$$(\vec{e}' - \vec{e}) \times \vec{N} = -n_a \lambda \vec{R}_a - n_b \lambda \vec{R}_b.$$

Nyilván, minden egyes egész-számok alkotta  $(n_a, n_b)$  számpárnál, amelyre az egyenlet megoldható, létezik egy bizonyos  $\vec{e}'$  elhajlási sugár, ezt *megfelelőbb*, ha  $\vec{e}_{n_a n_b}$ -vel jelöljük, ( $n_a$  és  $n_b$  a megfelelő diffraktált sugár rendszámjai).

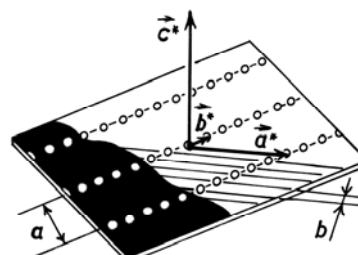
Így, a sík-keresztrács keresett vektoregyenlete:

$$(\vec{e}_{n_a n_b} - \vec{e}) \times \vec{N} + n_a \lambda \vec{R}_a + n_b \lambda \vec{R}_b = 0.$$



5. ábra

A keresztrács eltolási vektorai és rácsállandói



6. ábra

Átmenet keresztrácsról vonalrácsra

### 3. A VONALRÁCS VEKTOREGYENLETE

Keresztrácsból vonalrácsot kaphatunk, ha ennek egyik összetevő vonalrácsát, például a „b” rácsot annyira összesűrítjük, hogy a  $\vec{b}^*$  irányú fényt szóró rácspon-t-sorai tulajdonképpen vonalakká álljanak össze (6. ábra). Ez bekövetkezik, ha  $\vec{b}^* \rightarrow 0$ , illetve ha  $b \rightarrow 0$ , de, mivel  $|\vec{R}_b| = 1/b$  következik, hogy ekkor  $|\vec{R}_b| \rightarrow \infty$ .

Látható, hogy ezen elfajult keresztrács vektoregyenletének csak az  $n_b = 0$  értékre van értelme, így a vonalrácsra:  $(\vec{e}_{n_a,0} - \vec{e}) \times \vec{N} + n_a \lambda \vec{R}_a = 0$ .

Ez egyszerűbben is felírható, mivel most csak egy vonalrács van. Ennél az elhajlási sugár rendszáma  $n_a = n$ ,  $\vec{e}_{n_a,0} = \vec{e}_n$  és  $\vec{R}_a = \vec{R}$ , ezért a sík-vonalrács vektoregyenlete:

$$(\vec{e}_n - \vec{e}) \times \vec{N} + n \lambda \vec{R} = 0.$$

### 4. A KERESZTRÁCS VEKTOREGYENLETÉNEK MEGOLDÁSA

Célunk:

- Megvizsgálni a vektoregyenlet megoldásai által szolgáltatott elhajlási sugáregyüttest;
- ezek közül néhányat kísérletileg is kivitelezni;
- majd összehasonlítani.

Az irányok rögzítése céljából helyezzük a keresztrácsot egy úján felvett  $x, y, z, O$  derékszögű koordinátarendszer ( $O$ ) kezdőpontjához, úgy, hogy az összetevő rácsok egyike (például most az „a” rács, vagyis az  $\vec{R}_a$ ) az  $Ox$ , és normálisa ( $\vec{N}$ ) az  $Oz$  irányba mutasson!

Jelölje  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  az új koordinátarendszer tengelyirányú egységvektorait. Mivel az  $\vec{R}_a$  az  $Ox$  tengelyen fekszik, és  $\vec{R}_b$  vele – az  $xyO$  síkban –  $\gamma$  szöveget alkot (7. ábra), ezek vektorösszetevői:

$$\vec{R}_a \begin{cases} R_{ax} = R_a = 1/a \\ R_{ay} = 0 \\ R_{az} = 0 \end{cases}, \vec{R}_b \begin{cases} R_{bx} = R_b \cos \gamma = \cos \gamma / b \\ R_{by} = R_b \sin \gamma = \sin \gamma / b \\ R_{bz} = 0 \end{cases}, \vec{N} \begin{cases} N_x = 0 \\ N_y = 0 \\ N_z = 1 \end{cases}.$$

A rácsra eső  $\vec{e}$ , valamint az  $n_a, n_b$ -rendű  $\vec{e}_{n_a n_b}$  elhajlási sugár egységvektorának összetevői viszont:

$$\vec{e} \begin{cases} e_x = \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ e_y = \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ e_z = -\cos \alpha \end{cases} \text{ és } \vec{e}_{n_a n_b} \begin{cases} e_{n_a n_b x} = ? \\ e_{n_a n_b y} = ? \\ e_{n_a n_b z} = ? \end{cases}.$$

A keresztrács vektoregyenlete általában:

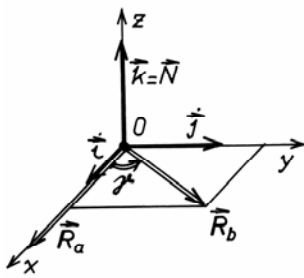
$$(\vec{e}_{n_a n_b} - \vec{e}) \times \vec{N} + n_a \lambda \vec{R}_a + n_b \lambda \vec{R}_b = 0,$$

melynek megoldása:

$$\vec{e}_{n_a n_b} \begin{cases} e_{n_a n_b x} = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \lambda n_b \cdot R_b \cdot \sin \gamma \\ e_{n_a n_b y} = \sin \alpha \cdot \sin \beta - \lambda (n_a \cdot R_a + n_b \cdot R_b \cos \gamma) \\ e_{n_a n_b z} = \pm \sqrt{1 - e_{n_a n_b x}^2 - e_{n_a n_b y}^2} \end{cases}.$$

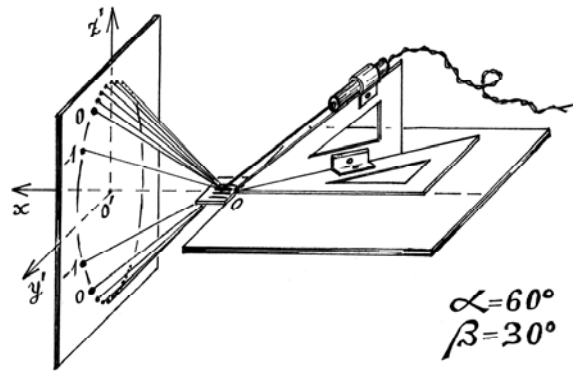
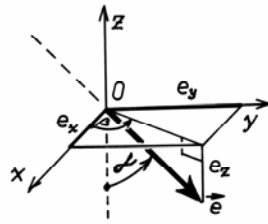
Ha az elhajlási sugár:

- visszaverődő (reflektált  $\mathbf{r}$ ):  $e_{n_a n_b z} = +\sqrt{1 - e_{n_a n_b x}^2 - e_{n_a n_b y}^2} > 0$ ,
- átmenő (transzmissziós  $\mathbf{t}$ ):  $e_{n_a n_b z} = -\sqrt{1 - e_{n_a n_b x}^2 - e_{n_a n_b y}^2} < 0$ .



7. ábra

A keresztrácshoz rögzített koordinátarendszer és a beeső sugár irányát meghatározó  $\alpha$  és  $\beta$  szögek



8. ábra

A fényrácsos kísérleteknél használt egyszerű berendezés

## 5. A VONALRÁCS VEKTOREGYENLETÉNEK MEGOLDÁSA

Amint a vonalrác vektoregyenletének levezetésénél láttuk az  $n_b = 0$ , amelyet behelyettesítve a keresztrácsnál kapott megoldásba, azonnal adódik a vonalrácé is:

$$\vec{e}_n \begin{cases} e_{nx} = \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ e_{ny} = \sin \alpha \cdot \sin \beta - \lambda n R \\ e_{nz} = \pm \sqrt{\cos^2 \alpha + 2 \lambda n R \sin \alpha \cdot \sin \beta - \lambda^2 R^2 n^2} \end{cases} .$$

## 6. AZ ELHAJLÁSI SUGARAK IRÁNYÁNAK VIZSGÁLATA

### 6.1. Keresztrác esete

Mekkora szöget alkot az  $n_a, n_b$  rendszámú elhajlási sugár a keresztrác  $\vec{R}_a$  és  $\vec{R}_b$  vektoraival?

Az elhajlási sugár egységvektorának a rácsvektorral való skaláris szorzatát képezve,

$$\vec{e}_{n_a n_b} \cdot \vec{R}_a = |\vec{e}_{n_a n_b}| \cdot |\vec{R}_a| \cdot \cos \rho_{n_a n_b \vec{R}_a} = e_{n_a n_b x} \cdot R_{ax} ,$$

amiből szögük meghatározható:

$$\cos \rho_{n_a n_b \vec{R}_a} = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \lambda n_b R_b \sin \gamma .$$

Teljesen hasonlóan:  $\cos \rho_{n_a n_b \vec{R}_b} = \sin \alpha \cdot \cos(\beta - \gamma) - \lambda n_a R_a \sin \gamma .$

Következtetés:

- Amint látható, a  $\rho_{n_a n_b \vec{R}_a}$  szög nem függ az  $n_a$ -tól, így adott  $n_b$  rendszám esetén az összes  $n_a$  rendszámú  $\vec{e}_{n_a n_b}$  elhajlási sugár az  $\vec{R}_a$  rácsvektorral (esetünkben az  $0x$  tengellyel is) azonos  $\rho_{n_b \vec{R}_a}$  szöget alkot. Ezért ezek egy  $\vec{R}_a$  tengelyű *körkúp felületén* (mint alkotók) vannak.
- Hasonlóan, a  $\rho_{n_a n_b \vec{R}_b}$  szög független az  $n_b$ -től, amiért adott  $n_b$  esetén az  $\vec{e}_{n_a n_b}$  az  $\vec{R}_b$ -vel, minden  $n_a$ -ra, azonos szöget zár be, így ezek az  $\vec{R}_b$  tengelyű *körkúp felületének* az alkotói.
- Így, *általánosan* kijelenthető, hogy az elhajlási sugarak az  $\vec{R}_a$ , valamint az  $\vec{R}_b$  tengelyű, közös  $O$  csúcspontú, két *körkúp-rendszer* felületeinek a metszésvonalain fekszenek! (Egyaránt, ha ezek transzmissziós, vagy akár reflexiós sugarak.)
- Helyezzünk az elhajlási sugarak útjába egy *vetítőernyőt*. Az ernyő síkjával metszve a két körkúp rendszerét, rajta két kúpszeletsort kapunk. Ezen *kúpszeletek metszéspontjaiban* jelennek meg az interferencia fényfoltjai.

## 6.2. Vonalrács esete

Jelölje  $\rho_{n\vec{R}}$  a vonalrács  $\vec{R}$  vektorának az  $n$ -ed rendű,  $\vec{e}_n$ , elhajlási sugárral alkotott szögét. Ezt, azonnal megkapjuk, ha a  $\rho_{n_a n_b \vec{R}_a}$  kifejezésébe az  $n_b = 0$  értéket behelyettesítjük. Így:  $\cos \rho_{n\vec{R}} = \sin \alpha \cdot \cos \beta$ .

Következtetés:

- Mivel a  $\rho_{n\vec{R}}$  szög kizárólag a beeső sugár rácshoz viszonyított  $(\alpha, \beta)$  beállításától függ, bármely rendű rácson elhajlott sugár, az  $\vec{R}$  rácsvektorral – azaz a rács vonalaival – azonos szöget alkot! Így nyilvánvaló, a diffraktált sugarak az  $\vec{R}$  tengelyű,  $\rho_{n\vec{R}} = \rho$  nyílásszögű *körkúp* palástjának alkotói lesznek.
- Belátható még, hogy ez a  $\rho$  szög éppen a beeső ( $\vec{e}$ ) sugárnak az  $Ox$  tengellyel alkotott szögével egyenlő.

## 7. KÍSÉRLETEK FÉNYRÁCSOKKAL

Következtetéseink helyességének igazolására világítsunk meg néhány kereszt-, illetve vonalrácsot egy  $P=10mW$ -os félvezetőlézer elég erős, keskeny, koherens, vörös sugarával ( $\lambda=655nm$ ). A kísérlet könnyebb kivitelezhetősége kedvéért a 8. ábra szerint összeállított *egyszerű* berendezést használjuk. A rácson elhajlott visszatérő (**r**), valamint áthaladó (**t**) sugárkévék létrehozta fényfoltok – ugyanazon a vetítőernyőn történő – felfogására, helyezzük ennek  $O'y'z'$  síkját merőlegesen az  $Ox$  tengelyre. (A fényrácshoz továbbra is az előzőekben használt  $Oxyz$  derékszögű koordinátarendszer van rögzítve.)

Megjegyzés:

- Szokványosan, a fényfelfogó ernyőt, vagy a beeső sugárra, vagy ennek a rácssíkról visszatükrözött irányára, *merőlegesen* helyezik el. Nyilván vektoregyenletünkkel tanulmányozható az így kivetített diffrakciós kép is.
- A rács vektoregyenlete csak az elhajlási sugarak irányára vonatkozik, nem ad tájékoztatást azok viszonylagos fényerősségéről, amely – egyébként – a rendszám növekedésével csökken.

## 8. AZ ERNYŐRE KIVETÍTETT FÉNYFOLTOK HELYZETÉNEK MEGHATÁROZÁSA

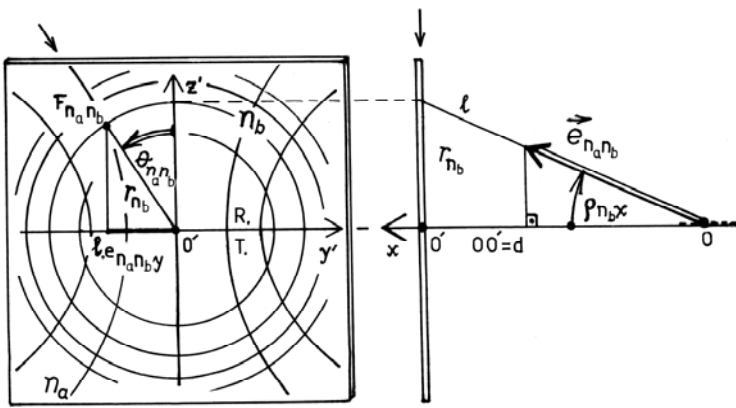
Határozzuk meg az ernyőn (az  $O'y'z'$  síkban) az „F” fényfolt  $(r, \theta)$  polár koordinátáit. Az  $Ox$  tengelyre merőleges síkú vetítőernyő rácstól mért távolsága legyen  $d$  ( $d=OO'$ ).

### 8.1. Keresztrács esete

Az  $n_b$ -hez tartozó körkúpnak a tengelyére merőleges ernyő-síkkal való metszésvonala egy  $r_{n_a n_b} = r_{n_b}$  sugarú kör. Mivel ismert az  $F_{n_a n_b}$  fényfolthoz mutató  $\vec{e}_{n_a n_b}$  egységvektor  $Ox$  tengellyel (az  $\vec{R}_a$ -val) alkotott  $\rho_{n_b \vec{R}_a} = \rho_{n_b x}$  szöge, az  $r_{n_b}$  sugár kiszámítható (9. ábra):  $r_{n_b} = d \cdot \operatorname{tg} \rho_{n_b \vec{R}_a}$ .

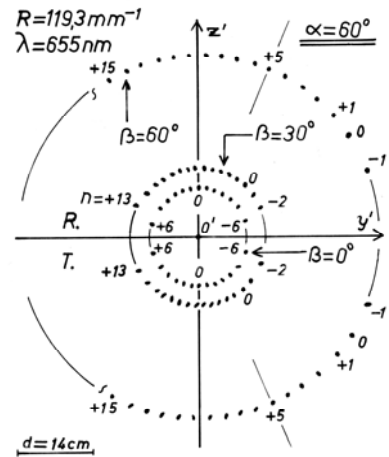
Az  $F_{n_a n_b}$  fényfolthoz tartozó  $\vec{O'F}_{n_a n_b}$  helyzetvektor  $O'z'$  tengellyel – a normális irányával – alkotott szögét jelölje  $\theta_{n_a n_b}$ . Ezt, az ábra alapján, mind az átmenő (t) mind a visszaverődéses (r) sugarak esetére kiszámítva, kapjuk:

$$\sin \theta_{n_a n_b (r)} = \sin(-\theta_{n_a n_b (t)}) = \frac{\lambda(n_a R_a + n_b R_b \cos \gamma) - \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - (\sin \alpha \cos \beta + n_b \lambda R_b \sin \gamma)^2}}.$$



9. ábra

A fényfoltok polár-koordinátái  $(r, \theta)$  a vetítőernyőn



10. ábra

Fényelhajlás vonalrácson:  
 $\alpha = 60^\circ$ -nál  $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$

## 8.2. Vonalrács esete

A vonalrács összefüggéseihez az  $n_b = 0$  esetén jutunk. Ennél  $R = R_a$ . Jelölje a fényfoltot:  $F_n = F_{n_a(n_b=0)}$  amely az  $r = r_{n_b=0} = d \cdot \tan \rho$  sugarú körön van és a normálissal alkotott szöge legyen  $\theta_n = \theta_{n_a, n_b=0}$ .

$$\sin \theta_{n(r)} = \sin(-\theta_{n(t)}) = \frac{\lambda n R - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}}$$

## 9. FÉNYELHAJLÁSI KÍSÉRLETEK EGY VONAL- ÉS EGY KERESZTRÁCSON

Kísérleteinket, a már említett, egyszerű berendezéssel végezzük. Amennyiben a beeső-, vörös-lézersugár irányát meghatározó  $\alpha$  és  $\beta$  szögek értékét a  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ -ra korlátozzuk, akkor ezeket néhány derékszögű vonalzó megfelelő elhelyezésével könnyen beállíthatjuk.

A kivetített fényfoltokat papírra rajzolásuk után azonosítjuk rendszámaikkal, majd *lemérjük* az  $r$  és  $\theta$  polár koordinátáit. Ezt követően, az összehasonlítás céljából, e fényfoltoknak a koordinátáit *ki is számítjuk*.

### 9.1. Vonalrács esete

A plexi lapra karcolt,  $119,3$  vonal/mm-es, didaktikai célra készült vonalrács állandója  $a = 10^{-3} \text{ m} / 119,3 = 8,382 \mu\text{m}$ , rácsvektora  $|\vec{R}| = 1/a = 1,193 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ .

A fényrácstól három *különböző* irányból „ferdén” (tehát nem a vonalakra merőlegesen) megvilágító sugár diffrakciós ábráját ugyanarra a papírlapra rajzolva láthatjuk (10. ábra). Mindháromnál a rács-ernyő távolság  $d = 14 \text{ cm}$  és a beeső sugárnak a rács normálisával alkotott szöge  $\alpha = 60^\circ$ . A  $\beta$  viszont rendre  $0^\circ, 30^\circ$ , és  $60^\circ$ . A fény hullámhossza  $\lambda = 655 \text{ nm}$ .

Kiszámítjuk, és le is mérjük az ernyőn az interferencia létrehozta fényfoltok ( $\approx$  pontok)  $r$  és  $\theta$  koordinátáit, majd ezeket összehasonlítjuk. *Jó az egyezés*, bármely diffraktált sugárnál a megfelelő mért és számított értékénél a hiba úgy 1% körüli, amely ennél a mérési eljárásnál nyilván nem veendő figyelembe.

### 9.2. Keresztrács esete

Keresztrácsként szolgáljon egy nagyon vékony *fém-rostalemez*, mely tulajdonképpen egy vidikoncső szitája. Ez egy *négyzetes* ( $\gamma = 90^\circ$ ) keresztrács, mért rácsállandói  $a = b = 34 \mu\text{m}$ , rácsvektorai  $R_a = R_b = 1/34 \mu\text{m} = 2,94 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ .

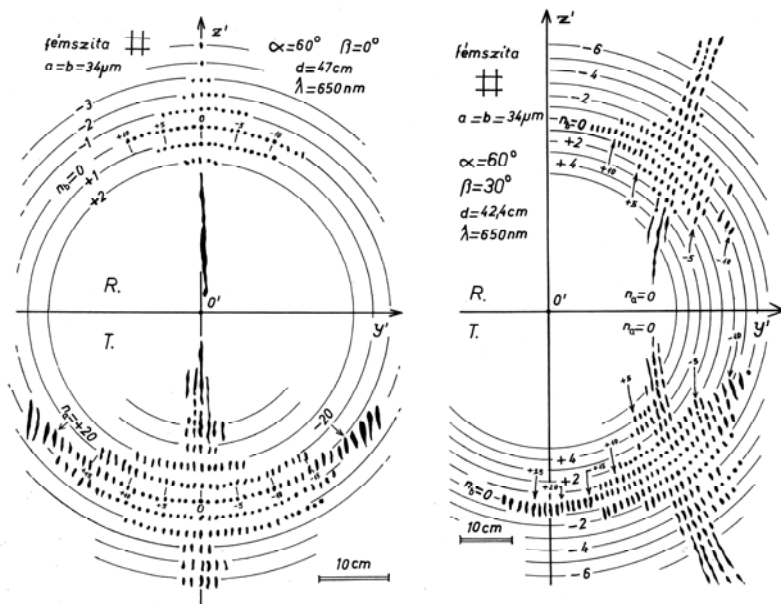
Kísérletünkhöz továbbra is az előbbi berendezést használjuk, és:

- a keresztrács elhelyezésénél  $\vec{R}_a$  mutasson az  $Ox$  tengely irányába;
- az ernyő síkja legyen merőleges az  $Ox$  tengelyre;

- az általánosság megszorítása nélkül, a könnyebb beállítás kedvéért, a beeső sugár alkotson a normálissal állandóan  $\alpha = 60^\circ$ -os szöget, míg a  $\beta$  szöget állítsuk sorra  $\beta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ -os értékekre ( $\alpha, \beta, \gamma$  értelmezése a 7. ábra szerint).

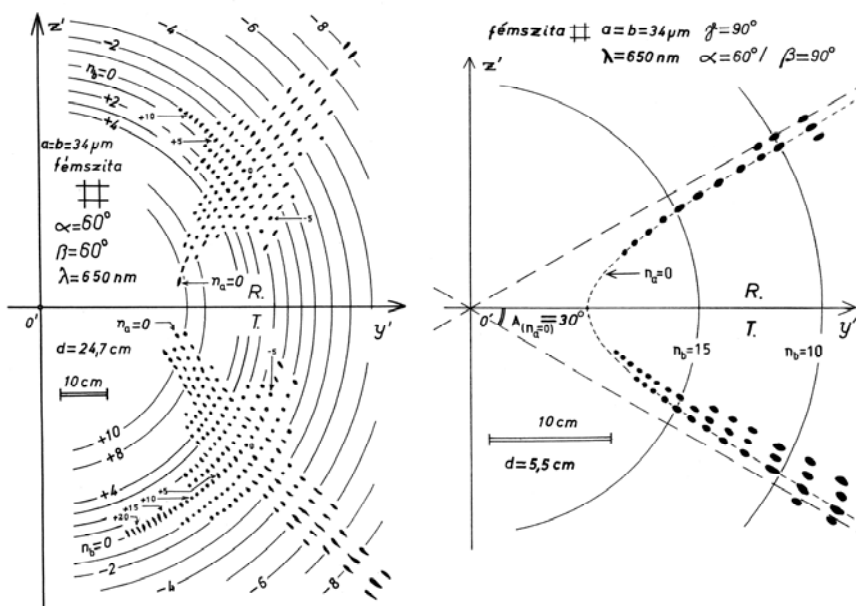
A kivetített interferencia fényfoltokat papírlapra rárajzolva láthatjuk a 11. és a 12. ábrákon. A fényerősebb (r), valamint a (t) interferencia fényfoltok közül néhányat taláломra kiválasztunk és azonosítjuk az  $n_a n_b$  rendszám-párjával. Ezeknél, az  $F_{n_a n_b}$  foltoknál, lemérjük, valamint ki is számítjuk az  $r_{n_b}, \theta_{n_a n_b}$  koordinátáik értékét.

Példa legyen erre az  $\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ$  beállítás mellett felvett rajz (12. ábra). A szemléletességért az ábrára az  $r_{n_b, \text{számított}}$  sugarú köröket is feltüntettük. A fényfoltok polár-koordinátáinak a *mért* és a *számított* értékei *jól egyeznek*. Ez látható több, taláломra kiválasztott fényfolt mért és számított adatait tartalmazó 1. táblázatban.



11. ábra

Fényelhajlás kereszttrácson:  $\alpha = 60^\circ$ -nál  $\beta = 0^\circ, 30^\circ$



12. ábra

Fényelhajlás kereszttrácson:  $\alpha = 60^\circ$ -nál  $\beta = 60^\circ, 90^\circ$



1. táblázat:  
A keresztrács néhány diffrakciós sugara, ernyőn mért és a számított, polár-koordinátájának táblázata

$\alpha=60^\circ \mid \beta=60^\circ \mid d = 24,7 \text{ cm} \mid \lambda = 655 \text{ nm} \mid a = b = 34 \text{ } \mu\text{m} \mid \text{fémiszita} \mid \text{a } \theta \text{ szög fokban mérve}$

$n_a \backslash n_b$	-5	-2	0	+2	+5	+9	+13	+22	$R_{n_b}$ (cm) számított						
-6		+56,26	+55,5 -55,8	+52,27	+51,8 -51,9	+48,61	+48,0 -48,2		73,78						
-2	+67,50	+59,10	+58,4 -58,2	+54,70	+54,6 -54,1	+50,74	+50,1 -50,5	+45,34 +45 -44,9	+38,87 +38,6	57,55					
-1	+68,38	+67,0 -67,2	+60,01	+59,5 -59,3	+55,47	+55,0 -55,0	+51,40	+51,2 -50,7	+45,89 +45,4 -45,7	+39,30 +39,2	+33,28 +32,7	54,89			
0	+69,87	+69,0 -68,7	+61,00	+60,8 -60,2	+56,31	+56,3 -55,7	+52,12	+52,2 -51,9	+46,49	+46,2 -46	+39,77	+39,5 -40,0	+33,66 +33,8	+21,22 +20,5	51,41
+1	+71,61	+70,7 -70,8	+62,14	+61,5 -61,8	+57,23	+56,8 -57,2	+52,91	+52,5 -52,8	+47,13	+46,9 -46,8	+40,28	+39,7	+34,06		48,70
+2		+63,40	+63,0 -63,0	+58,26	+58,1 -57,9	+53,78	+53,8 -53,5	+47,84	+47,8 -47,8	+40,83	+40,6				46,20
+4		+66,46	+66,3 -66,0	+60,69	+60,6 -60,7	+55,81	+55,9 -56,0	+49,46	+49,5						41,65
+8				+67,89	+68,2 -68,1	+61,51	+61,6								34,05

Következtetés: Mind a vonal-, mind a keresztrácsnál, az elhajlási sugarak egyenletből számított iránya egyezik a kísérletivel. Ez nyilván vektoregyenleteik helyességét igazolja.

## 10. KÉT FELADAT A FÉNYRÁCSRA VISSZATÜKRÖZÖTT ELHAJLÁSI SUGARAKKAL

### 10.1. Első feladat

Egy áteresztő-visszaverő vonalrácsra eső  $\vec{e}$  egységvektorú lézersugár beesési pontjába, a  $T'$  és  $T''$  tükrökkel, tükrözzük vissza az  $n'$  és  $n''$  rendű  $\vec{e}_{n'}$ ,  $\vec{e}_{n''}$  elhajlási sugarakat! Mindkét visszatérített sugár a rácson újból diffraktál, létrehozván az  $m'$ , valamint  $m''$  rendű  $\vec{e}_{m'}$  és  $\vec{e}_{m''}$  sugár-rendszereiket.

Mi a feltétele annak, hogy ezekből a másodszeri elhajlási sugarakból, egy-egy sugár egymásra tevődjön?

Megoldás:

- Alkalmazzuk a vonalrács vektoregyenletét a tetszőleges irányból érkező-beeső, és a rá visszatükrözött, két elhajlási sugárra. Kapjuk, hogy a sugár egymásra-tevődés feltétele:
- $m'' - m' = n'' - n'$ , vagyis ha  $n'' - n' = \Delta n_{\text{tükrök}}$  akkor  $m'' = m' + \Delta n_{\text{tükrök}}$ .
- Nyilván, az  $n$  és  $m$  lehet bármely transzmissziós-, illetve reflexiós-sugár rendszáma egyaránt.
- A másodszeri elhajlási sugarak egymásra tevődésének a feltétele *független* a beeső sugár ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) irányától és hullámhosszától!
- Az is belátható, hogy az összes másodszeri elhajlási sugár az  $Ox$  tengellyel  $\rho_{mx} = \pi - \rho$  szöget zár be.

### 10.2. Második feladat

Egy áteresztő-visszaverő vonalrácsra eső  $\vec{e}$  sugár elhajlási sugara  $n, \vec{e}_n$ . Ezek közül a  $T'$  tükrörel, a rácstra, visszafordítjuk az  $n'$ ,  $\vec{e}_{n'}$  diffraktált sugarat, mely létrehozza az  $m'$ ,  $\vec{e}_{m'}$  elhajlási sugaraikat.

Mi lesz a *feltétele* annak, hogy a másodszeri, valamint az egyszeri diffrakció során keletkező sugarak közül, egy-egy sugár egymásra tevődjön?

Megoldás: Alkalmazzuk a rács vektoregyenletét a beeső és a visszatükrözött sugárra. Innen következik, hogy az először- és a másodszeri diffraktált sugarak egymásra tevődnek ha a rácstra beeső sugár merőleges a

rács vonalaira, és akkor is csak bizonyos  $\alpha = \alpha_E$  értékű szögekre. Ezek a szögek:  $\alpha_E = \arcsin(E \cdot \lambda / 2a)$ , ahol  $E \in [0, \pm 1, \pm 2, \dots]$ , amely a létező  $n, n', m'$  elhajlási rendszámokból képezhető  $(n + n' - m') = E$  egész szám valamelyike.

Számpéldák: Mekkora az egyszeres, és a kétszeres elhajlási sugarak egymásra-tevődését lehetővé tevő  $\alpha_E$  beesési szögek értéke, amennyiben a fényrácsként használt **CD**, illetve **DVD** korongdarabkát egy félvezető-lézer vörös fényével világítjuk meg?

Mindkét „fényrács” esetén a kiszámított  $\alpha_E$  értékeket táblázatba foglaltuk (2. táblázat).

Megjegyzés: Az előbbi két feladat megfogalmazható és megoldható *keresztrács* esetére is!

2. táblázat:

Az elsőszöri és a másodszeri elhajlási sugarak egymásra-tevődését megengedő beesési szögek táblázata

fényrács	$a$ ( $\mu\text{m}$ )	$\lambda$ (nm)	$\alpha_E$	$\beta$
CD	1,50	655	$0^0; \pm 12,5^0; \pm 25,7^0; \pm 40,5^0; \pm 60,1^0$	$90^0$
DVD	0,74	655	$0^0; \pm 26,1^0; \pm 61,5^0$	$90^0$

### HIVATKOZÁSOK

- [1.] Ábrahám György (Ed.): *Optika*. Panem – Mc.Graw-Hill, 1998.
- [2.] Uliu Florea: *Utilizarea calcului vectorial în optică* (Vektorok alkalmazása a fénytanban), Revista de Fizică și Chimie no. 9 (1987)
- [3.] Bíró Tibor: A fényvisszaverődés és fénytörés törvénye vektorosan. *Firka* 3-6/2003-2004, 1/2004-2005.
- [4.] Charles Kittel: *Introducere în Fizica Corpului Solid* (Bevezetés a szilárdtest fizikába), 1971.