Közgazdasági Szemle, LIII. évf., 2006. január (31–45. o.)

KÓCZY Á. LÁSZLÓ

A Neumann-féle játékelmélet

Jelen dolgozat célja Neumann János játékelméleti munkásságának bemutatása, eredményeinek matematikatörténeti elhelyezése. Részletesen foglalkozunk a híres minimax tétellel, illetve a Neumann–Morgenstern-féle megoldással, ennek kritikáival és az utóbbi több mint ötven év alatt javasolt alternatív megoldáskoncepcióival. Beszámolunk a játékelméleti kutatás jelenlegi helyzetéről, az aktuális problémákról és alkalmazásokról.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C7, N01.

A „játékelmélet” szót hallva sokunknak a kaszinók misztikus világa ötlik az eszébe, holott ez a tudomány ma már a póker helyett gazdasági, politikai problémákkal foglalkozik. Alkalmazásainak köre a hadászattól kezdve a piaci verseny modellezésén át a környezetvédelmi egyezmények tervezéséig terjed; olyan helyzetekben hasznos, ahol a résztvevők – más néven *játékosok* – egy jól körülírható cél érdekében döntéseket hoznak, és a végeredmény a játékosok választott *stratégiáinak* (is) függvénye. Az elnevezés nem annyira a vizsgált konfliktus komolyságára utal, hanem tudománytörténeti okokra vezethető vissza.

A mai napig a legjobban modellezhető konfliktusok a társasjátékok, mint például a sakk, ahol teljesen világos, hogy kik a játékosok, mit léphetnek egy adott állás esetén, illetve hogy mi a parti kimenetele, hiszen ezeket a játék szabályai pontosan rögzítik. Egy gyakorlott sakkozó számára a játékelmélet alapjai sem meglepők: döntéseit a lehetséges ellenlépések figyelembevételével hozza, és nyerési esélyei latolgatásánál figyelembe veszi, hogy ellenfele ugyanúgy mindent meg fog tenni a győzelem érdekében. Mindez a sakkra is jellemző *köztudásnak (common knowledge)* köszönhető, azaz hogy a játékosok nemcsak a szabályokat ismerik, hanem azt is tudják, hogy a másik játékos mit tud. A gyakorlatban, ha *A* tudja, hogy a világos kezd; *B* is tudja, hogy ezt *A* tudja; *A* tudja, hogy *B* tudja, hogy *A* tudja és így tovább.

Neumann János pókerezni szeretett, és kezdettől fogva érdekelte, hogy – ha már az osztást befolyásolni nem tudjuk – miként blöfföljünk. A probléma felírásához – mai szemmel nézve kézenfekvő módon – a matematikát használta, fő érdeme azonban az elméletnek a játékokon messze túlmenő általánosítása volt. A *minimax tételt* bizonyító első publikációjában a már a napjainkban is használt *normális alakot (normal form)* használja a játékok leírására (*Neumann* [1928]). Igazi lökést végül az Oskar Morngesternnel

* A 2003. évi centenáriumi Neumann-év alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat által kiírt *Neumann János a matematikus* pályázat díjnyertes dolgozata, amelynek megjelenését *Robert J. Auman* közgazdasági Nobel-díja teszi aktuálissá.

Kóczy Á. László, Maastrichti Egyetem (Universiteit Maastricht), Department of Economics, P.O.Box 616, NL-6200MD Maastricht, Hollandia (e-mail: l.koczy@algec.unimaas.nl).

közösen publikált könyve a *Theory of Games and Economic Behavior* (Játékelmélet és gazdasági viselkedés, 1944) adott, világossá téve a játékelmélet széles körű alkalmazhatóságát. Bár a későbbiekben figyelme más területek felé fordult, ezzel a két munkával egy egész tudomány alapjait fektette le.

A Neumann-féle játékelmélet hatásainak összefoglalása igen nagy feladat, messze meghaladja e dolgozat kereteit, így erre nem is törekszünk. Célunk elsősorban Neumann munkásságának, illetve néhány Neumann által bevezetett idea fejlődésének bemutatása. A modern játékelméletnek így sok fontos eleméről nem esik szó, ezeket lásd például *Myerson* [1991] könyvében. Először Neumann előfutárairól ejtünk szót, majd bemutatjuk a játékelméletet tulajdonképpen elindító minimax tételt. Ezután rátérünk az *n*-személyes játékokra, először a Neumann–Morgenstern-féle megoldást, majd néhány, azóta bevezetett alternatívát bemutatva. Röviden szót ejtünk az elmélet további területeiről, alkalmazásairól, és végül beszámolunk a Neumann-féle játékelmélet kutatásának jelenlegi helyzetéről.

Mit nevezünk játéknak, és mi a játékelmélet?

A bevezetőnkben röviden már utaltunk a játékok bizonyos jellemzőire, ezeket most összefoglaljuk, majd felvázoljuk, hogy mit kezd a játékelmélet az így definiált játékokkal.

Egy játék alapvetően három komponensből áll: játékosokból, játékszabályokból és az eredmények értékeléséből. Az első nem igényel különösebb magyarázatot. Az eredmények értékelése megint csak egyértelmű: minden egyes játékos felállít egy rangsort a játék lehetséges kimenetelei között. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az eredmény pénzbeli nyereséggel vagy veszteséggel jár. A játék célja a minél kedvezőbb *kifizetés* elérése, s egy játékos ezt a célt szem előtt tartva, választja lépését vagy lépéseit – természetesen a játékszabályok figyelembevételével. Függetlenül attól, hogy hányszor vagy mikor kerül döntéshelyzetbe, *stratégiának* nevezzük azt a döntéssorozattervet, amely a játék minden lehetséges döntéshelyzetére és az ebben tapasztalható minden lehetséges állapotára előír egy konkrét döntést. Bár a játékban előálló helyzetek függenek a játékostársak lépéseitől, a játékos stratégiája nem, legfeljebb más-más válaszlépést ír elő. Így, ha a játékosok *lépései* függenek is egymástól, a stratégiáik nem. A játék kifizetését az egyes játékosok választott stratégiái döntik el.[1]

A továbbiakban feltételezzük, hogy a játékosok ismerik a játékot, és hogy mindent megtesznek a magasabb kifizetés érdekében. A játékelmélet célja megtalálni az optimális stratégiákat és a kialakuló egyensúlyi helyzeteket.

A játékelmélet előzményei

Dimand–Dimand [1997][2] a játékelmélet történeti áttekintését *Waldergrave* [1713/1968] minimax megoldásával kezdi. A legtöbb korai, játékelméleti gondolatokat is tartalmazó írás azonban különösebb hatás nélkül feledésbe merült. Újrafelfedezésük matematikatörténészeknek köszönhető, inkább csak kuriózumokként tarthatók számon.[3]

Folyamatos fejlődés a 19. századtól figyelhető meg, amikor *Cournot* [1838], illetve *Bertrand* [1883] alapvetően gazdasági műveikben a piaci verseny két formáját írják le.

[1] Egyes játékokban véletlen faktorok is szerepet kapnak, ezektől azonban itt eltekintünk.

[2] A továbbiakban idézett korai művek jelentős része megtalálható ebben a gyűjteményben.

[3] Érdekes megemlítenünk *Aumann–Maschler* [1985] eredményét; a szerzők a vallásos zsidók életét szabályozó babilóniai Talmud egyik rendelkezését igazolják játékelméleti alapokon. Lásd még *Walker* [1995].

Mindkét szerzőre jellemző a feltételezés, hogy a résztvevők pontosan ismerik a konkurensek termelési paramétereit. Cournot ismert duopóliummodelljében két termelő egyetlenegy homogén terméket gyárt. A termelők szabadon, párhuzamosan választják meg a termelés volumenét, míg az árat a piac (a kereslet) szabályozza. A modellben egy modern játékhoz hasonlóan a termelők a rivális várható reakciójának figyelembevételével választják a termelési volument. Bár itt még a matematika nem áll az érvelés középpontjában, Cournot matematikailag igazolta egy olyan egyensúly létezését, amelyben mindkét termelő optimálisan reagál a rivális által megtermelt mennyiségre. Összehasonlítva a hasonló alapokon nyugvó monopóliummodellel, megállapította, hogy duopóliumban az árut nagyobb mennyiségben, de ugyanakkor alacsonyabb áron kínálják. A monopóliumellenes törvényeknek részben ma is ez az érv áll a hátterében, de akkor *Cournot* [1838] munkája nem sok visszhangra lelt, mivel – *Bertrand* [1883] kritikája szerint – „matematikai érvelése, s így szükségszerűen következtetése is, hibás”. Bertrand átdolgozta a modellt, hogy a termelők a mennyiség helyett az árat tudják megválasztani. Megmutatta, hogy így az ár azonnal eléri a szabad verseny esetén jellemző színvonalát.

Neumann János közvetlen előfutárának Émile Borelt tekinthetjük, aki az 1920-as évek elején több rövid dolgozatot is publikált stratégiai játékokról (*Borel* [1921], [1924], [1927]). Munkáját az 1950-es években *Fréchet* [1953] fedezte fel, és rögtön a játékelmélet elindítójának kiáltotta ki. Bár valóban Borel vezette be a stratégiai játékok, illetve a kevert stratégia fogalmát, képtelen volt elméletét általános formában megfogalmazni. Mi több, hamisnak sejtette a később *Neumann* [1928] által bizonyított minimax tételt, amely lényegében egyértelműsíti, hogy mely nyerő stratégiát kell egy játékosnak választania. *Neumann* [1953] elismeri Borel érdemeit, ugyanakkor kifejti, hogy a minimax tétel nélkül az elmélet vajmi keveset ér, továbbá hogy elméletét önállóan dolgozta ki. Sőt, Borel negatív sejtése adott esetben elbátortalaníthatta volna a minimax tétel bizonyítása érdekében tett erőfeszítéseit.

A minimax tétel

A minimax elv két játékos konfliktusát írja le. Mindkét játékos választhat magának egy $s_1 \in S_1$ illetve $s_2 \in S_2$ stratégiát, ahol S_1, illetve S_2 előre meghatározott (véges) stratégiahalmazok. Legyen továbbá $U\colon S_i \times S_2 \to \mathbb{R}$ egy valós függvény, amely megmutatja, hogy egy adott stratégiapár mellett mi a játék kimenetele az első játékos számára. Feltételezzük, hogy a játék zérusösszegű, tehát a második játékos ennek éppen az ellentettjét kapja.

Legyenek továbbá $\xi \in \mathbb{R}^{S_1}$ és $\eta \in \mathbb{R}^{S_2}$ kevert stratégiák, azaz vektorok, melyek előírják, hogy egyes tiszta stratégiákat milyen valószínűséggel választja az adott játékos. Így $\sum_{s_1 \in S_1} \xi_{s_1} = \sum_{s_2 \in S_2} \eta_{s_2} = 1$. A kevert stratégiák halmaza X_1, illetve X_2. A kifizetést megadhatjuk kevert stratégiák függvényeként is.

$$
\begin{array}{rcl}
u\colon X_1 \times X_2 & \to & \mathbb{R} \\
(\xi,\eta) & \mapsto & u(\xi,\eta) = \sum\limits_{s_1 \in S_1} \sum\limits_{s_2 \in S_2} U(s_1,s_2)\xi_{s_1}\eta_{s_2}
\end{array}
$$

A kevert stratégiák speciális eseteként a tiszta stratégiák is előállíthatók, s ilyenformán ez az alak sokkal általánosabb. Ugyanakkor, míg az *U* függvény tetszőleges, az *u* függvény bilineáris, ami egy nagyon speciális függvényforma (*Neumann–Morgenstern* [1953] 17.7.1.). A kérdés az, hogy milyen stratégiát válasszanak az egyes játékosok ahhoz, hogy minél nagyobb nyereménnyel fejezzék be a játékot. A háttérben két, látszólag független optimalizációs jelenséggel van dolgunk. Az első játékos mindent megtesz, hogy minél többet kapjon, viszont az ellenfele ezt a nyereményt csökkenteni kívánja. Ez az alábbi egyenlet bal oldala. Ugyanakkor a második játékos szemszögéből nézve ugyanez lejátszódik: megpróbálja minimalizálni az első játékos kifizetését, de közben természetesen játékostársa pedig a saját hasznát növeli. Ez az egyenlet jobb oldala. A probléma attól érdekes, hogy a két játékosnak a függvény más-más változójára van hatása. A két megközelítés ekvivalenciáját először *Neumann* [1928] bizonyította:

$$\min_{\eta \in X_2} \max_{\xi \in X_1} u(\xi,\eta) = \max_{\xi \in X_1} \min_{\eta \in X_2} u(\xi,\eta),$$

azaz „minimax egyenlő maximin”. Ez a *minimax tétel*.

Az első bizonyítás (*Neumann* [1928]) magas szintű topológiát és némi funkcionális kalkulust használt. *Neumann* [1937] később adott egy tiszta topológiai bizonyítást is, az első elemi bizonyítás azonban *Ville* [1938] tanulmányának köszönhető. Ennek a bizonyításnak egy tovább egyszerűsített változata került bele Neumann és Morgenstern közös művébe (*Neumann–Morgenstern* [1953] 154. o.).

Az *n*-személyes játékok

Bár 1928-as cikkében Neumann bebizonyította a játékelmélet alaptételét, a cikk hatása nem volt különösebben nagy, mivel elméletének alkalmazhatósága egyáltalán nem volt világos. Ekkor került a képbe Oskar Morgenstern, aki felismerte a közgazdaságtani vonatkozásokat. Több éven át tartó közös munka vette kezdetét, amelynek eredményeit eredetileg cikként tervezték publikálni, végül a rendkívüli terjedelem miatt könyv formában, *The Theory of Games and Economic Behavior* (Játékelmélet és gazdasági viselkedés, 1944) címmel adták ki.[4]

A normális alak

Bár Neumann és Morgenstern könyvük jelentős részét a kétszemélyes játékok elméletének, illetve alkalmazásainak szentelik, egyik fő érdemük, hogy a játékelméleti gondolkodást kiterjesztették a kettőnél több, úgynevezett *n*-szereplős játékokra. Vizsgálataik tárgya a már ismert *normális* vagy *stratégiai* alak *n*-személyes általánosítása.

1. definíció [stratégiák]. *Egy adott N játékoshalmazra jelölje* $S = S_1 \times \cdots \times S_{|N|}$ a *játékosok tiszta és* $X = X_1 \times \cdots \times X_{|N|}$ *a kevert stratégiáit, ahol* $X_i \subseteq \mathbb{R}^{S_i} \forall i \in N$. Ha $s_i \in S_i$ és $\sigma_i \in X_i$, *akkor jelölje* $\sigma_i(s_i)$ *annak a valószínűségét, hogy az i játékos a* σ_i *kevert stratégiát játszva, az* s_i *tiszta stratégiát választja. Világos, hogy* $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.

2. definíció [hasznosság]. Az $U\colon S \to \mathbb{R}^N$ *hasznossági függvény megmutatja, hogy egy adott stratégiavektor milyen kifizetést eredményez az egyes játékosok számára. Legyen továbbá* $u\colon X \to \mathbb{R}^N$ *a kevert stratégiákra vonatkozó hasznosság, ha* $u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(U(s) \prod_{i \in N} \sigma_i(s_i) \right)$ *teljesül*.

[4] Lásd még *Morgenstern* [1976] visszaemlékezését közös munkájukra.

3. definíció [normális alak]. *A játékos- és stratégiahalmazból, továbbá kifizetésfüggvényből álló hármast* normális *vagy* stratégiai alakú játéknak *nevezzük. Egy játék* zérusösszegű*, ha* $\sum_{i\in N} u_i(\sigma)=0$ *bármely* σ *kevert stratégiára.*

Koalíciók

A kétszemélyes zérusösszegű játékok esetén a játékosok szövetsége semmi többlethasznot nem hozhat. Három játékos esetén kettő *koalíciót* alkotva összehangolhatja döntéseit a harmadik játékos kárára. A gondolat tetszőleges *n* játékosra is kiterjeszthető: a játékosok egy csoportja koalíciót alkot, hogy ezáltal hatékonyabban képviselje érdekeit. A koalíció a külvilág számára olyan, mint egy játékos: stratégiákat választ, illetve kifizetést kap. A nyerő stratégiák keresése szempontjából tehát lényegtelen az, hogy egy koalíció egy vagy több játékosból áll. Ha létrejön egy koalíció, a többi játékosnak ugyanúgy érdeke egy koalíció alakítása, hiszen így tudnak legjobban védekezni az elsődleges koalíció „támadásai" ellen. Az így létrejött két koalíció megfelel a kétszemélyes játék két játékosának; ezzel visszavezettük a feladatot a már ismert esetre. A megoldást a minimax tétel adja.

Karakterisztikus függvény

A két játékosra való redukciónak köszönhető a karakterisztikus vagy más néven koalíciós függvény is (*Neumann* [1953] 25. fejezet). A $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvény [$v(\varnothing) = 0$] megmutatja, hogy a játékosok *S* részhalmaza vagy koalíciója milyen $v(S)\in\mathbb{R}$ kifizetést tud elérni, feltéve, hogy stratégiáját optimálisan választja meg.[5]

4. definíció [karakterisztikusfüggvény-alak]. Az (*N*, *v*) *pár egy* játék karakterisztikusfüggvény-alakban, *röviden* játék.

Neumann és Morgenstern a karakterisztikusfüggvény-alakot a normális alakból vezették le. Ma már szokásos az előbbit mint elsődleges alakot használni. Ilyenkor a játékosok stratégiája rejtett, illetve koalíciók alakításában merül ki.

Bár a karakterisztikus függvény csak a koalíció teljes kifizetését adja meg, közvetett módon a kifizetés *elosztását* is befolyásolja (*Neumann–Morgenstern* [1953] 25.2.1.–25.2.2.). Egy játékos éppen azért csatlakozik egy koalícióhoz, hogy ezáltal előnyösebb helyzetbe kerüljön. Elérkezhet tehát egy olyan pillanat, amikor előnyösebb számára a koalíció elhagyása, a másik koalícióba való belépés, vagy akár egy teljesen új koalíció létrehozása. Az ilyen megfontolások már háromszemélyes játékok esetében is fontosak, jelentőségük nagyobb játékokban azonban elvitathatatlan az egyensúlyi elosztások meghatározásában.

[5] Neumann és Morgenstern megkövetelték továbbá, hogy $v(N\setminus S)=-v(S)$ és $v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$, ha $S,T\subseteq N$ és $S\cap T=\varnothing$.

Megoldások

A Neumann–Morgenstern-megoldás

Monumentális művének eredményei közül Neumann a „megoldást” tartotta a legfontosabbnak. A koncepció definiálása több, a későbbiekben is szükséges játékelméleti fogalmat igényel, ezért a definíciót ezek bevezetésével kezdjük.

5. definíció [N-M elosztás]. *Az* $x \equiv (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ *kifizetésvektort* elosztásnak *nevezzük, ha*

$$x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N \quad (\textit{egyénenként racionális})$$
$$x(N) \equiv \sum_{i \in N} x_i = 0 \qquad (\textit{nulla összegű}).$$

Elosztásnak nevezünk tulajdonképpen minden állapotot, ami egy játékban előfordulhat. Egyrészről feltételezzük, hogy egy játékos csak olyan koalícióban vesz részt, ahol legalább annyit kap, mint amennyit egyedül elérhet (ez az első feltétel), másrészről a játék zérusösszegű.

A játékosok preferenciáik szerint egy sorrendet állíthatnak fel a játék lehetséges állapotai között. Bár elvben előfordulhat, hogy létezik olyan állapot, amely mindenki kedvence, az ilyen játékok igen ritkák, (nem triviális) zérusösszegű játékokban pedig ilyen elosztás nem fordulhat elő. Amikor tehát egy játék megoldását keressük, sokkal árnyaltabb megközelítést kell alkalmaznunk. *Neumann–Morgenstern* [1953] 4.5.4. pont megfogalmazása szerint az elosztásoknak olyan halmazát kell megtalálnunk, amely így halmazként osztja egy ilyen „kedvenc” állapot tulajdonságait. Mindenekelőtt az egyes elosztások közötti preferenciákat formalizáljuk.

6. definíció [elérhetőség]. Az *N játékoshalmaz S részhalmaza számára az x elosztás* elérhető*, ha* $x(S) \equiv \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Az *S* koalíció képes „kikövetelni” a számára elérhető *x* elosztást. Ha ugyanis a többi játékos az *x* elérésében nem működik együtt, az *S* tagjai különválnak, hiszen a karakterisztikus függvény alapján *v*(*S*) kifizetést biztosan el tudnak érni, és ez a komplementer koalíció számára kedvezőtlenebb helyzetet teremt.

7. definíció [dominancia]. Az *x elosztás* dominálja az *y elosztást, azaz* $x \succ y$*, ha létezik olyan, nem üres* $S \subseteq N$ *koalíció, hogy számára x elérhető* és $x_i > y_i \quad \forall i \in S$.

8. definíció [megoldás].[6] *Az elosztásoknak egy Σ halmazát megoldásnak nevezzük, ha teljesíti a következő két feltételt:*

1. *Nincs a Σ halmaznak olyan y eleme, melyet Σ egy x eleme dominál.*
2. *Minden a Σ halmazon kívüli y elosztást dominál valamely* $x \in \Sigma$.

A két feltétel a belső, illetve külső stabilitást biztosítja. Neumann és Morgenstern interpretációjában (4.6. és 30.2.) a „megoldás” nem más, mint elfogadott „viselkedési normák” gyűjteménye: ha két viselkedési mód közül az egyiket preferálnánk, a másik nem

[6] Mivel azóta több alternatívát is bevezettek, a Neumann–Morgenstern-féle megoldás *stabil halmaz* néven is ismert.

minősülne elfogadottnak. Ugyanakkor egy viselkedési mód csak akkor lehet nem elfogadott, ha van olyan norma, amivel helyettesíthető. Fontos megjegyezni, hogy a megoldás egy globális megoldáskoncepció abban az értelemben, hogy nem egyensúlyi pontok halmaza, hanem egyensúlyi halmaz, s az egyes elemeinek egyensúlyi volta csak a többi elem összességével együtt vizsgálható (*Lucas* [1992] 5. szakasz).

A Neumann–Morgenstern-féle megoldásnak azonban nem ez az egyetlen érdekes, vagy furcsa tulajdonsága. Maguk a szerzők is megjegyzik, hogy a megoldás létezését semmi sem garantálja, illetve ha létezik megoldás, az egyértelműen definiált. Mivel idővel sikerült megoldások létezését igazolni a játékok széles körére, a tudományos közvéleményt váratlan és kellemetlen meglepetésként érte *Lucas* [1968], [1969] tízszemélyes ellenpéldája. Más játékokról bebizonyosodott, hogy igen sok megoldásuk van, sőt a véges számú megoldással rendelkező játékok már különlegességszámba mennek (*Lucas–Michaelis* [1982], *Lucas–Michaelis–Muto–Rabie* [1982]).

A megoldás általánosításai

Neumannék elsősorban zérusösszegű játékokat vizsgáltak, s ezeken belül is feltételezték, hogy egy koalíció létrejötte azonnal a komplementer koalíció megalakulását vonja maga után. Kérdés azonban, hogy nem érne-e el a két koalíció legalább ekkora kifizetést, ha összefognának, s egy „koalíciót” alkotnának. *Nash* [1950*a*], [1953] után az ilyen játékokat *kooperatívnak*, egyes állapotaikat pedig *elosztásoknak* nevezzük.

9. definíció [elosztás]. *Legyen* (N, v) *egy játék karakterisztikus függvény alakban. Egy* $x \in \mathbb{R}^N$ *kifizetésvektort elosztásnak nevezünk, ha*

$$x(N) = v(N) \qquad \textit{(megvalósítható és hatékony), illetve}$$
$$\forall i \in N: \quad x_i \geq v(\{i\}) \qquad \textit{(egyénenként racionális).}$$

Az elosztások halmaza lehet üres.

Mind a kooperatív, mind a Neumann-féle játékokat általánosítják a *részben kooperatív* vagy *hibrid* játékok (*Zhao* [1992]). Neumannhoz hasonlóan feltételezzük, hogy egy koalíción belül tökéletes az együttműködés, illetve hogy a koalíciók érdekei egymással szemben állnak, viszont megengedjük egy, két vagy több koalíció alakulását is. A részben kooperatív játékok állapotait *kimenetelek (*outcomes*)* alkotják.

10. definíció [kimenetel]. *Az* (x, P) *párt, ahol* $x \in \mathbb{R}^N$ *kifizetésvektor, és P a játékosoknak egy partíciója, kimenetelnek nevezzük, ha az x vektorra teljesül*

$$\forall S \in P: \quad x(S) = v(S) \qquad \textit{(megvalósítható és hatékony), illetve}$$
$$\forall i \in N: \quad x_i \geq v(\{i\}) \qquad \textit{(egyénenként racionális).}$$

A kimenetelek halmaza sohasem üres, hiszen a csupa egytagú koalícióból álló partícióban a játékosok pontosan az egyénenként racionális kifizetést kapják, amely kifizetésvektor egyben teljesíti az első feltételt is.

11. definíció [kimenetelek dominanciája]. Az (x, P) *kimenetel dominálja az* (y, Q) *kimenetelt, azaz* $(x, P) \succ (y, Q)$, *ha létezik olya*n $S \in P$

$$x_i \geq y_i \ \forall i \in S \quad \textit{és} \quad \exists i \in S : x_i > y_i.$$

Mivel $S \in P$ és (x, P) egy kimenetel, ezért $v(S) = \sum_{i \in S} y_i$, ami megfelel a Neumann-féle elérhetőségi feltételnek. Ezt továbbgondolva, az is világos, hogy ha egy adott (x, P) kimenetelhez létezik egy olyan S koalíció, hogy $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$, akkor létezik olyan (y, Q), hogy $S \in Q$ és (y, Q) dominálja (x, P)-t.

A Neumann-Morgenstern-féle megoldás alkalmazása nem igényel új definíciót a teljesen vagy részben kooperatív játékokra. Sajnos azonban ezek a korszerűbb, általánosabb értelmezések sem mentesek a klasszikus változat gyengeségeitől. Mivel azonban az elmúlt 50 évben bevezetett számtalan megoldáskoncepció (amelyek közül párral a következő szakaszban foglalkozunk) sem nyújtott igazi alternatívát, az utóbbi időben ismét feléledt az érdeklődés a Neumann–Morgenstern-féle megoldás iránt, és sokan tettek erőfeszítéseket a kevésbé vonzó jellemzők kiküszöbölésére: *Greenberg* [1992] módosította a definícióban használt dominancia fogalmát; *van Deemen* [1991] absztrakt játékokat[7] vizsgált, majd az általánosított megoldást az absztrakt dominancia tranzitív lezártjának segítségével definiálta.

Más szerzők a megoldás további általánosításán dolgoztak: *Espinosa–Inarra* [2000] a megoldást externáliák jelenlétében vizsgálják; Diamantoudi és Xue pedig több, részben közös munkában (*Xue* [1958], *Diamantoudi* [2002], *Diamantoudi–Xue* [2003]) kiterjesztették a neumanni gondolatot olyan játékokra, amelyek résztvevői „távollátók”, s nem a közvetlen elérhető, hanem a végső, stabil állapotban kifizetett hasznosság növelésére törekszenek. Az ilyen játékokról később bővebben is szót ejtünk.

Bár az újabb eredmények sokban hozzájárultak a Neumann–Morgenstern-féle megoldás jobb megértéséhez, továbbra is számtalan nyitott kérdésre várjuk a választ.[8] Mindezek ellenére, amikor az újabb, egyszerűbb megoldáskoncepciók kudarcot vallanak, továbbra is elő-előkerül a játékosok viselkedését igen jól leíró Neumann–Morgenstern-féle megoldás.

Alternatív megoldáskoncepciók

A mag és változatai. 12. definíció [mag]. *A mag (core) a dominálatlan elosztások/kimenetelek halmaza. Másképpen: A mag pontosan azon (x, P) kimenetelek halmaza, amelyekre*

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N.$$

Az összes kooperatív megoldás közül ez a legkönnyebben megérthető, könnyű kiszámítani; egyszerűségének köszönhetően talán a legnépszerűbb. *Peleg* [1992] érvelése szerint egy megoldás csak akkor „elfogadható”, ha axiómái a mag axiómáihoz hasonlítanak. A mag egyetlen hátulütője, hogy lehet üres is, mely esetben semmifajta útmutatást nem nyújt a játék megoldására vonatkozólag.

Gondolata egyidős a játékelmélettel, felfedezhető már *Edgeworth* [1881] írásaiban is „szerződési görbe” *(contract curve)* néven (*Kannai* [1992]). Ugyanakkor, ha Neumann érdekes gondolatnak is tartotta a magot, az általa vizsgált zérusösszegű játékokban a mag

[7] Egy absztrakt játék egy állapothalmazból és egy azon felállított dominanciarelációból áll – játékosok nélkül.

[8] A Neumann–Morgenstern-féle megoldás irodalmának kitűnő áttekintéseit adja *Lucas* [1977], [1990], [1992].

mindig üres, így a definíció *Gillies* [1959] és Shapley nevéhez kötődik. A mag üressége a kezdetektől foglalkoztatta a kutatókat. *Bondareva* [1963] és *Shapley* [1967] egymástól függetlenül állították fel a nem üres mag feltételeit. Ezzel párhuzamosan elindult a kutatás egy hasonló, de nemüres megoldás felé.

Közelítő magok. A legkézenfekvőbb megoldás a dominancia „szigorítása." A közelítő mag (*approximate/quasi-core*, *Shapley–Shubik* [1966]) definíciója pontosan ezen alapszik. Feltételezzük, hogy az elhajlás *(deviation)* során játékosonként (a gyenge) vagy koalíciónként (a erős közelítő mag esetén) $\varepsilon > 0$ elvész, például adóként be kell fizetni. Így az elhajlások egy része nem hoz hasznot, és a mag szükségszerűen bővül, s ha ε elegendően nagy, a mag nemüres.

A legkisebb mag (*least core*, *Maschler–Peleg–Shapley* [1979]) az a nem üres (erős) közelítő mag, amelyre ε a legkisebb. A legkisebb mag sohasem üres, viszont általában túl kicsi az alkalmazásokhoz, és az ε értékéhez is nehéz magyarázatot csatolni, így alkalmazásai ritkák. Fontos azt is megjegyezni, hogy ha a mag nem üres, a legkisebb mag a mag (általában kis) részhalmaza.

Módosított mag. A mag minden lehetséges elhajlást figyelembe vesz, anélkül hogy ezek stabilitását vizsgálnánk. *Ray* [1989] csak a stabil elhajlásokat engedélyezi; az így rekurzív módon definiált módosított mag *(*modified core*)* egybeesik a maggal.

Alkuhalmaz. Hasonló gondolatot fogalmaznak meg *Davis–Maschler* [1963] és *Aumann–Maschler* [1964] tanulmányok az *alkuhalmaz (bargaining set)* bevezetésekor. Egy kifogás *(*objection*)* csak akkor hiteles, ha nincs olyan ellenkifogás *(counter-objection)*, mely a kifogással élő koalíciót felbontja. Itt azonban, amikor a kifogással élő koalíciónak belső instabilitását vizsgáljuk, az ellenkifogás jöhet, sőt rendszerint külső játékostól jön. Az ellenkifogások révén sok kifogás hitelét veszti. Ennek köszönhető, hogy az alkuhalmaz sohasem üres *Peleg* [1963]; épp ellenkezőleg, az okoz problémát, hogy az alkuhalmaz túl nagy. Mint *Dutta és szerzőtársai* [1989] megállapítják, azáltal hogy a másodlagos kifogások, azaz az ellenkifogások hitelét nem vizsgálja, az alkuhalmaz túl sok (elsődleges) kifogást hiteltelenít. A konzisztens alkuhalmaz *(consistent bargaining set)* az ellenkifogásokat ugyanannak a vizsgálatnak veti alá, de sajnos, az üresség problémája itt visszatér. Az alkuhalmaz irodalmát *Maschler* [1992] tekinti át részletesen.

Távollátás. Az alkuhalmaz lényege, hogy a játékosok a kifogásnak/elhajlásnak nem csak a közvetlen eredményét, hanem az erre való lehetséges reakciókat is figyelembe veszik. A konzisztens alkuhalmaz ezt a gondolatot viszi tovább a későbbi ellenkifogások hitelének vizsgálatával. Arra azonban nem tér ki, hogy az ellen-ellenkifogások hogyan befolyásolják az eredeti kifogást. Amennyiben az ellen-ellenkifogás pusztán az ellenkifogást semlegesíti, az eredeti kifogás akár sikeres is lehet. A távollátás gondolata, nevezetesen, hogy a játékosok az alkufolyamat egészét nézik, és csak a végső (stabil) kifizetés érdekli őket, már Harsányi egyik cikkében is felbukkan; modern fogalma azonban *Chwe* [1994] nevéhez köthető.

Bár sokan a játékelmélet, sőt a közgazdaságtani gondolkodás forradalmát vélik ebben az irányzatban felfedezni, fontos megjegyeznünk, hogy a távollátás *(farsightedness)* nem azonos az előrelátással *(foresightedness)*. Utóbbit jelenleg legjobban *Kóczy* [2002], illetve *Konishi–Ray* [2003] megközelítésével lehet modellezni, azonban a felmerülő elméleti és gyakorlati problémák a további kutatást egyelőre nagyon megnehezítik. Meggondolandó ugyanakkor az is, hogy egy hosszantartó játékban csak a végeredményre koncentrálni meglehetősen irracionálisnak tűnik, s nehezen összehangolható az emberi gondolkodással. A kérdés rendkívül gyakorlati: Magyarország EU-csatlakozásával kapcsolatban keveseket érdekel, hogy mi a csatlakozás előnye 300 év múlva, a legtöbben a remélt pozitív hatásokat még életükben, lehetőleg öt-tíz éven belül szeretnék élvezni. Tekintve, hogy a tárgyalási folyamat („egy lépes") legalább ennyi ideig tartott, ebben az esetben a szereplők gondolkodását továbbra is legjobban rövidlátással, miópiával lehet leírni.

Dinamikus megoldások. Mint az az eddigiekből kiderül, a mai napig nincs olyan megoldáskoncepció, amely minden kívánságnak eleget tenne. Ezeket a követelményeket *Zhou* [1994] foglalta három pontba. Egy megoldás sohasem üres, nem definiáljuk a játékosoknak sem egy előre megadott, sem az összes lehetséges partíciójára. Míg a Neumann–Morgenstern-megoldás, a mag és még sokan mások az elsőn, az alkuhalmaz például a második feltételen bukik el. Eredményt hozhatnak az olyan dinamikus megközelítések, amelyek egy játék ergodikus halmazát tekintik megoldásnak. Lényegében ez történik *Shenoy* [1979] dinamikus, *Packel* [1981] stochasztikus megoldása, *Sengupta–Sengupta* [1994] életképes javaslatai *(viable proposals)* és a legkisebb domináns halmaz esetében (*Kóczy–Lauwers* [2002]). Ezek a megoldások általában már definíciójukból adódóan nem lehetnek üresek. Utóbbi kettő külön érdekessége, hogy egybeesnek a nemüres maggal. Sajnos, azonban ha a mag üres, az életképes javaslatok halmaza túl nagy, megoldásként nehezen használható.

Nem kooperatív megoldások. A Neumann-féle játékelméletet John F. Nash – máig tartó vitát kavarva – kooperatív és nem kooperatív játékokra osztotta. A Nash által *kooperatívnak* nevezett játékokban *1.* a játékosok a döntéseiket közösen hozzák (tehát a játékosok között kiterjedt a kommunikáció), másrészt *2.* a megállapodás köti a játékosokat, hiszen azonnal végre is hajtják. Ezzel szemben a *nem kooperatív* játékokban semmiféle kötő megállapodás nem lehetséges, olykor még a játékosok közötti kommunikációt is kizárjuk. Ennek tükrében a Neumann–Morgenstern-megoldás inkább a kooperatív megoldások közé sorolható.

Non kooperatív játékokra Neumann minimax tétele nem alkalmazható változatlan formában. *Nash* [1950*b*], [1951] azonban – *Kakutani* [1941] fixponttételének egyik első alkalmazásaként – a játékok széles körére igazolta az azóta róla elnevezett nem kooperatív egyensúly, illetve egyensúlyok létezését.

13. definíció [Nash-egyensúly]. *Legyen* $\Gamma = (N, X, u)$ *egy normális játék. A* σ^* *kevert stratégia Nash-egyensúlyi pont, ha minden egyes i játékosra*

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{N\setminus\{i\}}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{N\setminus\{i\}}^*) \quad \forall \sigma_i \in X_i.$$

A Nash-egyensúly a játékelmélet és a közgazdaságtan, azon belül is a mikroökonómia egyik alapvetésévé vált. A gondolat azonban nem minden kritikától mentes.

Nash a nem kooperatív játékokban feltételezte, hogy *1.* a játékosok között nincs kommunikáció, továbbá hogy *2.* semmi sem köti őket az esetleges megállapodásokhoz. Összehasonlítva ezeket a kooperatív játékok feltételeivel, kiderül, hogy bizonyos játékok nem mondhatók sem kooperatívnak, sem nem kooperatívnak a nashi értelemben. Ezért vitatja *Harsányi–Selten* [1988] a kettős, bináris felosztás helyességét, és a hangsúlyt a megállapodások kötő (kooperatív), vagy nem kötő (nem kooperatív) voltára helyezik.

Ha viszont engedélyezünk kommunikációt a játékosok között, a Nash egyensúlyi pontok ki vannak téve játékos*csoportok* koordinált elhajlásainak. Az ilyen elhajlásokat is figyelembe vevő *erős Nash-egyensúlyt* Aumann vezette be. Az erős Nash-egyensúly azonban „túl erős”, mivel minden lehetséges koalíciós elhajlást tekintetbe vesz, függetlenül attól, hogy a deviáns koalíció maga stabil-e. Emiatt ilyen egyensúly ritkán létezik. A *Bernheim–Peleg–Whinston* [1987] által bevezetett koalícióbiztos részjáték-tökéletes *(coalition-proof subgame-perfect)* Nash-egyensúly erre a felvetésre ad választ. Bár valószínűleg ezzel még nem zárult le a nem kooperatív egyensúlyok fejlődése, a modern játékelméletben gyakran feltételezzük, hogy a kommunikáció tartós, megkötő megállapodással, tehát kooperatív viselkedéssel is párosul, így az ennél összetettebb koalíciós megoldásokat a kooperatív játékelmélet tárgyalja.

További kérdések

Rövid játékelméleti utazásunk során igyekeztünk Neumann munkásságát és közvetlen hatását informális stílusban, inkább a gondolatok mögötti intuíció, semmint hosszú formális definíciók és tételek segítségével bemutatni. Nem kerülhetett sor több olyan kérdésre vagy területre, amelyek fontosak, de távol estek központi témánktól, vagy az igényelt matematikai apparátus meghaladja a dolgozat kereteit. Ezek közül néhányról most mégis röviden szót ejtünk.

A neumanni definíciótól való eltávolodás lehetővé tette, hogy sokkal általánosabb karakterisztikus függvény alakú játékokkal is foglalkozzunk, viszont megszűnt a különböző koalíciós kifizetések közötti kapcsolat. Az ilyen modellek tehát már nem veszik figyelembe a koalícióalakítás *külhatásait*, holott a koalíciós játékelmélet mai, leggyakoribb alkalmazásainál, mint például a nemzetközi környezetvédelmi egyezmények vagy kartellek stabilitásánál, éppen a pozitív külhatást ingyen élvező potyautas-viselkedés *(free-riding behaviour)* okoz problémát. Ugyanakkor egyes iparágak (autógyártás, légi közlekedés) koncentrálódásánál éppen a koalícióalakítás negatív externáliái okozzák azt a láncreakciót, amit egy-egy cégegyesülés kivált. Hasonló módon magyarázható az Európai Unió rohamos bővülése, hiszen az erősen belterjes európai piacokon fokozottan hátrányba kerülnek a vámunión kívül lévő országok. Megoldást nyújthat a partíciós függvény (*Thrall–Lucas* [1963]) vagy a már említett hibrid alak használata, mert ezek számolnak az externáliákkal is.

Az újabban bevezetésre kerülő játékalakok közül mindenképpen figyelmet érdemelnek még a hálózati játékok *(network games)*, ahol a kifizetéseket a játékosok közötti kétoldalú kapcsolatok megléte vagy hiánya, illetve általánosabban, szorossága dönti el.

A kooperatív megoldások érdekes csoportját alkotják az *értékek*; közülük legismertebb a *Shapley-féle érték* (*Shapley* [1953]). Szemben a dominancián alapuló megoldásokkal, ezek az egyes játékosok „közjóhoz” való hozzájárulását vizsgálják, s így alkalmasak arra, hogy felmérjük egy adott szavazattal rendelkező érdekcsoportnak egy döntéshozó szervezeten belüli tényleges befolyását. Így például a *nizzai szerződés* értékelésénél nem a meghatározott szavazatokat kell néznünk, hanem hogy ezek milyen tényleges érdekérvényesítést tesznek lehetővé, figyelembe véve az országok között érdekellentéteket és -párhuzamokat.

Az összes eddigi eredmény azon a feltételezésen alapszik, hogy a kifizetések minden játékos számára ugyanakkora hasznosságot eredményeznek. A *nem átváltható hasznosságú (nontransferable utility)* játékokban ezt a kikötést feloldjuk. Így például a karakterisztikus függvény nem egy valós számot, hanem a lehetséges elosztások halmazát rendeli a koalíciókhoz.

Nem kevésbé fontos az eddigiekben a *közös tudás (common knowledge)*. Ennek hiányában a játékosok eleinte szinte „vakon” játszanak, nem ismerve a játékostársak szempontjait, sőt, akár a játék szabályait sem; ezeket csak ismételt lejátszások során tanulhatják meg. Az evolúciós játékelmélet ilyen játékokkal foglalkozik; alkalmazási területei közé sorolhatjuk természetesen a biológiát, tulajdonképpen az egész evolúció egy evolúciós játék.

Az aukciók lényege is a rejtett információk felfedése. Az eladó szeretné az árut minél drágábban eladni, a vevő pedig minél olcsóbban megvenni. Nem ritka a verseny a vevők, sőt, akár az eladók között is. Az aukcióelmélet leglátványosabb alkalmazásának a mobiltelefon-szolgáltatók számára kiírt pályázatok nevezhetők. Egyes országokban a játékelméleti alapon kidolgozott pályáztatás korábban sohasem látott bevételhez juttatta az államkasszát, míg másutt a tudománytalan versenykiírás eredménye jóval alulmaradt a (politikai) várakozásoknak. Természetesen ugyanezek a módszerek alkalmazhatók más állami pályázatokra, így a privatizációban is.

A játékelmélet napjainkban

Befejezésképpen tekintsük át, hova jutott a játékelmélet a Neumann minimax tétele óta eltelt 75 év alatt. Ma a játékelmélet önálló tudomány, amelyet több száz kutató űz világszerte. A terület 1974 óta saját lappal rendelkezik; az *International Journal of Game Theory* a Springer gondozásában jelenik meg. Az 1990-es évek elején az Academic Press által elindított *Games and Economic Behavior* címe talán nem véletlenül rímel Neumannék könyvére. Ehhez a két, ma már elismert folyóirat mellé néhány éve csatlakozott az *International Game Theory Review*, de számtalan más közgazdaságtani, matematikai vagy politikai folyóirat is közöl rendszeresen játékelméleti cikkeket. Az 1990-es évek elejétől kezdve sorra jelennek meg a *Handbook of Game Theory* (Játékelméleti kézikönyv) kötetei Aumann és Hart szerkesztésében (1992, 1994, 2002), amelyek fejezetei enciklopédikus stílusban mutatják be az egyes területeket, eredményeket. A tárgyalt témákban *Myerson* [1991] munkája tömörebb, de szintén kitűnő áttekintést ad.

1999 januárjában megalakult a Nemzetközi Játékelméleti Társaság, mely 2000 nyarán Bilbaóban több száz résztvevővel tartotta első kongresszusát. A tervek szerint négyévente megrendezésre kerülő kongresszus mellett évente számtalan kisebb, néha csak egy részterülettel foglalkozó konferencia nyújt találkozási lehetőséget.

A játékelmélet szó ma már nem csak a kutatók számára cseng ismerősen. Az utóbbi években két dolog is közrejátszott abban, hogy ez a viszonylag fiatal tudomány a szélesebb körű publikum számára is ismertté váljon. 1994-ben a játékelmélet szinte szimbolikus elismeréseként Harsányi János, John F. Nash és Reinhard Selten közgazdaságtani Nobel-díjat kaptak, majd néhány évvel később Csodálatos elme címmel nagysikerű, Oscar-díjas film készült Nash életéből. A játékelmélet tehát bekerült a köztudatba, és remélhetőleg a centenáriumi Neumann-év eredményeként az is közismertté válik, hogy e „csodálatos elméletnek” (is) atyja – Neumann János.

Hivatkozások

Aumann, R. J. [1959]: Acceptable points in general cooperative n-person games. Megjelent: *Tucker–Luce* [1959] 287–324. o.

Aumann, R. J.–Hart, S. (szerk.) [1992]: Handbook of Game Theory with Economic Applications, I. köt. Elsevier, Amszterdam.

Aumann, R. J.–Maschler, M. [1964]: The bargaining set for cooperative games. Megjelent: *Drescher, M.–Shapley, L. S.–Tucker, A. W.* (szerk.): Advances in Game Theory, Annals of

Mathematics Studies, 52. Princeton University Press, Princeton. 443–476. o. Újranyomva: *Kuhn* [1997]. 140–169. o.

AUMANN, R. J.–MASCHLER, M. [1985]: Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 36. 195–213. o.

BERNHEIM, D. B.–PELEG, B.–WHINSTON, M. D. [1987]: Coalition-proof Nash equilibria: I. Concepts. Journal of Economic Theory, 42. 1–12. o.

BERTRAND, J. [1883]: Théorie mathématique de la richesse sociale. Journal des Savants, 67. 499–508. o.

BONDAREVA, O. N. [1963]: Nyekatorije priminyenyija metodov linyejnovo programmirovanyija k tyeoriji kooperatyivnih igr. Problemi Kibernyetyiki, 10. 119–139. o.

BOREL, É. [1921]: La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 173. 1304–1308. o.

BOREL, É. [1921/1953]: The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels. Econometrica, 21. 97–100. o. A *Borel* [1921] francia eredetiből fordította: *Leonard J. Savage.*

BOREL, É. [1924]: Sur les jeux où interviennent l'hasard et l'habileté des joueurs, Librairie Scientifique, J. Herrmann, Párizs. 204–224. o.

BOREL, É. [1924/1953]: On games that involve chance and the skill of the players. Econometrica, 21. 101–115. o. A *Borel* [1924] francia eredetiből fordította: *Leonard J. Savage.*

BOREL, É. [1927]: Sur les systèms de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 184. 52–53. o.

BOREL, É. [1927/1953]: On systems of linear forms of skew symmetric determinant and the general theory of play. Econometrica, 21. 116–117. o. A *Borel* [1927] francia eredetiből fordította: *Leonard J. Savage.*

CHWE, M. S.-Y. [1994]: Farsighted coalitional stability. Journal of Economic Theory, 63. 299–325. o.

COURNOT, A. [1838]: Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses (Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth). Angol nyelvű kiadás: Macmillan, 1897.

DAVIS, M.–MASCHLER, M. [1963]: Existence of stable payoff configurations for cooperative games. Bulletin of the American Mathematical Society, 69. 106–108. o.

VAN DEEMEN, A. M. A. [1991]: A note on generalized stable sets. Social Choice and Welfare, 8. 255–260. o.

DIAMANTOUDI, E. [2002]: Stable coalition structures. Kézirat.

DIAMANTOUDI, E.–XUE, L. [2003]: Farsighted stability in hedonic games. Social Choice and Welfare, 21. 39–61.o.

DIMAND, M. A.–DIMAND, R. W. [1997]: The Foundations of Game Theory I-III. An Elgar Reference Collection. Edward Elgar Publishing Ltd., Cheltenham – Lyme.

DUTTA, B–RAY, D–SENGUPTA, K–VOHRA, R. [1989]: A consistent bargaining set. Journal of Economic Theory, 49. 93–112. o.

EDGEWORTH, F. Y. [1881]: Mathematical Psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences. Kegan Paul, London. Újranyomva: *Dimand–Dimand* [1997] 10–34. o.

ESPINOSA, M. P–INARRA, E. [2000]: Von Neumann and Morgenstern stable sets in a Cournot merger system. International Game Theory Review, 2. 29–45. o.

FRÉCHET, M. [1953]: Emile Borel, initiator of the theory of psychological games and its application. Econometrica, 21. 95–96. o.

GILLIES, D. B. [1959]: Solutions to general non-zero-sum games. Megjelent: *Tucker–Luce* [1959] 47–85. o.

GREENBERG, J. [1992]: On the sensitivity of von Neumann and Morgenstern abstract stable sets: The stable and the individual stable bargaining set. International Journal of Game Theory, 21. 41–55. o.

HARSÁNYI, J. C. [1974]: An equilibrium point interpretation of stable sets. Management Science, 20. 1472–1495. o.

HARSÁNYI, J. C.–Selten, R. [1988]: General Theory of Equilibrium Selection in Games. The MIT Press, Cambridge, Massachusets–London.

Kakutani, S. [1941]: A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Mathematical Journal, 8. 457–459. o.

Kannai, Y. [1992]: The core and balancedness. Megjelent: *Aumann–Hart* [1992] 12. fejezet, 355–395. o.

Kóczy Á. László [2002]: Finding the best way to join in: A dynamic accession game. Megjelent: *Parsons, S.–Gmytrasiewicz, P.–Wooldridge, M.* (szerk.): Game Theory and Decision Theory in Agent-Based Systems, Multiagent Systems, Artificial Societies, and Simulated Organizations. Kluwer Academic Publishers, 159–176. o.

Kóczy Á. László–Lauwers, L. [2002]: The minimal dominant set is a non-empty core-extension. Center for Economic Studies, Discussion Paper DP-02.20. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.

Konishi, H–Ray, D. [2003]: Coalition formation as a dynamic process. Journal of Economic Theory, 110. 1–41. o.

Kuhn, H. W. (szerk.) [1997]: Classics in Game Theory. Frontiers of Economic Research. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Lucas, W. F. [1968]: A game with no solution. Bulletin of the American Mathematical Society, 74. 237–239. o.

Lucas, W. F. [1969]: The proof that a game may not have a solution. Transactions of the American Mathematical Society, 137. 219–229. o.

Lucas, W. F. [1977]: The existence problem for solutions. Megjelent: *Henn, R–Moeschlin, O.* (szerk.): Mathematical economics and game theory: Essays in honor of Oskar Morgenstern. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 141. Springer, Berlin, 64–75. o.

Lucas, W. F. [1990]: Developments in stable set theory. Megjelent: *Ichiishi, T.–Neyman, A–Tauman, Y.* (szerk.): Game Theory and Applications. (Columbus, Ohio, 1987), Academic Press, San Diego, 300–316. o.

Lucas, W. F. [1992]: Von Neumann–Morgenstern stable sets. Megjelent: *Aumann–Hart* [1992] 543–590. o.

Lucas, W. F–Michaelis, K. [1982]: Finite solution theory for coalitional games. SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 3. 551–565. o.

Lucas, W. F.–Michaelis, K.–Muto, S.–Rabie, M. [1982]: A new family of finite solutions. International Journal of Game Theory, 11. 117–127. o.

Maschler, M. [1992]: The bargaining set, kernel and nucleolus. Megjelent: *Aumann–Hart* [1992] 18. fejezet.

Maschler, M–Peleg, B–Shapley, L. S. [1979]: Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. Mathematics of Operations Research, 4. 303–338. o.

Morgenstern, O. [1976]: The collaboration between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the theory of games. Journal of Economic Literature, XIV. 805–816. o.

Myerson, R. B. [1991]: Game Theory – Analysis of Conflict. Harvard University Press, Cambridge MA.–London.

Nash, J. F. [1950*a*]: The bargaining problem. Econometrica, 18. 155–162. o. Újranyomva: *Young* [1975] 53–60. o. és *Kuhn* [1997] 5–13. o.

Nash, J. F. [1950*b*]: Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36. 48-49. Újranyomva: *Kuhn* [1997] 3–4. o.

Nash, J. F.. [1951]: Non-cooperative games. Annals of Mathematics, 54. 286–295. o. Újranyomva: *Kuhn* [1997] 14–26. o.

Nash, J. F. [1953]: Two-person cooperative games. Econometrica, 21. 128–140. o.

Neumann, J. von [1928]: Zur Theorie der Gesellschaftspiele. Mathematische Annalen, 100. 295–320. o.

Neumann, J. von [1928/1959]: On the theory of games of strategy. Megjelent: *Tucker–Luce* [1959] 13–42. o. Sonya Bergman fordította német eredetiből (*Neumann* [1928]). Újranyomva: *Dimand–Dimand* [1997] Vol. I.

Neumann, J. von. [1937]: Über ein ökonomosches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes. Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, 8. 73–83. o.

Neumann, J. von [1953]: Communication on the Borel notes. Econometrica, 21. 124–127. o.

Neumann, J. von–Morgenstern, O. [1953]: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, Princeton, 3. kiadás.

PACKEL, E. W. [1981]: A stochastic solution concept for *n*-person games. Mathematics of Operations Research, 6. 349–362. o.

PELEG, B. [1963]: Existence theorem for the bargaining set $M_1^{(i)}$. Bulletin of the American Mathematical Society, 69. 109–110. o.

PELEG, B. [1992]: Axiomatizations of the core. Megjelent: *Aumann–Hart* [1992] 13. fej. 397–412. o.

RAY, D. [1989]: Credible coalitions and the core. International Journal of Game Theory, 18. 185–187. o.

SENGUPTA, A.–SENGUPTA, K. [1994]: Viable proposals. International Economic Review, 35. 347–359. o.

SHAPLEY, L. S. [1953]: A value for n-person games. Megjelent: *Kuhn, H. W.–Tucker, A. W.* (szerk.): Contributions to the Theory of Games. II. Annals of Mathematics Studies, Vol. 28. Princeton University Press, Princeton. 307–317. o.

SHAPLEY, L. S. [1967]: On balanced sets and cores. Naval Research Logistics Quarterly, 14. 453–460. o.

SHAPLEY, L. S.–SHUBIK, M. [1966]: Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. Econometrica, 34. 805–827. o.

SHENOY, P. P. [1979]: On coalition formation: A game-theoretical approach. International Journal of Game Theory, 8. 133–164. o.

THRALL, R. M–LUCAS, W. F. [1963]: n-person games in partition function form. Naval Research Logistics Quarterly, 10. 281–298. o.

TUCKER, A. W.–LUCE, R. D. (szerk.) [1959]: Contributions to the Theory of Games. IV. Annals of Mathematics Studies, 40. Princeton University Press, Princeton.

VILLE, J. [1938]: Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs. Megjelent: *Borel, É.* (szerk.): Applications aux Jeux de Hasard, Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications IV. 2. Párizs, 105–113. o.

WALDERGRAVE, J. [1713/1968]: Minimax solution to 2-person zero-sum game. Megjelent: *Baumol, W. J.–Goldfeld, S. M.* (szerk.): Precursors in Mathematical Economics, 3–9. London School of Economics, London. Kivonat [Pierre de] Montmort Nicholas Bernoullihoz írt leveléből. Fordította és előszóval ellátta: *Harold Kuhn.*

WALKER, P. [1995]: An outline of the history of game theory. http://william-king.www.drexel.edu/top/class/histf.html.

XUE, L. [1998]: Coalitional stability under prefect foresight. Economic Theory, 11. 603-627. o.

YOUNG, O. R. (szerk.) [1975]: Bargaining: Formal Theories of Negotiation. University of Illinois Press, Urbana–Chicago–London.

ZHAO, J. [1992]: The hybrid solutions of an n-person game. Games and Economic Behavior, 4. 145–160. o.

ZHOU, L. [1994]: A new bargaining set of an n-person game and endogenous coalition formation. Games and Economic Behavior, 6. 512–526. o.